

〈논 문〉

다수의 각접촉 볼베어링으로 지지된 5자유도 회전계에서 볼베어링의 Waviness에 의해 발생하는 비선형진동 해석모델

Nonlinear Vibration Model of Ball Bearing Waviness in a Rigid Rotor Supported by Multi-Row Ball Bearing Considering Five Degrees of Freedom

정 성 원* · 장 건 희**

Seong-Weon Jeong and Gunhee Jang

(2001년 2월 5일 접수 ; 2001년 3월 14일 심사완료)

Key Words : Ball Bearing(볼 베어링), Bearing Vibration(베어링 진동), Waviness, Hertzian Contact Theory(Hertz의 접촉이론)

ABSTRACT

This research presents a nonlinear model to analyze the ball bearing vibration due to the waviness in a rigid rotor supported by multi-row ball bearings. The waviness of a ball and each races is modeled by the superposition of sinusoidal function, and the position vectors of inner and outer groove radius center are defined with respect to the mass center of the rotor in order to consider five degrees of freedom of a general rotor-bearing system. The waviness of a ball bearing is introduced to these position vectors to use the Hertzian contact theory in order to calculate the elastic deflection and nonlinear contact force resulting from the waviness while the rotor has translational and angular motion. They can be determined by solving the nonlinear equations of motion with five degrees of freedom by using the Runge-Kutta-Fehlberg algorithm. Numerical results of this research are validated with those of prior researchers. The proposed model can calculate the translational displacement as well as the angular displacement of the rotor supported by the multi-row ball bearings with waviness. It also characterizes the vibration frequencies resulting from the various kinds of waviness in rolling elements, the harmonic frequencies resulting from the nonlinear load-deflection characteristics of ball bearing, and the sideband frequencies resulting from the waviness interaction.

1. 서 론

볼베어링은 정보저장기기, 절삭가공기계, 동력기계 등 다양한 회전기기를 지지하는 중요한 기계요소로서 널리 사용되고 있다. 그러나 최근의 회전기기는 복잡하고 정교한 구조를 가지게 됨에 따라, 볼베어링에 의해 발생하는 진동이 회전계의 성능을 저해하는 경우가 증가하여 이에 대한 관심이 커지고 있다. 가공정밀도를 저해하는 절삭기기의 베어링진동과 하드디스크 드라이브(HDD)의 정보저장밀도

를 저해하는 비반복적 진동 등은 그 대표적인 예이다. 볼베어링은 내륜, 외륜, 볼, 케이지(cage) 및 실(seal) 등으로 구성되어 있고, 각 구름요소들이 서로 접촉하여 강성을 발생하고 회전체를 지지하는 구조를 이룬다. 따라서, 각 구름요소의 형상이 진원(perfect circle)을 이루더라도, 작용하중의 불균형과 구름요소의 미세한 기하학적 불완전성(geometrical imperfections)은 접촉력에 의한 진동을 증가시킨다. 이러한 기하학적 불완전성을 waviness라고 부르며, 이에 의해 발생하는 진동에 관한 많은 연구결과가 보고된 바 있다.

볼베어링 단품에 대한 연구로서, Yhland⁽¹⁾는 볼 베어링의 waviness와 이에 의하여 발생하는 축방향 진동과 반경방향 진동과의 관계를 실험을 통해 연구하였으며, Wardle과 Poon⁽²⁾은 베어링 진동을 유발하는 볼의 개수와

* 한양대학교 정밀기계공학과 대학원

** 정회원, 한양대학교 정밀기계공학과

E-mail : ghjang@email.hanyang.ac.kr

Tel : (02) 2290-0431, Fax : (02) 2292-3406

waviness 차수와의 관계를 연구하여, 볼의 수와 waviness 차수가 일치할 경우 진동이 크게 발생한다고 발표하였다. 또한, Wardle^(3,4)은 이론적 모델을 통해 구름요소에 존재하는 waviness의 진폭과 그에 따라 발생하는 가진력과의 관계를 구하고, 이를 실험으로 증명하였으며, 접촉력의 비선형 효과에 의한 진동의 주파수 성분을 예측하였다. 그러나 이 모델은 다양한 waviness 차수가 중첩되어 존재하는 구름요소의 결합에 대한 응답과 회전계 전체의 거동에 대한 응답은 예측할 수 없다. 이상과 같은 연구들은 볼베어링 단품의 특성에 대한 연구이거나, 실험에 의한 현상적 규명에 대한 연구로서, 발생하는 진동주파수의 정량적, 정성적 특성을 회전계의 형상 및 경계조건의 변화에 따라 예측하기는 어렵다.

Waviness에 의한 진동을 회전계에 적용하기 위하여, Ylland⁽⁷⁾는 볼베어링 구름요소에 waviness가 존재하는 경우에 대해, 선형이론을 사용하여, 임의형상의 회전계에 적용할 수 있는 강성행렬을 구하였다. 그러나 이 모델은 회전계가 회전할 때, waviness를 포함하는 구름요소간의 상대편위를 고려할 수 없기 때문에 접촉력의 비선형 효과에 의한 진동의 진폭변화를 예측할 수 없는 단점이 있다. Alturk et al^(8,9)은 강체 축을 지지하는 볼 베어링이 waviness를 가지고 있는 경우에 대하여, 3자유도계 모델을 제안하고, 예압과 구름요소의 waviness에 따른 베어링진동을 해석하여 기존의 연구결과와 비교하였다. 그러나 이 모델은 베어링의 변형모델을 세우는 과정에서, 베어링 회전편향상의 위치벡터만을 고려하였기 때문에 모멘트와 각운동을 설명할 수가 없다.

본 연구에서는 Fig. 1과 같이, 2개 혹은 그 이상의 각접촉 볼베어링으로 지지된 5자유도 회전계에서 waviness에 의해 발생하는 베어링 진동을 해석하기 위한 비선형 모델을 제안하였다. 제안된 모델을 사용하여 병진운동에 따른

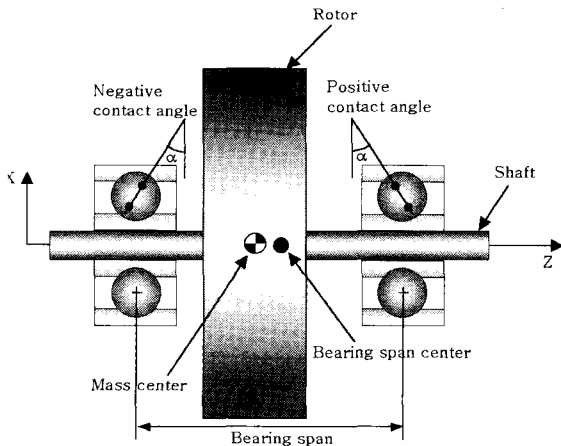


Fig. 1 Rigid rotor supported by a pair of ball bearings

진동뿐 아니라, 각운동에 의한 진동을 계산하였으며, 수치 해석결과를 기존의 연구결과와 비교하여 이론적 타당성을 검증하였다. 또한, 다양한 waviness차수가 구름요소에 동시에 존재하는 경우의 진동, 변형-접촉력의 비선형효과에 의한 조화진동성분, 그리고 waviness의 상호작용에 의해 발생하는 sideband주파수등 기존의 이론적 모델로 설명하기 어려웠던 진동특성을 해석하였다.

