Historia Mathematica Vol. 14, No. 2, 2001, 101-114

고대 이집트 분수의 교육학적 의미

단국대학교 수학교육과 **한길준**

단국대학교 대학원 수학교육과 **정승진**

Abstract

The ancient Egyptians only used fractions of the form 1/n, so any other fraction had to be represented as a sum of such unit fractions and all the unit fractions were different. This study explores some of the history of Egyptian fractions and gives you an algorithm for such representations. There's lots of investigations to do in this area of mathematics suitable for elementary school students and it is also designed as a resource for teachers.

0. 서론

분수는 지금까지 발견되어온 수학적인 어떠한 기록물보다도 오래된 것이다. 중국인들이 두 수를 이용한 분수 표현의 최초 창시자라고 알려져 있으나 어떤 방법으로 나타냈는지는 확실히 알려져 있지 않다. 그러나, 고대인들은 일반화된 분수를 개발하지는 못했으며, 이 때문에 그들이 분수를 사용함에 있어서 종종 상당한 제한을 받았다. 린드(Rhind) 파피루스에는 단위분수에 대한 최초의 체계적 처리 방법이 기록되어 있다. 특히, 오늘날과는 달리 모든 분수를 2/3와 단위분수를 이용하여 독창적으로 표현하였는데, 이러한 특징 때문에 이집트 분수란 단위분수의 합으로 나타낸 분수를 의미하기도 한다[11]. 이집트 분수에서 단위분수로 나타내는 방법은 유일한 것이 아니라 분수에 따라서 선호하는 방법이 달랐다. 예를 들어 2/15는 절반(halving)으로 나타내기 방법을 이용하여 1/30+1/10로 나타내었고, $2/(p \cdot q) = 1/[p \cdot (p+q)/2] + 1/[q \cdot (p+q)/2]$와 같은 알고리즘이 제시되어 있지만, 모든 분수에 적용하지는 않았다. 그러나, 이집트인들이 분수를 다루는 일반적인 규칙을 이해하고 사용한 것은 확실하다[7]. 물론, 고대 동양 수학은 증명에 대하여 거의 논하지 않고, "이렇게 해라, 저렇게 해라"와 같은 절차만 제시하고 있어서 유클리드식의 엄밀한 논증을 배운 사람들에게는 동양적인 추리 방법이 이상하고 불합리한 것처럼 보일 수 있지만 우리가 현재 공학자나 기

술자들에게 가르치는 대부분의 수학이 엄밀한 증명을 시도하지 않고, "이렇게 해라, 저렇게 해라"와 같은 식이라면 어느 정도 이해가 갈 것이다[13]. 이와 같이 엄밀한 논증과 절차가 설명되어 있지 않았기 때문에 이집트 분수에 대한 호기심과 이를 해결해 보려는 많은 시도가 이루어지고 있다. 이러한 시도 중에 하나가 공평한 분배를 하기 위하여 이집트인이 단위분수의 합으로 모든 분수를 표시했다는 견해([8], [2], [11])가 있다. 고대 사회일수록 공동노동에 의한 공동분배가 일반화되어 있던 사회이기 때문에 과정으로서의 공평한 분배뿐만 아니라 결과로서도 공평한 분배가 이루어지기 위해서는 모든 분수를 단위분수의 합으로 나타내는 것이 효과적이었으리라고 생각한다. 즉, 5마리의 돼지를 8사람이 나누어 가진다고 할 때, 무조건 5/8씩 나누어 간다는 것은 양으로는 공평할지 몰라도, 나누어 놓은 부위가 서로 다를 수 있으므로 불공평할 수 있다. 그러나 돼지 4마리를 1/2씩 나누어 가진 후 남은 돼지 한 마리를 1/4씩 나누어 간다면 즉, 5/8=1/2+1/4와 같이 분배한다면, 과정과 결과가 모두 공평한 분배가 된다. 이러한 분배 방식은 중세에 수학 교과서로 사용된 **지혜를 길러주는 문제**(Problems for Sharpening the Wits of Youth)라는 책에서도 언급하고 있다[12]. 이와 같은 사실로 보아 이집트 사람들의 분배 방식이 어느 정도 보편화되어 있었고, 엄밀한 논증이 누락되어 있고 다소 복잡해 보이는 분수체계이었지만 합리적인 인간 정신을 그대로 반영한 실용적인 수학이었음을 알 수 있다. 특히, [1]에 의하면, 수학사 연구를 통해서 얻을 수 있는 가장 매력적인 소득은 과거에 창조된 수학의 업적 속에서 인간 정신이 어떻게 바꾸어지고 발전되어 왔는가를 볼 수 있고, 더 나아가서는 이러한 사실을 통해서 인간에게 무한한 가능성이 있다는 것을 깨닫는 것이다.

