

〈논 문〉

축방향 왕복운동을 하는 집중질량을 가진 외팔보의 동적 안정성 해석

Dynamic Stability Analysis of an Axially Oscillating Cantilever Beam with a Concentrated Mass

현 상 학* · 유 흥 회**

Sang-Hak Hyun and Hong-Hee Yoo

(2000년 9월 2일 접수 : 2000년 11월 10일 심사완료)

Key Words : Dynamic Stability(동적 안정성), Cantilever Beam(외팔보), Concentrated Mass(집중질량), Multiple Time Scales Method(다중시간척도법), Parametric Resonance(매개변수 공진)

ABSTRACT

The effect of a concentrated mass on the regions of dynamic instability of an axially oscillating cantilever beam is investigated in this paper. The equations of motion are derived using Kane's method and the assumed mode method. It is found that the bending stiffness is harmonically varied by axial inertia forces due to oscillating motion. Under the certain conditions between oscillating frequency and the natural frequencies, dynamic instability may occur and the magnitude of the bending vibration increase without bound. By using the multiple time scales method, the regions of dynamic instability are obtained. The regions of dynamic instability are found to be depend on the magnitude of a concentrated mass or its location.

1. 서 론

보 구조물이 축 방향 왕복 운동을 하는 경우, 축 방향 관성력에 의해 구조물의 강성은 주기적으로 변하게 된다. 이러한 주기적 강성 변화 현상은 보 구조물에 축 방향 맥동력이 가해지는 경우에서도 나타난다. 이러한 시스템에서 강성 변화의 주기와 고유진동수 사이에 어떤 조건이 성립 되면 시스템은 불안정하게 되어, 비록 아주 작은 크기로 발생한 굽힘 진동이라도 시간이 지날수록 그 크기는 매우 커지게 된다. 이를 가리켜 매개변수 공진(parametric resonance)이라 하며, 외부 가진의 진동수가 고유진동수와 일치할 때 발생하는 강제 공진 현상과 구별한다. 매개변수 공진이 발생하는 영역은 외부 강제 공진에 비해 더 넓게 나타나기 때문에 이에 대한 연구는 매우 중요하다 하겠다.

주기적 강성 변화 구조물에 대한 동적 안정성 연구들은 꾸준히 진행되어 왔다. 종방향 맥동력이 작용하는 보 구조물에 대한 연구로서, 1964년 Bolotin에⁽¹⁾ 의하여 안정성 해석방법 및 결과가 제시되었으며, Iwatsubo 등은⁽²⁾ 보 구조물에서의 매개변수 공진에 관한 실험과 해석 결과를 제시하였다. Kounadis와 Belbas는⁽³⁾ 집중질량이 부착되고 단순 지지된 보 구조물에 대하여 동적 안정성을 해석하였다. 최근에는 축 방향 운동을 하는 보 구조물에 대한 연구가 등장하기 시작했는데 Beal과 Scott은⁽⁴⁾ Quick Return Mechanism에서 유연한 링크에 관하여, Tan 등은⁽⁵⁾ 회전 운동하는 외팔보에서 지지단이 왕복하는 경우에 관하여, Kim과 Choo는⁽⁶⁾ 맥동력을 받아 움직이는 보 구조물에 관하여 안정성 해석을 하였다.

본 논문에서는 축 방향 왕복 운동하는 외팔보에서 집중 질량 효과가 동적 안정성에 미치는 영향을 고찰하고자 한다. 집중질량이 없는 경우에 대한 안정성 해석은 참고문헌(7)에서 이미 이루어졌다. 이 연구에서 축 방향 왕복 운동으로 인해 보 구조물의 동적 불안정성이 나타남을 규명하고, 왕복운동의 크기 및 진동수의 변화에 따른 동적 안정성 도표를 제시하였다. 본 논문은 이러한 연구의 연장으로

* 한양대학교 공과대학 기계설계학과

** 정회원, 한양대학교 공과대학 기계설계학과

E-mail : yhh@hydyn.hanyang.co.kr

Tel : (02)2290-0446, Fax : (02)2296-1710

집중질량 효과에 의한 동적 안정성의 변화를 살펴보고자 한다. 이를 위해, 먼저 운동방정식을 Kane 등이 제시한 복합변형변수법을 사용하여 유도하고^(8, 9), 운동방정식에 대한 안정성 해석은 다중시간적도법을^(10, 11) 이용하여 수행한다. 집중질량의 부착위치 및 크기의 변화에 따른 다양한 안정성 해석결과들을 도출하며, 이 결과들과 집중질량이 없는 기존 해석결과를 서로 비교 분석하여 동적 안정성의 변화를 파악한다. 본 연구에서 제시한 해석결과들은 설계시 기초자료가 될 뿐만 아니라 이와 유사한 연구의 참고자료로 사용될 수 있다고 사료된다.