2. Waviness 모델

볼베어링의 구름요소 표면에 존재하는 기하학적 불완전성은 주기적인 형상의 waviness와 국소결함(localized defect)으로 나뉘어 진다. Waviness는 정현파함수로, 국소결함은 이 정현파 함수의 조합으로 표현할 수 있다. Fig. 2는 곡률반경중심의 궤적을 따라 형성된 내외륜의 waviness를 보여주고 있는데, j 번째 볼에 접촉하는 내외륜의 waviness는 다음과 같이 표현된다.⁽⁷⁾

$$p_{oj} = \sum_{l=1}^O A_{ol} \cos[-l(\omega_o - \omega_c)t + 2\pi l(j-1)/Z + \alpha_{ol}] \quad (1)$$

$$p_{ij} = \sum_{l=1}^O A_{il} \cos[-l(\omega_i - \omega_c)t + 2\pi l(j-1)/Z + \alpha_{il}] \quad (2)$$

$$q_{oj} = \sum_{l=1}^O B_{ol} \cos[-l(\omega_o - \omega_c)t + 2\pi l(j-1)/Z + \beta_{ol}] \quad (3)$$

$$q_{ij} = \sum_{l=1}^O B_{il} \cos[-l(\omega_i - \omega_c)t + 2\pi l(j-1)/Z + \beta_{il}] \quad (4)$$

여기서, p_{ij}, p_{oj} 는 내외륜의 반경방향waviness, p_{ij}, p_{oj} 는 내외륜의 축방향waviness, j 는 볼의 번호, l 은 waviness의 차수, $A_{ol}, A_{il}, B_{ol}, B_{il}$ 은 각 l 차 waviness의 진폭, $\alpha_{ol}, \alpha_{il}, \beta_{ol}, \beta_{il}$ 은 각 l 차 waviness의 초기위상각, Z 는 볼의 개수, $\omega_c, \omega_o, \omega_i$ 는 케이지, 외륜, 내륜의 회전속도를 의미한다.

Fig. 3은 j 번째 볼의 waviness를 표현한 것으로, 궤도륜과 볼에 존재하는 waviness진폭의 차이에 의해 계산되는데, 내륜에 접하는 볼waviness의 위상이 외륜과 접하는 볼 waviness보다 180° 앞서는 것을 고려하면 볼에 작용하는 waviness는 아래와 같이 정의할 수 있다.

$$u_j = \sum_{l=1}^O C_{jl} [\cos(l\omega_b t + \gamma_{jl}) + \cos\{l\omega_b(t + \frac{\pi}{\omega_b}) + \gamma_{jl}\}] \quad (5)$$

여기서, γ, ω_b, C_{jl} 는 볼 waviness의 초기위상각, 볼의 자전속도, 그리고 l 차 볼 waviness의 진폭을 각각 의미한다.

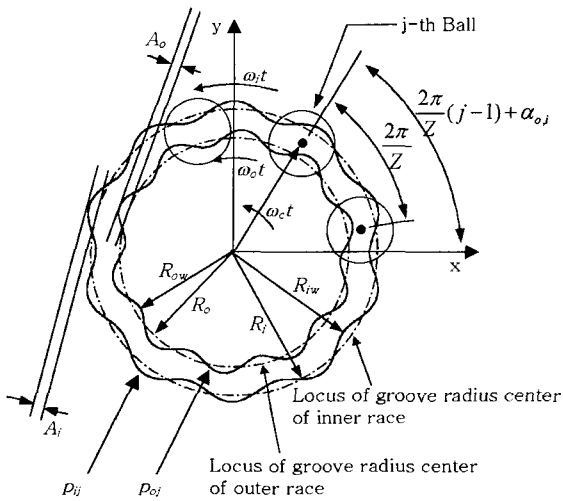


Fig. 2 Race waviness model

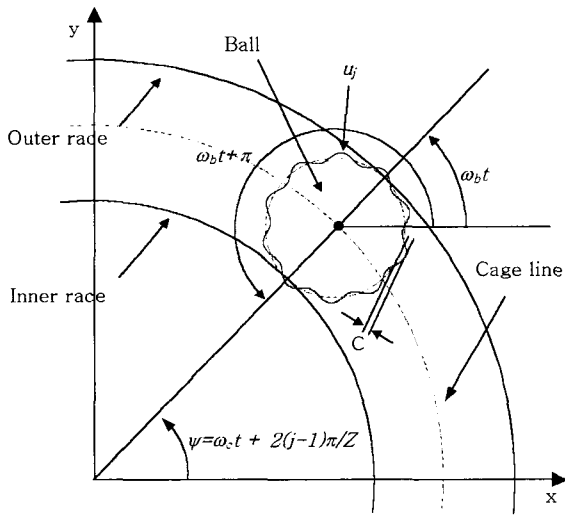


Fig. 3 Ball waviness model

3. 볼베어링의 탄성변형

회전체를 지지하는 다수의 볼베어링에서 발생하는 접촉력은 접촉각을 따라 작용하게 되며, 접촉각은 Fig. 1과 같이 양의 접촉각(positive contact angle)과 음의 접촉각(negative contact angle)으로 그 방향을 정의할 수 있다. 회전체의 운동방정식은 그 질량중심에 관하여 표현할 수 있으므로, 궤도륜에 대한 j 번째 볼이 위치한 내외륜 곡률반경중심의 위치벡터는 Fig. 4에서 다음과 같이 정의된다.

$$\vec{R}_j = R_i \cos \psi_j \vec{i} + R_i \sin \psi_j \vec{j} + a_i \vec{k} \quad (6)$$

$$\vec{R}_o = R_o \cos \psi_j \vec{i} + R_o \sin \psi_j \vec{j} + a_o \vec{k} \quad (7)$$

ψ_j 는 j 번째 볼의 $x-y$ 평면상 편향각으로서 다음과 같

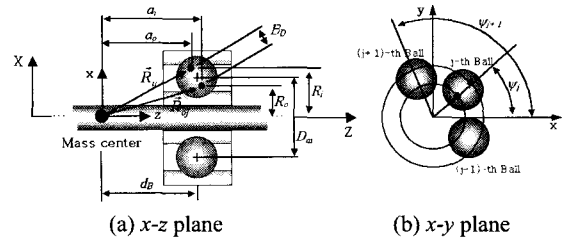


Fig. 4 Position vector of groove radius center

이 정의할 수 있다.

$$\psi_j = \omega_c t + \frac{2\pi}{Z}(j-1) \quad (8)$$

여기서, R_i, R_o, a_i, a_o 은 각 위치벡터의 반경방향성분과 축방향성분을 각각 나타내는데, 볼 베어링의 피치지름 D_m , 내외륜 곡률반경중심간 거리 B_D , 회전체의 질량중심과 볼의 중심간 거리 d_B , 그리고 접촉각 α 를 사용하면 아래와 같이 표현된다.

$$R_i = \frac{D_m}{2} + \frac{B_D}{2} \cos \alpha, \quad R_o = \frac{D_m}{2} - \frac{B_D}{2} \cos \alpha \quad (9)$$

$$a_i = d_B \mp \frac{B_D}{2} \sin \alpha, \quad a_o = d_B \pm \frac{B_D}{2} \sin \alpha \quad (10)$$