이와 같이 수학의 역사는 바로 인류라고 하는 가장 큰 학습자의 학습과정으로써, 그 학습과정을 충실히 관찰하고 분석해야만 수학의 교수-학습을 위한 가상적인 창조의 과정을 재구성 할 수 있다. 프로이덴탈(Fruedenthal)은 학생들에게 이러한 역사적 학습과정, 다시 말해 수학의 발달이라고 하는 인류의 학습과정을 단축된 형태의 가상적인 과정으로 재현시켜 줌으로써, 수학적 사고 경험을 하게 할 수 있다고 보았다[4]. 그러므로, 학생들이 가장 어려워하는 분수의 학습에 있어서 이집트 분수라는 인류의 학습과정을 경험해 보고 재구성해보는 활동을 통해서 인간의 정신이 어떻게 바뀌어지고 발전되어 왔는가를 알 수 있으며, 단순한 분수 알고리즘에 의해 주의 집중 없이 단순하게 절차만을 재현하기보다는 그 이유나 방법에 대하여 의문을 제기하고 탐구해봄으로써 분수에 대한 통찰이 쉽게 이루어질 수 있다.

따라서 본 연구에서는 이집트 분수의 특징과 다양한 분석을 고찰해 보고, 이집트 분수의 알고리즘에 대한 다양한 해석과 교육학적 의미를 찾아봄으로써 초등학생들의 분수 지도에 대한 시사점을 얻고자 한다.

1. 이론적 배경

1.1. 이집트 분수의 특징

신석기 시대에는 분수를 사용하지 않았지만 청동기 시대로 접어들어 문화가 발전하면서 분수의 개념 및 표기가 시작된 것으로 생각된다. 이집트는 단위분수에 대한 독특한 표기법을 가지고 있었는데 정수 위에 타원형을 표시하여 나타내었다. 예를 들어 1/4은  로, 1/20은  처럼 표시하였다. 그후 타원형의 표시는 점으로 대치되어 1/4는  로, 1/20은  처럼 나타내었다. 이와 같은 단위분수는 아메스(Ahmes)의 시대에 자유롭게 사용된 것으로 보이는데, 오늘날과 같은 일반적인 분수의 사용은 찾아 볼 수 없다. 또한 2/3을 특별하게  처럼 표시하여 사용하였고, 종종 특별한 경우에 n/(n+1)을 사용하였다[8]. 특히, 2/3를 제외한 모든 분수를 분자가 1인 단위분수의 합으로 표현함으로써 분수를 다룰 때 생기는 어려움을 피하려고 노력했다. 이러한 방법은 이집트 곱셈의 배가 성질 때문에 2/n 형태의 분수표를 만드는 것을 가능하게 했을 것이다[6]. 2/n 중에서 2/3는 이집트 분수의 산술에서 특별한 역할을 하였다. 어떤 수의 1/3은 그 수의 2/3을 구한 다음 그 값의 반을 구하는 과정을 통하여 구하였는데, 이집트 사람들은 이미 단위분수 1/p의 2/3는 1/2p+1/6p이고, 1/2p의 두 배는 1/p임을 알고 사용하였던 것이다. 그러나 2/3을 제외한 다른 m/n 형태의 진분수에 대해서는 기본적인 분수로 생각하기보다는 완성되지 않은 분수로 생각한 것 같다[8].