2. 운동 방정식

본 연구에서는 2차원 평면 운동하는 보를 해석대상으로 정하였다. Fig. 1은 변형된 외팔보의 모습을 보여준다. 외팔보는 강체 A에 부착되어 있고, 강체 A는 외팔보의 축 방향으로 왕복 운동을 한다. 강체 A의 운동은 고정단 점 O의 가속도로 표현되며, a^O 와 Ω 는 각각 왕복 가속도의 진폭과 주파수를 나타낸다. \hat{a}_1 과 \hat{a}_2 는 서로 수직이면서 강체 A에 고정된 단위벡터들이다. x 는 변형 전 외팔보에서 점 O와 중립축상의 대표점 P_0 사이의 길이를 나타낸다. \vec{u} 는 대표점 P_0 가 P로 변형될 때의 탄성 변형 벡터이며 u_1 과 u_2 는 각각 \hat{a}_1 과 \hat{a}_2 방향 위치를 나타낸다. s 는 점 O로부터 대표점 P까지 중립축을 따라 인장된 길이를 나타낸다. M 은 집중질량의 크기를 나타내며, x_M 은 고정단에서 집중질량의 부착된 위치까지의 길이를 나타낸다.

Kane 방법을 사용하여 구한 운동방정식의 형태는 다음과 같다(참고문헌 (12) 참조).

$$F_r^* + F_r = 0 \quad (r=1, 2, \dots, \mu) \quad (1)$$

여기서 F_r^* 와 F_r 는 각각 일반관성력과 일반작용력을 나타내며, μ 는 일반좌표의 개수를 의미한다. 집중질량을 가

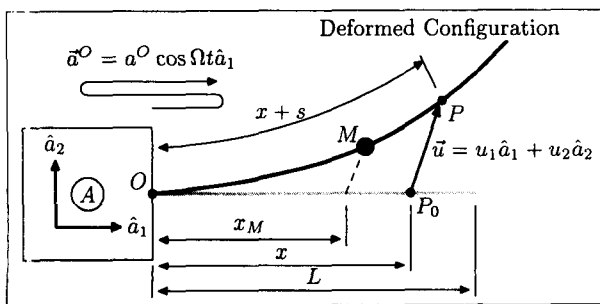


Fig. 1 Configuration of an axially oscillating cantilever beam with a concentrated mass

진 보의 일반관성력은 다음 식에 의해 구한다.

$$F_r^* = - \int_0^L \{m + M\delta(x - x_M)\} \vec{a}^P \cdot \frac{\partial \vec{v}^P}{\partial q_r} dx \quad (r=1, 2, \dots, \mu) \quad (2)$$

여기서 \vec{v}^P 와 \vec{a}^P 는 임의점 P의 속도와 가속도를 나타내고, q_r 은 일반속력을 나타낸다. m 과 L 은 외팔보의 단위길이당 질량과 전체 길이를 나타낸다. $\delta(x - x_M)$ 는 집중질량 효과를 나타내기 위해 사용한 충격함수이다. 점 P의 속도와 가속도는 다음과 같다.

$$\vec{v}^P = (v^O \sin \Omega t + \dot{u}_1) \hat{a}_1 + \dot{u}_2 \hat{a}_2 \quad (3)$$

$$\vec{a}^P = (a^O \cos \Omega t + \ddot{u}_1) \hat{a}_1 + \ddot{u}_2 \hat{a}_2 \quad (4)$$

여기서 v^O 는 왕복운동 속도의 진폭을 나타내는데 가속도의 진폭과는 $v^O = -\frac{a^O}{\Omega}$ 의 관계를 갖는다. 보에 작용하는 외력이 없으므로 일반작용력은 다음 식에 의해 구해진다..

$$F_r = - \frac{\partial U}{\partial q_r} \quad (r=1, 2, \dots, \mu) \quad (5)$$

여기서 U 는 탄성에너지를 나타내는데 비틀림과 전단변형 효과 등을 무시하고 인장과 굽힘 변형만을 고려하면 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left[EH \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + EK \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (6)$$

여기서 E 는 영의 계수, H 는 단면적, 그리고 I 는 2차면적모멘트를 나타낸다.