식 (10)의 위의 부호는 양의 접촉각, 아래의 부호는 음의 접촉각을 의미한다. 접촉각은 기하학적 적합조건과 힘 평형조건을 사용하여 유도된 비선형 방정식의 의해 쉽게 계산할 수 있다.⁽⁶⁾

내륜회전형 볼베어링의 경우, 외륜은 정지해 있고, 내륜이 각변위와 병진변위를 발생한다. 따라서, 내륜 곡률반경중심의 위치벡터를 각변위 θ_x, θ_y 와 병진변위 x, y, z 에 대하여, 오일러 각(Euler angle)을 사용하여 좌표변환하면, 구름요소간 발생하는 변형량을 구할 수 있다. $\sin \theta \approx \theta$ 라고 가정하여 θ_x, θ_y 에 대해 변환하고, 병진변위 x, y, z 를 적용하면, 식 (6)은 다음과 같이 변환된다.

$$\vec{R}_j = \begin{Bmatrix} R_i \cos \psi_j + \theta_y a_i + x \\ R_i \sin \psi_j - \theta_x a_i + y \\ -R_i \theta_y \cos \psi_j + R_i \theta_x \sin \psi_j + a_i + z \end{Bmatrix} \quad (11)$$

식 (1)~(4)에서 구한 waviness를 식 (11)에 적용하면, waviness 효과를 고려한 내외륜 곡률반경중심의 위치벡터가 다음과 같이 정의된다.

$$\vec{R}_{jw} = \begin{Bmatrix} (R_i + p_{ij}) \cos \psi_j + \theta_y (a_i + q_{ij}) + x \\ (R_i + p_{ij}) \sin \psi_j - \theta_x (a_i + q_{ij}) + y \\ -(R_i + p_{ij}) \theta_y \cos \psi_j + (R_i + p_{ij}) \theta_x \sin \psi_j + (a_i + q_{ij}) + z \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\vec{R}_{ojw} = \begin{Bmatrix} (R_o + p_{oj}) \cos \psi_j \\ (R_o + p_{oj}) \sin \psi_j \\ a_o + q_{oj} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

위 두 벡터의 차는 waviness를 고려한 임의 시간에 j 번째 볼의 위치에서 발생하는 내외륜의 곡률중심간 상대위치이며, 이를 반경방향과 축방향의 단위벡터를 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{\Delta} &= [(R_i - R_o + p_{ij} - p_{oj}) + (a_i + q_{ij})(\theta_y \cos \psi_j - \theta_x \sin \psi_j) \\ &\quad + x \cos \psi_j + y \sin \psi_j] \vec{e}_r \\ &\quad + [(R_i + p_{ij})(\theta_x \sin \psi_j - \theta_y \cos \psi_j) + (a_i - a_o + q_{ij} - q_{oj}) + z] \vec{k} \\ &= \Delta_{rj} \vec{e}_r + \Delta_{zj} \vec{k} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, \vec{e}_r, \vec{k} 는 각각 반경방향과 축방향의 단위벡터이며, 식 (14)를 사용하면, 임의시간에 j 번째 볼에 작용하는 접촉각을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\alpha_j = \tan^{-1} \frac{\Delta_{zj}}{\Delta_{rj}} \quad (15)$$

볼의 waviness, u_j 와 특정 볼의 지름이 크거나 작은 경우의 효과, h_j 를 고려하면, j 번째 볼이 위치한 지점에서, 케도륜과 볼간의 탄성변형량은 다음과 같다.

$$\delta_j = \delta_{ij} + \delta_{oj} = \sqrt{\Delta_r^2 + \Delta_z^2} - (B_D - h_j - u_j) \quad (16)$$

외륜이 회전하는 베어링의 경우는, 외륜의 위치벡터를 위와 동일한 방법으로 변환하여 탄성변형량을 구할 수 있다.

4. 접촉력과 운동방정식

Hertz의 접촉이론에 따르면, 각 볼과 케도륜과의 접촉력은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.⁽⁵⁾

$$f_j = K_j \delta_j^{1.5} \quad (17)$$

여기서, f_j, δ_j, K_j 는 각각 접촉력, 접촉점 간의 탄성변형, 그리고 접촉력 비례상수이며, K_j 는 각 케도륜과 볼의 접촉력 비례상수, k_i 와 k_o 의 직렬조합에 의해 다음과 같이 구해진다.

$$K_j = \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{k_i} \right)^{2/3} + \left(\frac{1}{k_o} \right)^{2/3}} \right]^{3/2} \quad (18)$$

여기서 k_i 와 k_o 는 Young's Modulus, Poisson Ratio, 그리고 접촉점의 곡률합등에 의해 계산된다.^(8,9)

접촉각을 따라 발생하는 접촉력은 식 (16)과 (17)에 의해 계산할 수 있는데, 임의의 개수의 볼베어링으로 지지된 일반적인 회전계는 5자유도를 가지므로, 발생하는 힘과 모멘트는 다음과 같이 x, y, z 성분과 x, y 성분으로 표현된다.

$$\begin{aligned} F_x &= \sum_{k=1}^{N_B} \left[\sum_{j=1}^Z f_{xj} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{N_B} \left[\sum_{j=1}^Z \left\{ \pm K_j \delta_j^{1.5} \frac{\Delta_{rj}}{\sqrt{\Delta_r^2 + \Delta_z^2}} \right\} \cos \psi_j \right] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} F_y &= \sum_{k=1}^{N_B} \left[\sum_{j=1}^Z f_{yj} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{N_B} \left[\sum_{j=1}^Z \left\{ \pm K_j \delta_j^{1.5} \frac{\Delta_{rj}}{\sqrt{\Delta_r^2 + \Delta_z^2}} \right\} \sin \psi_j \right] \end{aligned} \quad (20)$$

$$F_z = \sum_{k=1}^{N_B} \left[\sum_{j=1}^Z f_{zj} \right] = \sum_{k=1}^{N_B} \left[\sum_{j=1}^Z \left\{ \pm K_j \delta_j^{1.5} \frac{\Delta_{zj}}{\sqrt{\Delta_r^2 + \Delta_z^2}} \right\} \right] \quad (21)$$

$$M_x = \sum_{k=1}^{N_B} \left[\sum_{j=1}^Z \{ f_{zj} R_i \sin \psi_j - a_i f_{yj} \} \right] \quad (22)$$

$$M_y = - \sum_{k=1}^{N_B} \left[\sum_{j=1}^Z \{ f_{zj} R_i \cos \psi_j - a_i f_{xj} \} \right] \quad (23)$$

여기서, N_B 는 회전계를 지지하는 베어링의 개수를 의미한다. 식 (19)와 (20)에서 위 부호와 아래부호는 각각 내륜 회전형과 외륜회전형 베어링을 의미한다. 그리고, 식 (21)에서 위부호와 아래부호는 내륜회전형의 경우, 각각 양의 접촉각과 음의 접촉각을 의미하며, 외륜회전형의 경우, 각각 음의 접촉각과 양의 접촉각을 의미한다.