린드 파피루스에서는 분모가 홀수인 단위분수를 두 개 이상의 단위분수로 나타내기도 하였다[10]. 예를 들어, 1/5=1/3+1/15, 1/7=1/4+1/28, 1/9=1/6+1/18, 1/15=1/10+1/30, 1/17=1/12+1/51+1/68로 나타내었다. 이집트 분수에서 단위분수로 나타내는 방법은 유일한 것이 아니라 분수에 따라서 선호하는 방법이 있었다. 예를 들어 2/15는 절반으로 나타내기 방법을 이용하여 1/30+1/10로 나타내었다. 특히, 2/(p · q)=1/[p · (p+q)/2]+1/[q · (p+q)/2]와 같은 알고리즘이 제시되어 있지만, 모든 분수에 적용하지는 않았다. 그러나 이집트인들이 분수를 다루는 일반적인 규칙을 이해하고 사용한 것은 확실하다[7]. 그러나 이집트 사람들은 분수를 단위분수의 합으로 나타낼 때, 2/5=1/5+1/5와 같이 나타내지 않고 2/5=1/3+1/15와 같이 나타내었다. 이러한 이유 때문에 특히 2/n(n은 5~101가지의 홀수) 분수표를 만들어 사용하였다. 이중에서 2/3k 형태의 분수는 1/2k+1/6k 형태로 나타낼 수 있으나 그 외의 다른 형태의 분수는 나타내는 방법이 다양하다. 그러나, 2/19를 1/12+1/57+1/228로 나타내지 않고, 1/12+1/76+1/114로 나타낸 것과 2/101만 2/n=1/n+1/2n+1/3n+1/6n 형태인 1/101+1/202+1/303+1/606 형태로 사용한 것은 의문사항으로 남아 있다. 특히, 2/n=1/n+1/2n+1/3n+1/6n 방식을 사용하면 다음과 같이 쉽게 단위분수의 합으로 2/n를 나타낼 수 있음에도 불구하고 그들은 이러한 방법을 이용하지 않았다[9].

$$2/3=1/3+1/6+1/9+1/18, \qquad 2/5=1/5+1/10+1/15+1/30$$
$$2/7=1/7+1/14+1/21+1/42, \qquad 2/9=1/9+1/18+1/27+1/54$$

여기서 다시 한번 이집트 사람들의 실용적이고 합리적인 분수사용을 엿볼 수 있는데, 본

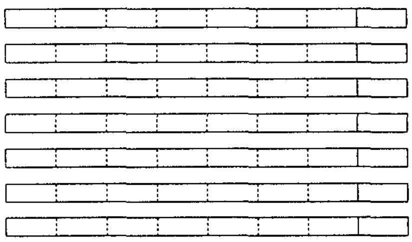
연구자가 생각해 볼 때, 2/19를 1/12+1/57+1/228로 나타내지 않고, 1/12+1/76+1/114로 나타낸 이유는 분배의 과정에서 어떤 물건을 1/228로 나누는 것보다는 1/114로 나누는 것이 훨씬 나누기가 편리하고, 나누는 물건을 228조각으로 나누는 것보다는 114조각으로 나누는 것이 물건의 성질을 덜 훼손시키기 때문이라고 생각한다. 또한, 2/5는 1/3+1/15과 같이 두 개의 단위분수로 나타낼 수 있기 때문에 굳이 4개의 단위분수로 나누어 사용하지 않았고, 이렇게 두 개의 단위분수로 분배함으로서 분배과정이 수월해지고, 나누는 물건의 성질도 좀 더 적게 훼손되었을 것이다. 따라서, 이집트의 분수는 대부분 4개 이하의 단위분수의 합으로 되어 있다. [11]에서는 다음과 같이 가장 적은 개수의 단위분수의 합으로 이집트 분수를 나타내고 있다.