다음은 본 논문에서 사용하는 모델링 방법에서 전통적 모델링 방법과 다른 과정으로 복합변형변수 s 를 근사화하는 과정이다. 전통적 모델링 방법에서는 u_1 과 u_2 를 가상 모드법에 의해 근사화 하지만, 본 논문에서 사용한 모델링 방법에서는 아래처럼 s 와 u_2 를 근사화 한다.

$$s = \sum_{j=1}^{\mu_1} \phi_{1j}(x) q_{1j}(t) \quad (7)$$

$$u_2 = \sum_{j=1}^{\mu_2} \phi_{2j}(x) q_{2j}(t) \quad (8)$$

여기서 ϕ_{1j} 와 ϕ_{2j} 는 모드 함수, q_{1j} 와 q_{2j} 는 일반좌표, μ_1 와 μ_2 는 일반좌표 개수를 나타내는데 각각 인장 방향과 굽힘 방향에 대한 것이다. 그런데 u_1 대신에 s 가 근사화되기 때문에 식 (2)에서 일반속력에 대한 속도의 편미분 값들을 얻기 위해서는 아래와 같은 기하학적 관계식이 필요하게 된다 (참고문헌 (8) 참조).

$$u_1 = s - \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial u_2}{\partial \sigma} \right)^2 d\sigma \quad (9)$$

그리고

$$\dot{u}_1 = \dot{s} - \int_0^x \left(\frac{\partial u_2}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \sigma} \right) d\sigma \quad (10)$$

위 관계식들을 이용하여 \dot{q}_{1i} 와 \dot{q}_{2i} 에 대한 편속도들을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial q_{1i}} = \phi_{1i} \hat{a}_1 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \vec{v}^P}{\partial q_{2i}} = - \sum_{j=1}^{\mu_2} \int_0^x \phi_{2i, \sigma} \phi_{2j, \sigma} d\sigma q_{2j} \hat{a}_1 + \phi_{2i} \hat{a}_2 \quad (12)$$

여기서 σ 는 적분변수이고, $(\cdot)_{,\sigma}$ 의 아래첨자는 σ 에 대한 편미분을 의미한다. 식들 (7), (8), (11), (12)를 식들 (1~3)에 대입하고 일반좌표에 대한 비선형 항들을 무시하여 선형 운동방정식을 얻는다.

일반적인 해석 결과를 얻기 위해, 다음과 같은 무차원 변수들을 도입하여 운동방정식을 무차원화한다.

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (13)$$

$$\tau = \frac{t}{T} \quad (14)$$

$$\eta_{ai} = \frac{q_{ai}}{L} \quad (a=1,2) \quad (15)$$

여기서 $T = \sqrt{\frac{mL^4}{EI}}$ 이다. 다음은 최종적으로 얻어진 무차원 운동방정식이다.

$$\sum_{j=1}^{\mu_1} [M_{ij}^{11} \ddot{\eta}_{1j} + K_{ij}^S \eta_{1j}] = -2\epsilon \cos \omega \tau P_i \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu_2} [M_{ij}^{22} \ddot{\eta}_{2j} + (K_{ij}^B - 2\epsilon \cos \omega \tau K_{ij}^G) \eta_{2j}] = 0 \quad (17)$$

여기서 $\omega = T\Omega$ 이고 $2\epsilon = a^0 \frac{T^2}{L}$ 이다. 식 (16)은 인장 방향, 식 (17)은 굽힘 방향 운동방정식을 각각 나타낸다. 위 식에 나타난 행렬들은 각각 다음과 같다.

$$M_{ij}^{aa} = \int_0^1 \phi_{ai} \phi_{aj} d\xi + \beta \phi_{ai}(\xi_M) \phi_{aj}(\xi_M) \quad (a=1,2) \quad (18)$$

$$K_{ij}^S = \gamma \int_0^1 \psi_{1i, \xi} \psi_{1j, \xi} d\xi \quad (19)$$

$$K_{ij}^B = \int_0^1 \psi_{2i, \xi\xi} \psi_{2j, \xi\xi} d\xi \quad (20)$$

$$K_{ij}^G = \int_0^1 (1-\xi) \psi_{2i, \xi} \psi_{2j, \xi} d\xi + \beta \int_0^{\xi_M} \psi_{2i, \xi} \psi_{2j, \xi} d\xi \quad (21)$$

$$P_i = \int_0^1 \phi_{1i} d\xi + \beta \phi_{1i}(\xi_M) \quad (22)$$

여기서 $\xi_M = \frac{x_M}{L}$, $\beta = \frac{M}{mL}$, 그리고 $\gamma = \frac{HL^2}{I}$ 이다.