식 (19)~(23)에서 구한 접촉력과 모멘트를 사용하여 힘 및 모멘트 평형식을 적용하면, 운동방정식이 구해지고, 성분별로 나누어 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + F_x &= 0 \\ m\ddot{y} + F_y &= 0 \\ m\ddot{z} + F_z &= 0 \\ I_z \ddot{\theta}_x + I_r \Omega \dot{\theta}_x + M_x &= 0 \\ I_z \ddot{\theta}_y - I_r \Omega \dot{\theta}_y + M_y &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

여기서, I_r, I_z, Ω 는 각각 반경축 질량관성모멘트, 질량 극

관성 모멘트, 그리고 회전축의 회전각속도를 의미한다.

5. 결과 및 고찰

5.1 해석모델 및 계산과정

본 연구에서는 Fig. 1과 같이 한쌍의 볼베어링으로 지지된 강체 회전자에서 waviness에 의해 발생하는 베어링 진동을 계산하였다. 해석에 사용된 볼베어링은 내륜회전형이며, 좌측 베어링은 음의 접촉각을 가지고, 우측의 베어링은 양의 접촉각을 가진다. 그리고, 5.2와 5.3장의 계산에서는 회전자의 질량중심과 베어링의 스패(span)중심이 서로 일치한다고 가정하였다. Table 1과 2에서는 회전계와 볼베어링의 사양을 각각 나타내었다. 각 구름요소에 존재하는 waviness의 진폭은 0.5×10^{-6} m이며, 좌우 베어링에 존재하는 반경방향 waviness의 위상은 0° , 축방향 waviness의 위상은 180° 라고 가정하였다. 따라서, 좌우 베어링에서 발생하는 축방향 접촉력은 서로 상쇄된다. 내륜은 90 Hz로 회전한다고 가정하였고, 따라서 케이지의 회전속도, f_c 와 볼의 자전속도, f_b 는 각각 35.69 Hz와 193.83 Hz이다. 볼베어링의 waviness에 의한 비선형진동을 계산하기 위하여 먼저, 예압이 작용하지 않는 경우의 접촉각과 접촉력 비례상수를 구하고, 이를 사용하면, 예압에 의한 초기변형과 각 볼에서 발생하는 접촉력이 계산되는데, 이 값들은 waviness에 의한 베어링 진동을 계산하기 위한 초기값으로 사용된다. 각 시간간격에 대하여, 각 볼에 작용하는

waviness와 위치벡터가 계산이 되면, 위치벡터간의 상대변위에 의해 구름요소간의 탄성변형량과 접촉각이 계산된다. 회전계에 작용하는 접촉력과 모멘트는 위에서 구한 값을 사용하여 Hertz의 접촉이론에 의해 구해진다. Runge-Kutta-Fehlberg방법에 의해 회전계의 운동방정식의 해를 구하였는데, 초기 시간간격과 최대 허용오차는 각각 1×10^{-10} sec와 10^{-5} % 로 두었다. 임의의 작은 감쇠(이론적 강성계수의 약 10^{-5})를 추가하여, 고유진동수에서 해의 발산을 방지하였다.⁽¹⁰⁾ 접촉력과 변위에 대한 가변시간영역 계산결과를 선형보간 하여, 주파수 변환하고 그 결과를 고찰하였다.

5.2 Waviness에 의한 진동의 기본주파수 및 조화성분

Table 3은 waviness의 차수에 따라 발생하는 축방향 및 반경방향 진동의 주파수를 나타낸 것으로서, 기존의 연구^(3,4,7)에서 제시된 결과이다. 내륜과 외륜에 존재하는 waviness는 그 차수가 볼의 개수의 정수배인 경우($l = iZ$)는 축방향의 진동만 발생시키고, waviness의 차수가 $l = iZ \pm 1$ 인 경우는 반경방향의 진동만 발생시키며, 볼 waviness는 그 차수가 짝수인 경우에 반경방향과 축방향 모두 진동을 발생시킨다는 것을 알 수 있다. 그리고 Wardle⁽³⁾은 탄성변형과 접촉력간의 비선형 특성에 의해 기본주파수의 조화성분이 발생할 수 있다는 결과를 제시한 바 있다.

Fig. 5와 6은 볼 waviness차수가 2인 경우, 좌측베어링에서 발생하는 축방향 및 반경방향 접촉력을 나타낸 것으로, 전체 회전계에 미치는 축방향 접촉력은 축방향 waviness의 위상차가 180° 이므로, 접촉력이 서로 상쇄되어 발생하지 않고, 반경방향 접촉력의 기본주파수 성분 ($2f_b \pm f_c = 351.71, 423.43$ Hz)과 축방향 접촉력의 기본주파수 성분 ($2f_b = 387.57$ Hz)을 발견할 수 있다. 그리고,

Table 1 Specification of spindle system

Radial mass moment of inertia, I_r	3.985310^{-5} [kg·m ²]
Polar mass moment of inertia, I_z	7.533910^{-5} [kg·m ²]
Mass, M	8.67310^{-2} [kg]
Bearing span	8.510^{-3} [m]
Number of bearing	2

Table 2 Specification of ball bearing

Number of ball, Z	8
Ball diameter, D	2.010^{-3} [m]
Pitch diameter, D_m	9.010^{-3} [m]
Preload, Fa	11.75 [N]
Groove radius of outer race, r_o	1.0810^{-3} [m]
Groove radius of inner race, r_i	1.0810^{-3} [m]
Diametral clearance, Pd	2.010^{-5} [m]

Table 3 Principal vibration frequencies from the waviness of the rolling elements⁽⁷⁾ ($i \geq 1$: integer, Z: number of ball, f : shaft rotating frequency, f_c : cage rotating frequency, f_b : ball spinning frequency)

Type of waviness	Waviness order	Principal frequencies[Hz]	Type of motion
Outer race	$l = iZ$	$iZ f_c$	Axial
	$l = iZ \pm 1$	$iZ f_c$	Radial
Inner race	$l = 1$	f	Radial
	$l = iZ$	$iZ (f \pm f_c)$	Axial
	$l = iZ \pm 1$	$iZ (f \pm f_c) \pm f$	Radial
Ball	Oversize	f_c	Radial
	$l = 2i$	$2i f_b$	Axial
	$l = 2i$	$2i f_b \pm f_c$	Radial

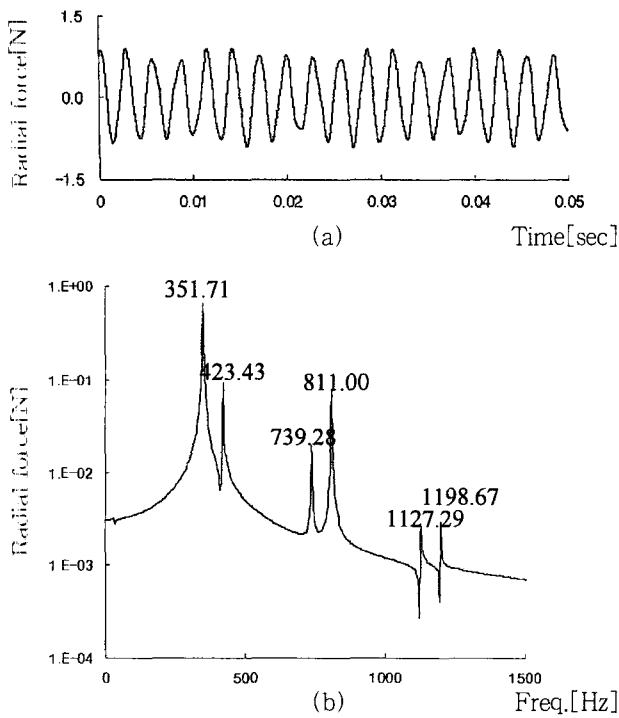


Fig. 5 Principal frequencies and the harmonics of the radial contact force at the left bearing (ball waviness order = 2)