4/5=1/2+1/4+1/20를 4/5=[2, 4, 20]로 나타낸다면, 다음과 같이 나타낼 수 있다.
2/3=[2, 6], 2/5=[3, 15], 2/7=[4, 28], 2/9=[5, 45]=[6, 18], 2/11=[6, 66]
3/4=[2, 4], 3/5=[2, 10]
3/7=[3, 11, 231]=[3, 12, 84]=[3, 14, 42]=[3, 15, 35]=[4, 6, 84]=[4, 7, 28]
3/8=[3, 24]=[4, 8], 3/10=[4, 20]=[5, 10], 3/11=[4, 44]
4/5=[2, 4, 20]=[2, 5, 10], 4/7=[2, 14], 4/9=[3, 9], 4/11=[3, 33]
5/6=[2, 3], 5/7=[2, 5, 70]=[2, 6, 21]=[2, 7, 14], 5/8=[2, 8], 5/9=[2, 18]
5/11=[3, 9, 99]=[3, 11, 33]=[4, 5, 220]
6/7=[2, 3, 42], 6/11=[2, 22]
7/8=[2, 3, 24]=[2, 4, 8], 7/9=[2, 4, 36]=[2, 6, 9]
7/10=[2, 5], 7/11=[2, 8, 88]=[2, 11, 22]
8/9=[2, 3, 18]
8/11=[2, 5, 37, 4070]=[2, 5, 38, 1045]=[2, 5, 40, 440]=[2, 5, 44, 220]=[2, 5, 45, 198]
=[2, 5, 55, 110]=[2, 5, 70, 77]=[2, 6, 17, 561]=[2, 6, 18, 198]=[2, 6, 21, 77]
=[2, 6, 22, 66]=[2, 7, 12, 924]=[2, 7, 14, 77]=[2, 8, 10, 440]=[2, 8, 11, 88]
9/10=[2, 3,1 5]
9/11=[2, 4, 15, 660]=[2, 4, 16, 176]=[2, 4, 20, 55]=[2, 4, 22, 44]=[2, 5, 10, 55]
10/11=[2, 3, 14, 231]=[2, 3, 15, 110]=[2, 3, 22, 33]

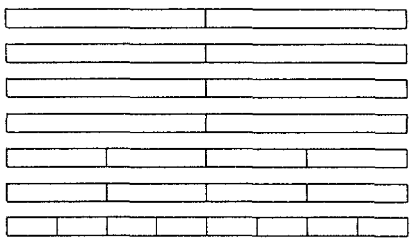
여기서 주목할 만 한 사실은 8/11은 무려 15개의 조합이 가능하다는 것으로 이집트 분수의 다양한 표현 방법을 알 수 있다.

[8]은 이집트 사람들이 1/2, 1/3, 2/3와 같은 기본적인 분수를 사용하여 분수를 나타내는 것을 더 좋아했다는 주장을 제기하였다. 예를 들어 2/15를 단위분수의 합으로 나타내기 위하여 1/15의 1/2인 1/30을 구하고 1/30+x=2/15 인 단위분수 x를 구하여 나타내면 된다. 또한, 2/3p=1/2p+1/6p를 이용하여 2/15=1/10+1/30으로 나타낼 수 있다. 물론, 두 번째 방법은 린드 파피루스에서 특별하게 언급하고 있다. 이와 같이 이집트 분수에 대한 특별한 해법

을 찾는 과정 중에서 수학은 발전할 수 있다. 그러나 본 연구자의 견해로는 조금만 생각해 보면 이집트인이 1/2, 1/3, 2/3을 왜 선호했는지 쉽게 알 수 있다. 앞에서도 언급하였듯이 이집트 분수를 공동분배의 과정과 결과로 이해한다면, 1/2, 1/3, 2/3는 분수 중에서 가장 큰 분수이므로 일단 가장 큰 분수를 기준으로 나눈 후 그 나머지를 가지고 나누는 것이 당연하다. 즉, 처음부터 여러 조각으로 나누는 것보다는 1/2, 1/3, 2/3조각으로 물건을 최대한 적게 훼손시키며 간편하게 나눈 후, 그 나머지를 다시 나누는 것은 당연한 것이다. 이와 같은 과정을 [2]에서는 원시시대로 돌아가서 8명의 청년이 사냥을 해서 7마리의 동물을 나누는 방법을 예로 들면서 설명하고 있다. <그림 1>과 같이 나누었을 경우에 각각 7/8을 가져가지만 한 사람은 1/8을 7개 모은 것을 가져가야 하므로 공평한 분배가 아니고, <그림 2>와 같이 7/8=1/2+1/4+1/8처럼 나누었을 때, 결과로써의 양뿐만 아니라 과정으로써의 양도 공동분배가 되었다고 설명하고 있다.