$\phi_{ai}(\xi)$ 는 $\phi_{ai}(x)$ 와 동일 값을 갖는 함수로 외팔보의 인장 방향과 굽힘방향 고유모드함수들을 각각 사용할 수 있다.

식 (16)과 식 (17)로부터 축 방향 왕복운동을 인장 변위를 직접 가진(direct excitation)하면서 동시에 굽힘 변위를 매개변수 가진(parametric excitation)하고 있다. 본 논문에서는 매개변수 가진에 의한 식 (17)의 동적 안정성만을 고찰한다. 식 (16)의 동적 불안정성은 직접 가진에 의해 야기되므로 가진 주파수가 고유진동수와 일치할 때 발생한다. 그런데 오일러 보의 고유진동수는 인장 방향이 굽힘 방향보다 매우 크기 때문에 인장 방향에서의 동적 불안정성은 가진 주파수가 매우 높을 때만 발생한다(참고문헌 (13) 참조). 본 논문에서는 이 경우에 대한 안정성 해석은 다루지 않는다. 그리고 식 (16)과 식 (17)은 서로 비연성되어 있어 식 (17)만을 대상으로 안정성 해석이 가능하다. 집중질량 효과는 식들 (18, 21)에서 관성 질량행렬 M_{ij}^{22} 와 기하 강성행렬 K_{ij}^G 에 나타나고 있음을 볼 수 있다. M_{ij}^{22} 와 K_{ij}^G 는 집중질량의 크기 및 부착 위치에 따라 다른 값을 갖게 되므로, 이에 따라 시스템의 동적 안정성이 변화하게 된다. 다음 절에서는 이러한 집중질량 효과에 의한 식 (17)의 동적 불안정성의 변화를 고찰한다.

3. 안정성 해석 모델과 수치해석

본 논문에서는 다중시간척도법(Multiple time scales method)를 이용하여, 앞 절에서 유도한 식 (17)의 동적 안정성을 해석한다. 우선 먼저 식 (17)을 다음과 같은 형태의 일반적인 다자유도 매개변수 진동시스템으로 전환한다.

$$\ddot{\chi}_i + \omega_i^2 \chi_i - 2\epsilon \cos \omega \tau \sum_{j=1}^{\mu_2} F_{ij} \chi_j = 0 \quad (i=1,2,\dots,\mu_2) \quad (23)$$

여기서

$$\chi_i = \sum_{j=1}^{\mu_2} U_{ji} \eta_j \quad (24)$$

$$\delta_{ii} = \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_2} U_{ji} M_{jk}^{22} U_{ki} \quad (25)$$

$$\omega_i^2 \delta_{ii} = \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_2} U_{ji} K_{jk}^B U_{ki} \quad (26)$$

$$F_{ii} = \sum_{j=1}^{\mu_2} \sum_{k=1}^{\mu_2} U_{ji} K_{jk}^G U_{ki} \quad (27)$$

여기서 U_{ij} 는 대칭행렬 M_{ij}^{22} 와 K_{ij}^B 에 대한 모드행렬(modal

matrix)로 식 (25)와 식 (26)처럼 M_{ij}^{20} 와 K_{ij}^p 를 대각행렬로 전환시켜준다. δ_{ij} 는 크로네커 델타(Kronecker delta)를 나타내고, ω_i 는 집중질량 효과가 고려된 (i)번째 굽힘 방향 고유진동수이다(참고문헌 (13)참조).

식 (23)에 대한 동적 안정성 해석은 시스템 매개변수들(고유진동수, 가진 진동수 및 크기)로 구성된 다음의 전이곡선 관계식들에 의해 판정한다. 전이곡선이란 매개변수 평면에서 안정영역과 불안정영역을 구분하는 경계영역을 의미한다(유도 과정은 참고문헌 (5) 참조).

(a) $\omega \approx \omega_p \pm \omega_q$ 경우 ($p, q = 1, 2, \dots, \mu_2$)

$$\omega = \omega_p + \omega_q \pm \epsilon \sqrt{\Lambda_{pq}} - \frac{1}{2} \epsilon^2 \left\{ \frac{\Lambda_{pq}}{4} \left(\frac{1}{\omega_p} + \frac{1}{\omega_q} \right) - \sum_{r \neq p} \left[\frac{\omega_r \Lambda_{rp}}{(2\omega_p + \omega_q)^2 - \omega_r^2} + \frac{\omega_r \Lambda_{rq}}{(2\omega_q + \omega_p)^2 - \omega_r^2} \right] - \sum_{r \neq q} \left\{ \frac{\omega_r \Lambda_{rp}}{\omega_q^2 - \omega_r^2} - \sum_{r \neq p} \frac{\omega_r \Lambda_{rq}}{\omega_p^2 - \omega_r^2} \right\} \right\} \quad (28)$$