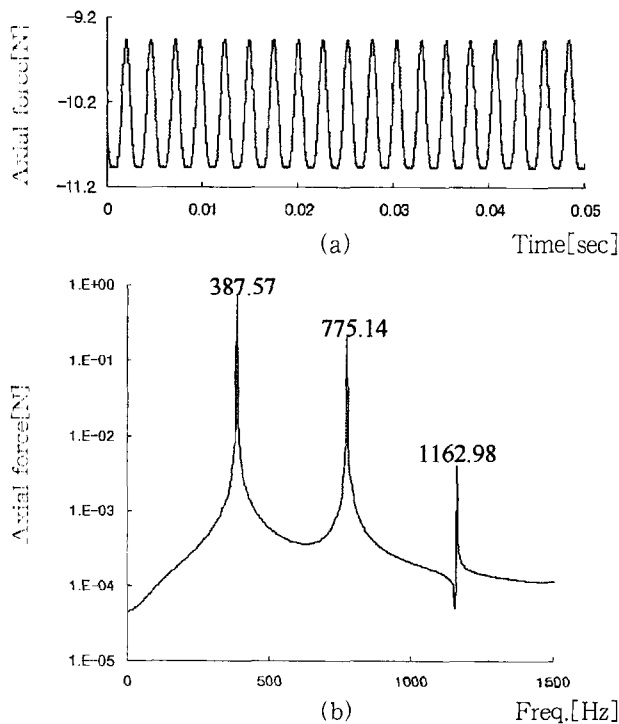


Fig. 6 Principal frequencies and the harmonics of the axial contact force at the left bearing (ball waviness order = 2)

Table 4 Comparison of the principal vibration frequencies from ball waviness

Ball waviness Order	Axial vibration frequencies[Hz]		Radial vibration frequencies[Hz]	
	Proposed model	Yhlands model	Proposed model	Yhlands model
Oversize	-	-	35.76	35.69
2	387.57	387.66	351.71 423.43	351.97 423.35
4	775.14	775.32	739.28 811.00	739.63 811.01

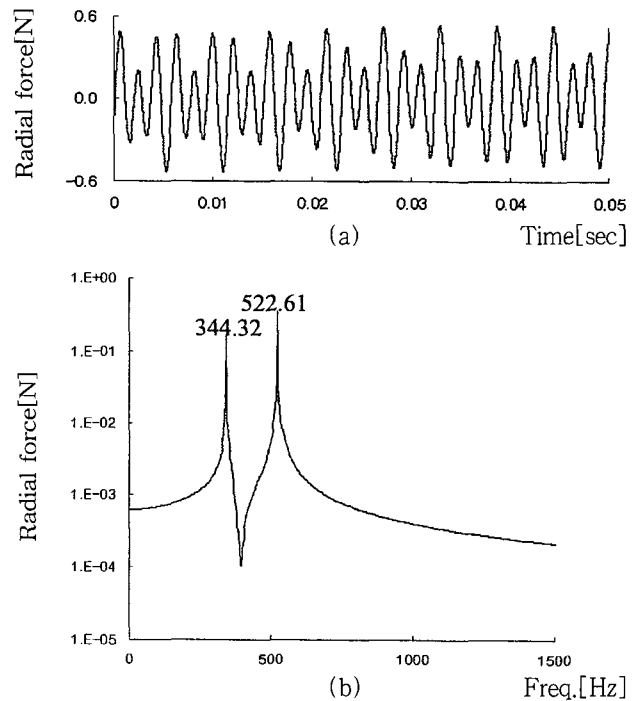


Fig. 7 Principal frequencies of the radial contact force at the left bearing (inner race waviness order = 7, 9)

탄성변형과 접촉력간의 비선형 효과에 의한 반경방향 진동의 조화성분(739.28, 811.00, 1127.29, 1198.67 Hz)과 축방향 진동의 조화성분(775.14, 1162.98 Hz)이 발견된다. 볼의 waviness 차수가 4인 경우와 특정 볼의 지름이 크기가 다른 경우에 대해서도 계산을 수행하여 그 결과를 Table 4에 나타내었다. 기존의 연구결과와 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다.

Fig. 7은 내륜에 차수 7과 9의 waviness가 동시에 존재할 때, 좌측베어링에서 발생하는 반경방향 접촉력을 나타낸 것이다. Table 3에서 예측한 반경방향 접촉력의 기본주파수 성분 ($Z(f-f_0) \pm = 344.32, 522.61$ Hz)이 발견되었으나, 그 조화성분은 나타나지 않는다. Fig. 8은 내륜의

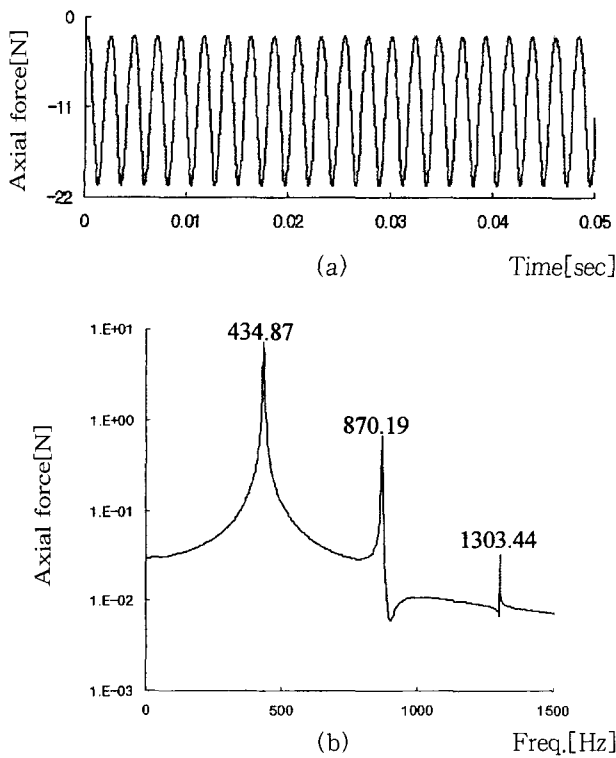


Fig. 8 Principal frequencies and the harmonics of the axial contact force at the left bearing (inner race waviness order = 8)

Table 5 Comparison of the principal vibration frequencies from outer race waviness