< 그림 1>



<그림 2>

한편 2/5를 1/3+1/15로 나타낸 것에 대하여 [3]에서는 다음과 같이 설명하고 있다. 2는 1/3이 6개 모인 것이므로 2÷5는 6개의 1/3을 5로 나누는 것이고, 6개의 1/3을 5로 나누면 1/3과 나누어지지 않는 1/3이 남는다. 나누어지지 않는 1/3을 5로 나누면, 1/15이므로 2/5=1/3+1/15 이다.

이것을 식으로 나타내면, $2=(1/3\times 3)\times 2=1/3\times 6$이므로 다음과 같다고 설명하고 있다.

$$
\begin{aligned}
2/5 &= (1/3\times 6)/5 = [1/3\times(5+1)]/5 = [(1/3\times 5)+(1/3\times 1)]/5 = (1/3\times 5)/5 + (1/3)/5 \\
&= 1/3 + (1/3)/5 = 1/3 + 1/15
\end{aligned}
$$

이 방법은 그저 결과를 가지고 꽈어 맞추는 형식으로 왜 1/3을 사용하였는지에 대하여 효과적인 설명이 없다. 여기서 1/3을 사용한 이유는 분배를 가지고 생각해 보면 쉽게 해결할 수 있다. 2개를 5명에게 나누어 줄 때, 2개를 1/2씩 나누면 4조각이 되어 5명이 나누어 가질 수 없기 때문에 2개를 1/3씩 나누어 6조각을 만든 후, 한 조각씩 나누어 가지고, 다시 남은 1/3 조각을 5조각으로 나누어 1/15조각씩 나누어 가진 것이다. 이상으로 볼 때, 이집트분수는 다음과 같은 특징을 가지고 있다.

첫째, 분수의 표기 방법이 독특하였고, 단위분수와 2/3를 이용하여 분수를 나타내었다.
둘째, 단위분수의 합으로 분수를 표현하기 위하여 2/n 분수표를 만들어 활용하였다.
셋째, 이집트의 분수 표현 방법은 다양하였으며, 한 가지의 알고리즘을 모두에 적용한 것이 아니라 분수에 따라 서로 다른 알고리즘을 적용하였다.
넷째, 이집트의 분수는 대부분 4개 이하의 단위분수로 나타냈으며, 최대한 큰 분수를 중심으로 구성되어 있다.
다섯째, 이집트의 분수체계를 공동분배과정으로 보았을 경우, 이집트 분수는 분배의 과정뿐만 아니라 분배의 결과 또한 공평하게 나타낸 것이다.
여섯째, 이집트 분수에서 1/2, 1/3, 2/3이 많이 사용된 이유는 분배과정에서 분배의 간편성과 공평성의 추구뿐만 아니라 분배되는 물건의 성질을 최대한 훼손시키지 않으려는 배려가 놓여 있다.

1.2. 이집트 분수의 알고리즘

[9]에서는 이집트 사람들이 분수를 사용한 방법을 다음과 같이 설명하고 있다.

첫째, 분모는 1000보다 작아야 한다.
둘째, 단위분수의 개수를 최소화하는 것이 좋다. 따라서 최대 4개 이상을 넘지 않는다.
셋째, 분모는 홀수보다 짝수를 사용한다. 더욱이 단위분수의 합으로 나타낼 때, 첫 번째 분수는 짝수를 사용한다.
넷째, 단위분수의 합으로 나타낼 때, 가장 큰 분수부터 시작하고, 똑같은 분수를 한 개 이상 사용하지 않는다.
다섯째, 단위분수의 합으로 나타난 분수들의 분자가 최대한 작게 나타낸다. 예를 들어 $2/31=1/18+1/186+1/279$보다는 $2/31=1/20+1/124+1/155$을 사용한다.