여기서

$$\Lambda_{pq} = \frac{F_{pq} F_{qp}}{\omega_p \omega_q} \quad (29)$$

$\omega \approx \omega_p - \omega_q$ 인 전이곡선은 식들 (28, 29)에서 ω_q 대신 $-\omega_q$ 로 대치하여 구한다. 그런데 $\omega \approx \omega_p + \omega_q$ 와 $\omega \approx \omega_p - \omega_q$ 인 전이곡선들은 동시에 나타나지는 않는다. 왜냐하면 $\omega \approx \omega_p + \omega_q$ 일 때는 $\sqrt{\frac{F_{pq} F_{qp}}{\omega_p \omega_q}}$ 항을, $\omega \approx \omega_p - \omega_q$ 일 때는 $\sqrt{-\frac{F_{pq} F_{qp}}{\omega_p \omega_q}}$ 항을 갖기 때문에 동시에 나타날 수 없다. 즉, $F_{pq} F_{qp}$ 가 양(+)이면 $\omega \approx \omega_p + \omega_q$ 전이곡선이, 음(-)이면 $\omega \approx \omega_p - \omega_q$ 전이곡선이 나타나게 된다.

(b) $\omega \approx \frac{\omega_k \pm \omega_l}{2}$ 경우 ($k, l = 1, 2, \dots, \mu_2$)

$$\omega = \frac{\omega_k + \omega_l}{2} - \epsilon^2 \left\{ \frac{\chi_k + \chi_l}{2} \pm \sqrt{\mu_{kl} \mu_{lk}} \right\} \quad (30)$$

여기서

$$\chi_a = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\mu_2} \left[\frac{\omega_r \Lambda_{ra}}{(\omega_a + \omega)^2 - \omega_r^2} + \frac{\omega_r \Lambda_{ra}}{(\omega_a - \omega)^2 - \omega_r^2} \right] \quad (31)$$

$$\mu_{ab} = \frac{1}{2\omega_a} \sum_{r=1}^{\mu_2} \frac{F_{ar} F_{rb}}{(\omega_b - \omega)^2 - \omega_r^2} \quad (32)$$

마찬가지로 $\omega \approx \frac{(\omega_k - \omega_l)}{2}$ 인 경우에는 식들 (30~32)에서 ω_l 대신 $-\omega_l$ 로 대치한다. 식 (30)에서

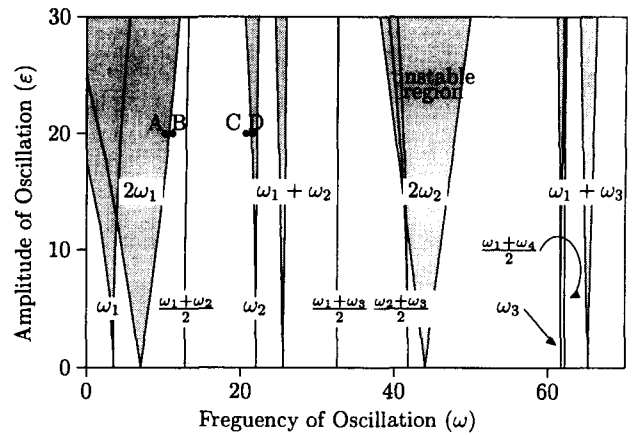


Fig. 2 Dynamic stability diagram for an axially oscillating cantilever beam with no concentrated mass

$m_{kl} \mu_{lk} \geq 0$ 일 때 이 경우에 대한 전이곡선이 나타난다.

Fig. 2는 식들 (28, 30)로부터 구한 전이곡선들로 구성된 안정성 도표로 집중질량이 없는 ($\beta=0$) 경우에 대한 결과이다. 외팔보의 고유모드 다섯 번째까지 사용하였으며, 가로축은 왕복 운동 진동수를, 세로축은 왕복 운동 가속도의 크기를 나타낸다. 불안정 영역 안에 표기된 $\omega_p + \omega_q$ 는 불안정 영역이 시작될 때의 왕복 운동 주파수를 나타낸다. 식 (28)에 의해 비교적 넓은 불안정 영역들을 ($2\omega_1, 2\omega_2, \omega_1 + \omega_2$, 그리고 $\omega_1 + \omega_3$) 얻었고, 식 (30)에 의해 얻어진 나머지 불안정 영역들은 ω_1 경우를 제외하고 폭이 매우 작게 나타남을 알 수 있었다. 폭이 작은 불안정 영역들은 구조물의 감쇠 영향으로 실제로는 나타나지 않는다(참고문헌 (11) 참고). 그리고 두 고유진동수의 차인 $\frac{\omega_k - \omega_l}{2}$ 불안정 영역들은 나타나지 않는다.