Outer race waviness order	Axial vibration frequencies [Hz]		Radial vibration frequencies [Hz]	
	Proposed model	Yhlands model	Proposed model	Yhlands model
7	-	-	286.10	285.52
8	286.10	285.52	-	-
9	-	-	286.10	285.52
15	-	-	571.25	571.04
16	571.25	571.04	-	-
17	-	-	571.25	571.04

waviness차수가 8인 경우에 좌측 베어링에서 발생하는 축방향 접촉력을 나타낸 것이다. 기본주파수 성분 ($Z(f-f_c)$) = 434.87 Hz)과 그 조화성분(870.19, 1303.44 Hz)이 발견된다. 내륜과 외륜에 여러가지 waviness차수가 존재하는 경우에 대하여 해석을 수행하고 그 결과를 Table 5와 6에 나타내었다. 기존의 연구결과와 정확히 일치하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 8의 축방향과는 달리, Fig. 7의 반경방향으로 작용하는 접촉력의 경우는 비선형 특성에 의한 조화성분이 나타나지 않고 있다. 이런 현상은 차수가 7과 9인 waviness가 단독으로 내륜에 존재하는 경우에도 동일하게 발생한

Table 6 Comparison of the principal vibration frequencies from inner race waviness

Inner race waviness order	Axial vibration frequencies [Hz]		Radial vibration frequencies [Hz]	
	Proposed model	Yhlands model	Proposed model	Yhlands model
7	-	-	344.32	344.48
8	434.87	434.48	-	-
9	-	-	522.61	524.48
15	-	-	780.23	778.96
16	870.19	868.96	-	-
17	-	-	960.23	958.96

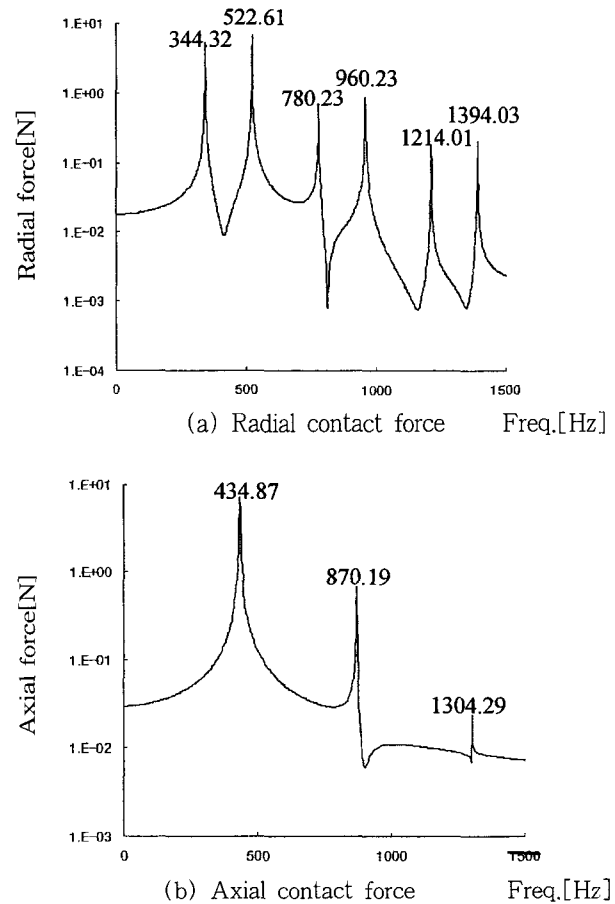


Fig. 9 Principal frequencies and the harmonics of the contact force at the left bearing (inner waviness order = 7,8,9)

다. 축방향으로 발생하는 접촉력은 waviness에 의한 탄성 변형과 예압에 의한 탄성변형이 더해진 변형량에 의해 발생하기 때문에 Fig. 7과 8에서 볼 수 있는 바와 같이 축방향 접촉력의 크기와 변화량이 반경방향에 비하여 매우 크게 발생한다. 반면, 반경방향의 탄성변형은 예압에 의한 초기변형을 포함하지 않으므로 탄성변형-접촉력간 특성이 선형영역에 있기 때문에, 조화성분이 발생하지 않는다.

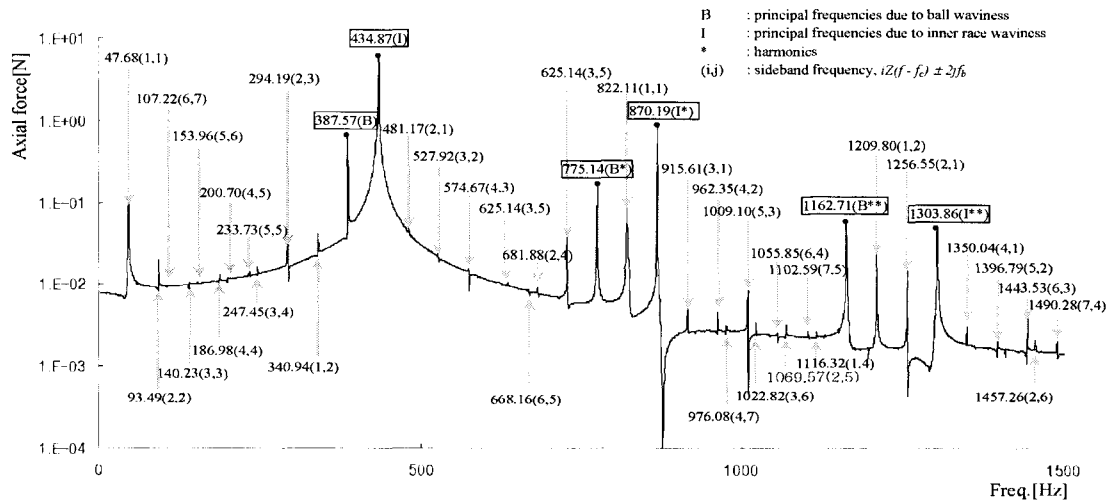
Fig. 9는 7, 8, 9 차수의 waviness가 내륜에 동시에 존재

하는 경우, 좌측베어링에서 발생하는 반경방향 및 축방향 접촉력을 계산한 결과이다. Fig. 9(a)에서는 waviness차수 7과 9에 의한 반경방향 진동성분 $(Z(f-f_c) - f) : 344.48 \text{ Hz}$, $Z(f-f_c) + f : 522.61 \text{ Hz}$ 과 Fig. 7에서 나타나지 않았던 344.48, 522.61 Hz의 조화성분(780.24, 1214.01, 960.23, 1394.03 Hz)이 나타나는 것을 볼 수 있고, Fig. 9(b)에서는 waviness차수 8에 의한 축방향 진동성분 $(Z(f-f_c) : 434.87 \text{ Hz})$ 과 그 조화성분(870.19, 1304.29 Hz)이 관찰된다. Fig. 7과 Fig. 9의 결과를 비교해 보면, 반경방향 진동을 유발하는 waviness만 내륜에 존재하는 경우 비선형 효과에 의한 조화성분이 발생하지 않았지만, 축방향 진동을 유발하는 waviness의 차수가 구름요소에 동시에 존재할 경우, 반경방향 진동의 조화성분이 발생함을 알 수 있다. 이 결과로부터,