이와 같은 원칙은 사실 앞장에서 설명한 공평한 분배의 원칙에 의해서 모두 설명될 수 있는 것들이다. 본 장에서는 이와 같은 원칙에 의해서 이집트 분수의 알고리즘을 다양한 방법으로 소개해 보고자 한다.

1) 2/n인 분수의 알고리즘
① 2/n를 가장 적은 개수의 단위분수의 합으로 나타내는 알고리즘[11]

$2/3=1/2+1/6$, $2/5=1/3+1/15$
$2/7=1/4+1/28$, $2/9=1/5+1/45=1/6+1/18$
$2/11=1/6+1/66$, $2/13=1/7+1/91$
$2/15=1/8+1/120=1/9+1/45=1/10+1/30=1/12+1/20$
$2/17=1/9+1/153$, $2/19=1/10+1/190$

위의 이집트 분수를 보고 다음과 같이 식을 세울 수 있다.

$$2/(2n+1)=1/(n+1)+1/X$$

$(2n+1)$에서 n은 쉽게 찾을 수 있지만 X는 찾기가 쉽지 않다.

다시 규칙을 찾아보면, 2/3에서 $n=1$이고, 1/6은 $3\times2=6$이다.

따라서, $2/(2n+1)=1/(n+1)+1/X$에서 X는 $(2n+1)\times(n+1)$이고,

$$2/(2n+1)=1/(n+1)+1/[(n+1)(2n+1)]$$ 이다.

이것을 증명하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & 1/(n+1)+1/[(n+1)(2n+1)] \\ = \ & (2n+1+1)/[(n+1)(2n+1)] \\ = \ & (2n+2)/[(n+1)(2n+1)] \\ = \ & 2(n+1)/[(n+1)(2n+1)] \\ = \ & 2/(2n+1) \end{aligned}$$

② $2/n=1/n+1/2n+1/3n+1/6n$ [9]

$2/n=1/n+1/2n+1/3n+1/6n$ 방식을 사용하면 다음과 같이 쉽게 단위분수의 합으로 2/n를 나타낼 수 있다.

$$2/3=1/3+1/6+1/9+1/18, \qquad 2/5=1/5+1/10+1/15+1/30$$
$$2/7=1/7+1/14+1/21+1/42, \qquad 2/9=1/9+1/18+1/27+1/54$$

③ $2/(p\cdot q)=1/[p\cdot(p+q)/2]+1/[q\cdot(p+q)/2]$ [7]

이 방법은 린드 파피루스에서 아메스가 직접 기술한 것으로 쉽게 2/n 형태의 분수를 만들 수 있다.

$$2/21=2/(3\cdot7)=1/[3\cdot(3+7)/2]+1/[7\cdot(3+7)/2]=1/15+1/35$$
$$2/35=2/(5\cdot7)=1/[5\cdot(5+7)/2]+1/[7\cdot(5+7)/2]=1/30+1/42$$

④ 2/3k 형태의 분수: $1/2k+1/6k$

이 역시 린드 파피루스에서 아메스가 직접 기술한 방법으로 이집트인들이 많이 사용한 방법이다.

$$2/15=2/(3\cdot5)=1/(2\cdot5)+1/(6\cdot5)=1/10+1/30$$
$$2/27=2/(3\cdot9)=1/(2\cdot9)+1/(6\cdot9)=1/18+1/54$$

2) m/n인 진분수의 알고리즘

① 나눗셈의 몫을 구하는 방법[9]

분수를 나눗셈의 몫으로 보고 다음과 같이 나눗셈의 목을 구하는 과정을 통하여 이집트 분수를 나타낼 수 있다.

9/13 ⇒ 9÷13 ⇒ 9÷13=x ⇒ x×13=9

	1	13
∨	1/2	6+1/2
∨	1/8	1+1/2+1/8
	1/13	1
∨	1/26	1/2
∨	1/52	1/4
∨	1/104	1/8

따라서 9/13=1/2+1/8+1/26+1/52+1/104

② 1/n=1/(n+1)+1/[n(n+1)]을 이용한 방법[9]

3/5=1/5+1/5+1/5 (1/5=1/(5+1)+1/[5(5+1)]=1/6+1/30이므로)

3/5=1/5+1/6+1/30+1/6+1/30 (1/6=1/7+1/42, 1/30=1/31+1/930 이므로)

3/5=1/5+1/6+1/30+1/7+1/42+1/31+1/930

③ (분모÷분자)의 근사값을 이용한 방법[9]

이 방법은 공동분배의 과정에서 1/2, 1/3으로 나누는 과정을 좀더 일반적인 방법으로 고친 것이다.