Fig. 3은 Fig. 2의 네 점에 대한 직접 수치 적분을 통해 구한 동적 반응들을 보여주는데, Fig. 2에서 수행된 안정성 해석의 신뢰성을 확인시켜 주는 그림이다. A점과 B점은 각각 불안정 영역과 안정 영역에 속한 전이곡선 $2\omega_1$ 의 근처점들로서, 각각 불안정 및 안정 동적 반응을 보인다. 그리고 C점과 D점은 각각 안정 영역과 불안정 영역에 속한 전이곡선 $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ 의 근처점들로서, 각각 안정 및 불안정 동적 반응을 보인다. 왕복 운동 진동수의 차이는 A-B 경우 0.1이고 C-D 경우 0.2로 매우 근접해 있으나 각각의 동적 반응들은 안정성 해석 결과와 일치하고 있어 그 신뢰성을 확인할 수 있다.

Fig. 4는 집중질량의 크기 변화에 따른 불안정 영역들을 도시한 해석 결과들로서 부착 위치가 각각 0.25, 0.5 그리고 0.75로 하여 얻은 결과들이다. 여기서 Fig. 2에서 나타

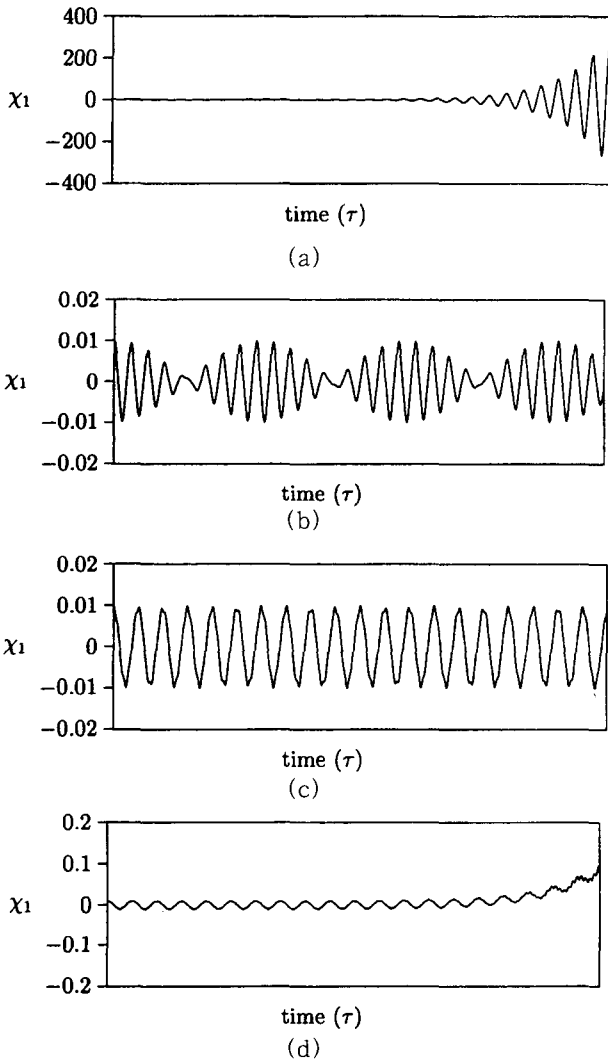


Fig. 3 Dynamic responses of points near transition curves in Fig. 2 : (a) A(10.7, 20.0), (b) B (10.8, 20.0), (c) C(21.0,20.0), (d) (21.7, 20.0)

나는 작은 폭의 불안정 영역들은 그림의 복잡성을 피하기 위해 도시하지 않았다. 집중질량의 크기는 보 질량에 대해 0.0, 0.2, 0.4배인 경우에 대하여 수치해석을 수행하였다. 해석 결과들을 살펴보면 집중질량의 크기 변화가 불안정 영역에 미치는 영향은 두 가지로 구분할 수 있다. 첫 번째로, 집중질량 크기 변화는 불안정 영역의 발생 위치에 영향을 준다. 그림들 4.(a~c)를 비교할 때 Fig. 4.(a)의 불안정 영역들은 발생 위치가 다른 경우에 비해 상대적으로 크게 변하고 있음을 볼 수 있다. Fig. 4.(c)의 불안정 영역들은 발생 위치가 거의 변하지 않고 있다. 두 번째로, 집중질량 크기 변화는 불안정 영역의 크기에도 영향을 준다. Fig.4.(c)에서 집중질량이 커질 때 불안정 영역의 증가함을 뚜렷이 볼 수 있으며, 다른 경우에서도 증가하는 경향을