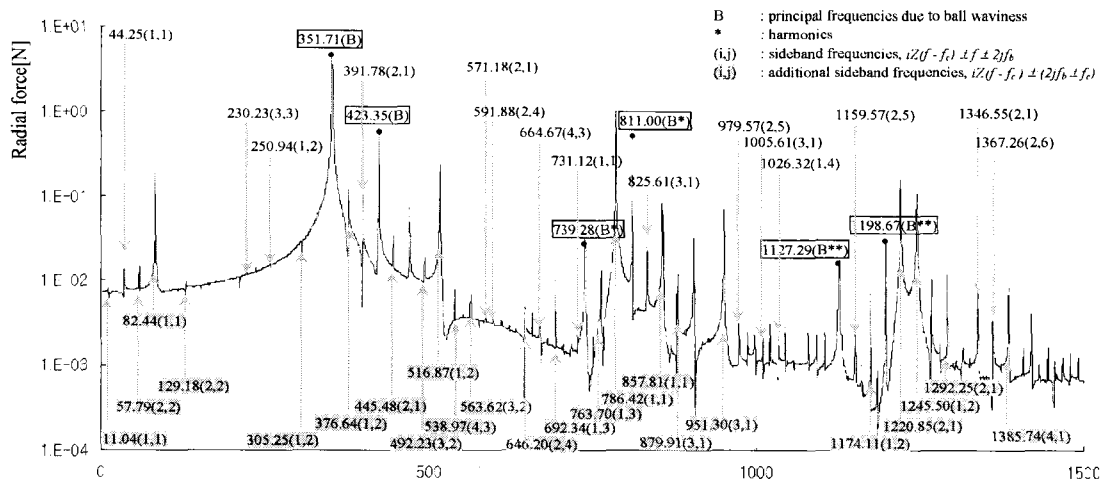
축방향 및 반경방향 진동을 유발하는 waviness차수가 공존할 경우, 축방향 진동을 유발하는 waviness차수가 반경방향 진동의 비선형성을 증가시켜 조화성분을 유발함을 알 수 있다. 이런 현상은 외륜과 볼의 경우에 대해서도 동일한 결과를 얻을 수 있었다.

5.3 구름요소간 Waviness의 상호작용에 의한 진동의 Sideband주파수

Waviness가 존재하는 구름요소간의 상호작용은 탄성변형과 접촉력간의 비선형성을 유발하고, 이 효과에 의해 기본주파수의 sideband성분이 발생하게 된다. 이는 기존의 연구⁽³⁾에서 볼베어링 단품의 이론적 모델을 통해 연구된 바 있다. Table 7은 기존의 연구에서 밝힌 기본주파수에 대한 sideband성분을 나타낸 것이다. Fig. 10은 내륜



(a) Axial contact force



(b) Radial contact force

Fig. 10 Principal frequencies, harmonics and sideband frequencies of the contact force at the left bearing (inner race waviness order=8, ball waviness order=2)

waviness의 차수가 8, 볼 waviness의 차수가 2인 경우, 좌측베어링에서 발생하는 진동의 축방향 및 반경방향 접촉력을 나타낸 것이다. 여기서 B는 볼 waviness에 의한 진동 주파수, I는 내륜 waviness에 의한 진동주파수, *는 조화 성분, 그리고 (i, j)는 sideband주파수 성분을 의미한다.

Fig. 10(a)는 접촉력의 축방향 성분을 나타낸 것으로서, 내륜 waviness차수가 8인 경우 축방향 기본주파수성분 ($iZ(f-f_c)$: 434.87 Hz)과 조화성분(870.19, 1303.86 Hz.), 그리고 볼 waviness차수가 2인 경우의 축방향 기본주파수 성분 ($2jf_b$: 387.57 Hz)과 그 조화성분(775.32, 1162.71 Hz)이 관찰된다. 나머지 주파수 성분들은 두 구름요소의 waviness간 상호작용에 의한 sideband주파수이며, Table 7의 수식 ($iZ(f-f_c) \pm 2jf_b$)으로 부터 대부분의 주파수 성분을 계산하여 확인할 수 있다. 주요 주파수 성분을 표기하였으며, 기존 연구결과와 정확히 일치하고 있다.

Fig. 10(b)는 접촉력의 반경방향 진동성분을 계산한 결과이다. 내륜 waviness의 차수가 8인 경우, 반경방향 진동은 발생하지 않으므로, 볼 waviness가 2인 경우 발생하는 진동의 기본 주파수성분 ($Z(f_b \pm f_c)$: 351.71, 423.43 Hz)과 그 조화성분(739.28, 811.00, 1127.29, 1198.67 Hz)이 발견된다. 그리고 Table 7의 수식 ($iZ(f-f_c) \pm f \pm 2jf_b$)으로 부

터 계산되는, waviness상호작용에 의한 많은 수의 sideband주파수가 발견되며, 주요주파수를 표기하였다. 그러나 이들 주파수 성분 이외에도, Table 7의 수식으로는 설명할 수 없는 많은 성분들이 발견이 되는데, 회색상자로 표기하여 구별하였다. 이 성분들은 내륜 waviness 차수가 iZ 인 경우, 축방향으로 발생하는 진동 ($iZ(f-f_c)$)과 그 조화성분이 볼 waviness차수가 $2j$ 인 경우 발생하는 반경방향 진동 ($(2jf_b \pm f_c)$)과 상호작용하여 발생하는 진동으로 판단되며, $iZ(f-f_c) \pm (2jf_b \pm f_c)$ 로 표현되는 식에 따라 발생한다. 이는 Table 3에서 제시한 기본주파수 성분의 조합으로부터 구할 수 있다. 반경방향과 축방향의 waviness가 서로 상호작용을 하는 여러가지 경우에 대해서도 이러한 현상이 발생하는 것을 확인하였으며, Table 8에 그 결과를 정리하였다. 이 결과로부터, sideband주파수는, 동일방향의 waviness간 상호작용뿐 아니라, 축방향과 반경방향 진동의 상호작용에 의해서도 발생할 수 있음을 알 수 있다.

5.4 회전체의 각운동에 의한 베어링진동

대부분의 회전체는 베어링의 스펙중심과 회전체의 질량 중심이 일치하지 않기 때문에, 두 베어링에서 발생하는 반경방향 진동의 크기와 방향이 달라져서 모멘트에 의한 각

Table 7 Sideband frequencies from the waviness interaction between the rolling elements⁽³⁾

Interacting surfaces	Sideband frequencies[Hz]	
	Axial vibration	Radial Vibration
Outer race Ball oversize	$i Z f_c \pm j f_c$	$i Z f_c \pm j f_c$
Outer race Ball	$i Z f_c \pm j 2 f_b$	$i Z f_c \pm j 2 f_b$
Outer race Inner race	$i Z f_c \pm j f$	$i Z f_c \pm i f$
Inner race Ball oversize	$i Z (f-f_c) + j f_c$	$i Z (f-f_c) \pm f \pm j f_c$
Inner race Ball	$i Z (f-f_c) \pm 2 j f_b$	$i Z (f-f_c) \pm f \pm 2 j f_b$

Table 8 Radial sideband frequencies from the waviness interactions between the waviness of axial and radial vibration

Interacting surfaces	Waviness order	Radial sideband frequencies
Outer race Ball	$l = i Z$ $l = 2 i$	$i Z f_c \pm 2 j f_b \pm f_c$
Outer race Inner race	$l = i Z$ $l = i Z \pm 1$	$i Z f_c \pm j Z (f-f_c) \pm f$
Outer race Inner race	$l = i Z \pm 1$ $l = i Z$	$i Z f_c \pm j Z (f-f_c)$
Inner race Ball oversize	$l = i Z$ l	$i Z (f-f_c) \pm j f_c$
Inner race Ball	$l = i Z$ $l = 2 i$	$i Z (f-f_c) \pm 2 j f_b \pm f_c$