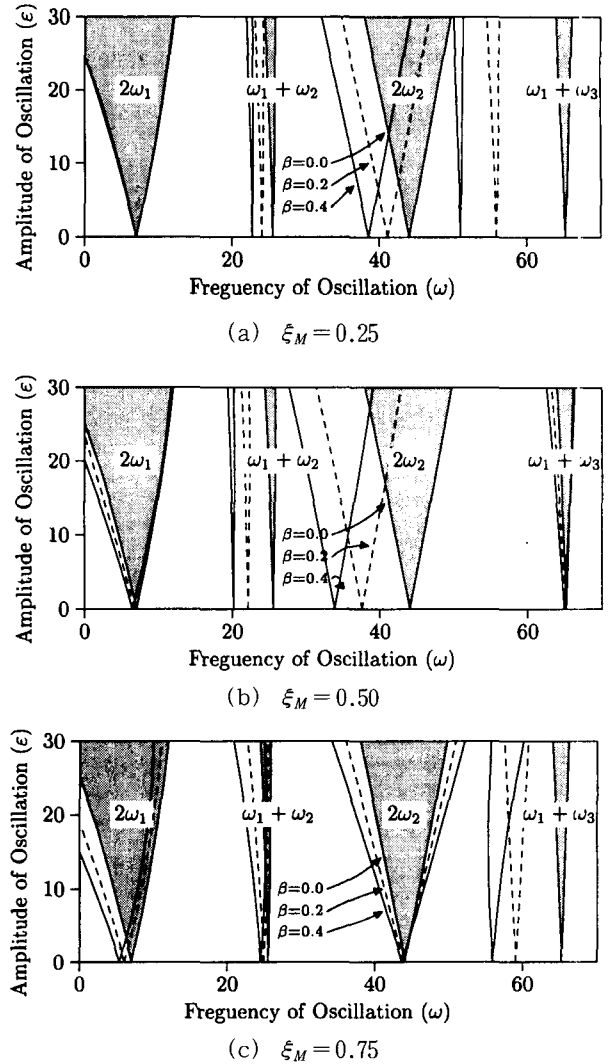


Fig. 4 Dynamic stability diagrams with the variation of the magnitude of a concentrated mass

보이지만 Fig. 4.(a)와 (b)의 $\omega_1 + \omega_2$ 와 $\omega_1 + \omega_3$ 불안정 영역들은 다소 감소하는 경우도 볼 수 있다.

Fig. 5는 집중질량의 크기 및 가진 크기는 일정할 때 ($\beta=0.4, \epsilon=20.$), 집중질량의 부착위치에 따른 불안정 영역의 변화를 도시한 그림이다. 가로축은 부착위치(ξ_M), 세로축은 왕복 진동수(ω)를 나타낸다. 불안정 영역 안에 그려진 점선은 고유진동수들의 합의 변화를 보여준다. 그림은 집중질량의 부착 위치의 변화에 따라 불안정 영역들의 발생 위치가 뚜렷이 변함을 보여주며, 발생 위치의 변화는 고유진동수들 합의 변화와 일치하고 있음을 볼 수 있다. 그런데 고유진동수들 합의 변화는 집중질량의 위치에 따라 각각 다르게 나타나고 있다. 첫 번째 고유진동수는 집중질량이 자유단 쪽에 위치할수록 낮아지는데 반면 두 번

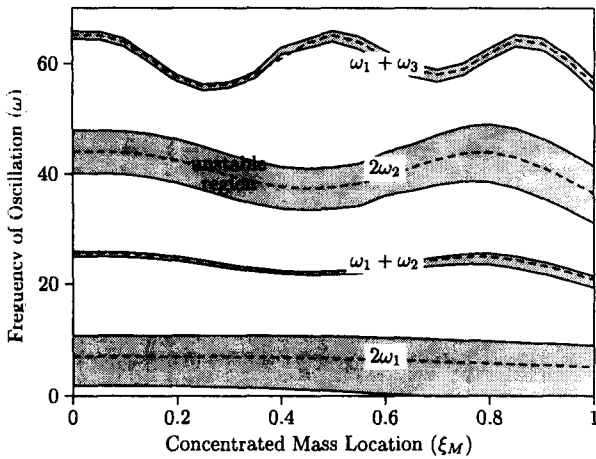


Fig. 5 The variation of unstable regions with respect to the location of a concentrated mass ($\beta=0.4, \epsilon=20$.)