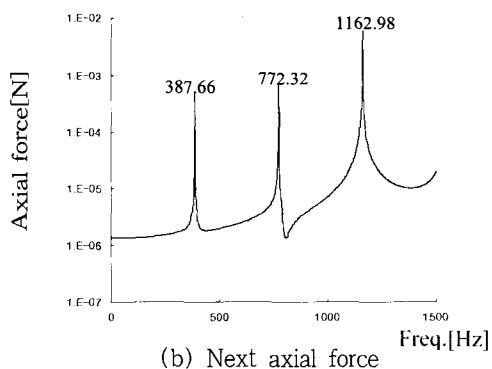
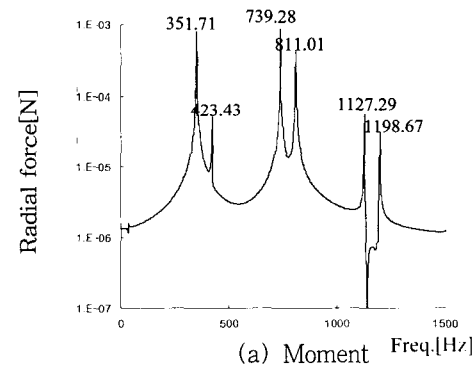


Fig. 11 Principal frequencies and the harmonics of moment and net axial forces (ball waviness order=2, distance between mass center and bearing span center=2mm)

변위가 발생하게 된다. 그리고 축방향의 접촉력이 서로 상쇄되지 않고 축방향 변위가 발생하는데, 이는 두 베어링의 접촉각이 일치하지 않게 되어 축방향 접촉력과 반경방향 접촉력이 모두 평형을 이루지 못해서 발생하게 된다. 따라서, 일반적인 회전계를 지지하는 베어링에서 발생하는 진동을 고찰하기 위해서는 각운동을 고려하여 모델링 하여야 한다. 본 연구에서는 베어링의 스핀중심과 회전계의 질량중심이 2 mm의 차이를 가지는 경우에 대하여 각변위와 모멘트를 계산하고 그 결과에 대하여 고찰하였다.

Fig. 11은 볼 waviness의 차수가 2인 경우, 두 베어링에서 발생하는 축방향 접촉력의 합과 모멘트를 나타낸 것이다. Fig. 11(a)의 모멘트는 Fig. 5에서 구한 반경방향 주파수 성분과 동일하나, 조화성분의 진폭이 상대적으로 매우 크게 나타나고 있다.

그리고 Fig. 11(b)에서는, 상쇄되어 나타나지 않았던 축방향 접촉력 성분이 발견되며, 그 조화성분의 진폭 또한 매우 크게 나타난다. 따라서, 모멘트에 의해 발생하는 각변위는 축방향 진동을 유발하고, 접촉력의 비선형성을 증가시킬 수 있다.

6. 결 론

(1) 구름요소에 waviness가 존재하는 임의개수의 볼베어링으로 지지된 5자유도 회전계에서 발생하는 베어링 진동을 해석할 수 있는 비선형 모델을 제시하였다.

(2) 제시된 모델은 회전체의 병진변위에 의해 발생하는 진동뿐 아니라, 임의개수의 볼베어링으로 지지된 일반적인 회전계에서 발생하는 각변위에 의한 진동을 해석할 수 있다.

(3) 제시된 모델은 베어링진동의 기본주파수 성분, 탄성 변형과 접촉력 간의 비선형특성에 의해 발생하는 조화성분, 그리고 waviness간의 상호작용에 의한 sideband 주파수 성분의 예측이 가능하며, 기존연구에 의한 결과와 비교하여 이론적 타당성을 확인하였다.

(4) 반대방향의 접촉각을 가지는 두개의 볼베어링으로 지지된 회전계에 대하여 해석한 결과, 다음의 결론을 얻을 수 있다.

- 축방향 및 반경방향 진동을 유발하는 waviness차수가 공존할 경우, 축방향 진동을 유발하는 waviness는 반경방향진동의 비선형성을 증가시켜 반경방향진동의 조화성분을 유발한다.
- 반경방향 진동의 sideband주파수는 반경방향 waviness의 상호작용뿐 아니라, 축방향과 반경방향 waviness의 상호작용에 의해서도 발생한다.
- 회전계의 질량중심과 볼베어링의 스핀중심이 일치하지 않을 경우, 모멘트에 의한 각변위와 축방향 진동이 발생하며, 모멘트에 의해 발생하는 각변위는 축방향 접촉력의 비선형성을 증가시켜 조화성분의 진폭을 증가

시킨다.

(5) 본 연구에서 제시한 모델은 회전계의 내부가진에 의한 강제진동해석 및 회전계의 다양한 설계변수의 변화에 따른 응답을 예측하는데 기여할 것으로 기대된다.

후 기

본 논문은 2000년 한양대학교 교내연구비 지원에 의한 결과입니다. 이에 관계자 여러분께 감사 드립니다.

참 고 문 헌

- (1) Yhland,E.M., 1967, "Waviness Measurement-An Instrument for Quality Control in Rolling Bearing Industry", Proc. IMechE, Vol. 182, Part 3K, pp. 438~445.
- (2) Wardle,F.P., and Poon, S.Y., 1983, "Rolling Bearings Noise, Cause and Cure", Chart. Mech. Engineering, July/Aug, pp. 36~40.
- (3) Wardle,F.P., 1988a, "Vibration Forces Produced by Waviness of the Rolling Surfaces of Thrust Loaded Ball Bearing, Part 1 : Theory", Proc. IMechE, Vol. 202, No. C5, pp. 305~312.
- (4) Wardle,F.P., 1988b, "Vibration Forces Produced by Waviness of the Rolling Surfaces of Thrust Loaded Ball Bearing, Part 2 : Experimental Validation", Proc. IMechE, Vol. 202, No. C5, pp. 313~319.
- (5) Harris,T.A., 1991, Rolling Bearing Analysis,3rd Ed., John Wiley & Sons, INC.
- (6) Jones,A.B.,1960, "A General Theory of Elasticity Constrained Ball and Radial Roller Bearings under Arbitrary Load and Speed Conditions", ASME J. Basic Eng., Vol. 82, pp. 309~320.
- (7) Yhland,E., 1992, "A Linear Theory of Vibrations Caused by Ball Bearings with Form Errors Operating at Moderate Speed", ASME, J. of Tribology, Apr. Vol. 114, pp. 348~359.
- (8) Aktürk,N., UneeB,M., and Gohar,R., 1997, "The Effects of Number of Balls and Preload on Vibrations Associated with Ball Bearings", ASME, J. of Tribology, Oct, Vol. 119, pp. 747~753.
- (9) Aktürk,N., 1999, "The Effect of Waviness on Vibrations Associated with Ball Bearings", ASME, J. of Tribology, Oct, Vol. 121, pp. 667~677.
- (10) Krämer,E., 1993, Dynamics of Rotors and Foundations , Springer-Verlag.