제와 세 번째 고유진동수들은 낮아졌다 높아짐을 반복한다 이러한 원인은 고유진동수의 변화가 그 진동모드와 관련되기 때문이다. 예를 들면 집중질량이 두 번째 진동 모드 절점에 ($\xi_M=0.8$) 위치할 때 두 번째 고유진동수는 변하지 않는다. 불안정 영역 폭의 변화를 살펴보면, 집중질량이 자유단 쪽에 위치할수록 불안정 영역들의 폭은 약간 증가하고 있음을 볼 수 있다. 그러나 불안정 영역 폭의 변화는 그 발생 위치의 변화에 비해 그리 크지 않다고 할 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 집중질량을 가진 구조물이 축 방향 왕복운동을 할 때 발생하는 동적 불안정성에 관한 연구가 수행되었다. 운동방정식을 유도하여 축 방향 왕복 운동이 시스템 강성을 주기적으로 변화시킴을 확인하였다. 주기적 강성 변화 시스템의 동적 안정성을 다중시간적도법에 의해 해석하였다. 해석 결과로서 먼저 집중질량이 없을 때의 안정성 도표를 제시하였고, $\omega = \omega_1$, $\omega = 2\omega_1$, 및 $\omega = 2\omega_2$ 근처에서 큰 폭의 불안정 영역이 발생함을 알았다. 이 안정성 해석 결과와 직접 시간적분에 의해 얻은 동적 반응들과 일치함을 확인하여 안정성 해석 결과의 신뢰성을 얻었다. 이 안정성 도표를 기준으로 하고 집중질량의 크기 변화와 부착 위치의 변화에 따른 다양한 안정성 도표들과 비교 분석하였다. 집중질량이 자유단에 가깝게 부착된 경우에는 집중질량이 크기 증가에 따라 불안정 영역의 크기는 크게 증가하나 발생 위치는 거의 변화가 없다. 반면에, 고정단 쪽에 부착된 경우에는 집중질량이 크기 증가에 따라

불안정 영역의 크기 변화는 크게 나타나지 않고 발생 위치는 많이 변화함을 알 수 있었다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계 신기술 연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참 고 문 헌

- (1) Bolotin, V., 1964, *The Dynamic Stability of Elastic Systems*, San Francisco: Holden-Day.
- (2) Iwatsubo, T., Saigo, M., and Sugiyama, Y., 1973, "Parametric Instability of Clamped-Clamped and Clamped-Simply Supported Columns Under Periodic Axial Loads," *Journal of Sound and Vibration*, 30, pp. 65~77.
- (3) Kounadis, A. N., Belbas, S., 1977, "On the Parametric Resonance of Columns Carrying Concentrated Masses," *J. Struct. Mech.*, 5(4), pp. 383-394.
- (4) Beal, D., and Scott, R., 1990, "The Stability and Response of a Flexible Rod in a Quick Return Mechanism," *Journal of Sound and Vibration*, 141, pp. 227~289.
- (5) Tan, T. H., Lee, H. P., and Leng, G. S. B., 1997, "Dynamic Stability of a Radially Rotating Beam Subject to Base Excitation," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 146, pp. 265~279.
- (6) Kim, J. H. and Choo, Y. S., 1998, "Dynamic Stability of a Free-Free Timoshenko Beam Subjected to a Pulsating Follower Force," *Journal of Sound and Vibration*, 216(4), pp. 623~636.
- (7) Hyun, S. H. and Yoo, H. H., 1999, "Dynamic Modeling and Stability Analysis of Axially Oscillating Cantiliver beams," *Journal of Sound and Vibration*, 228(3), pp. 543~558.
- (8) Kane, T., Ryan, R., and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantiliver Beam Attached to a Moving Base," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 10, pp. 139~151.
- (9) Yoo, H., Ryan, R., and Scott, R., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions," *Journal of Sound and Vibration*, 181(2),

pp.261~278.

(10) Nayfeh, A., and Mook, D., 1977, "Parametric Excitations of Linear Systems Having Many Degrees of Freedom," J. Acoust. Soc. Am., 62, pp. 375~381.

(11) Nayfeh, A., and Mook, D., 1979, Nonlinear

Oscillation, John Wiley & Sons, Inc.

(12) Kane, T., and Levinson, D., 1985, Dynamics, Theory and Applications, McGraw-Hill Book Co.

(13) Rao, S. S., 1986, Mechanical Vibrations, Addison-Wesley Publishing Company