9/13

1 < 13÷9 < 2, 1/2 < 9/13 < 1 이고

9/13－1/2=5/26이므로 9/13=1/2+5/26이다.

같은 방법으로 5/26를 단위분수로 고치면, 5 < 26÷5 < 6, 1/6 < 9/13 < 1/5이고 5/26－1/6=1/39이므로 9/13=1/2+1/6+1/39 이다.

④ 방법 ③의 일반화[2]

a/b=1/(n+1)+[(n+1)a－b]/[(n+1)b] (a<b이고, n은 b를 a로 나눈 정수인 몫)

13/20 (20÷13=1.…이므로 n=1)

13/20=1/2+(2×13－20)/2×20=1/2+3/20 (3/20에서 20÷3=6.…이므로 n=6)

=1/2+1/7+(7×3－20)/7×20

$=1/2+1/7+1/140$

⑤ 1/2, 1/3, 2/3배하여 나타내기[8]

2/5는 1/5의 1/3인 1/15을 구하고 $1/15+x=2/5$인 단위분수 x를 구하여 나타내면 $2/5=1/3+1/15$이다.

2/7는 1/7의 1/4인 1/28을 구하고 $1/28+x=2/7$인 단위분수 x를 구하여 나타내면 $2/7=1/4+1/28$이다.

2/13는 1/13의 1/8인 1/104을 구하고 $1/104+x=2/13$인 단위분수 x를 구하여 나타내면 $2/13=1/8+1/52+1/104$이다.

⑥ $1=1/2+1/3+1/6$을 이용하는 방법[11]

$3/4=1/2+1/4$

$1=1/2+1/3+1/6$을 이용하면 $1/4=1/8+1/12+1/24$이므로,

$3/4=1/2+1/8+1/12+1/24$

똑같은 방법으로 $1/24=1/48+1/72+1/144$이므로

$3/4=1/2+1/8+1/12+1/48+1/72+1/144$

이와 같은 방법으로 3/4에 대한 단위분수의 합을 아주 많이 만들 수 있다.

⑦ 공동 분배의 과정으로 나타내기

$2/5=1/3+1/15$

2개를 5명에게 나누어 줄 때, 2개를 1/2씩 나누면 4조각이 되어 5명이 나누어 가질 수 없기 때문에 2개를 1/3씩 나누어 6조각을 만든 후, 한 조각씩 나누어 가지고, 다시 남은 1/3 조각을 5조각으로 나누어 1/15조각씩 나누어 가진 것이다.

⑧ 크기가 같은 분수를 이용하여 이집트 분수 만들기

$2/5=4/10=6/15=8/20\cdots$이다.

이중에서 $2/5=6/15=1/15+5/15=1/15+1/3$과 같이 크기가 같은 분수를 이용하여 단위분수를 만들 수 있다. 이 방법은 본 연구자가 직접 생각해본 방법으로 분자가 분모의 약수의 합으로 된 경우에 항상 성립하기 때문에 5학년에서 약수와 배수를 배운 후 활용하면 훨씬 더 효과적이다. 즉, 6/15에서 15의 약수는 1, 3, 5, 15이고 $1+5=6$이므로 $6/15=1/15+5/15=1/15+1/3$이다.

3) 이집트 분수의 곱셈과 나눗셈 알고리즘

고대 이집트 사람들의 곱셈은, 오늘날 우리가 기본수의 곱셈, 기수법의 원리 및 덧셈 등을 이용해서 논리적으로 조직하여 형식화한 곱셈방법(세로셈)과는 달랐다. "곱셈의 덧셈에 관한 배분법칙"을 이용한다는 원리는 같지만 그 수행 과정에서는 매우 달랐다. 그들은 곱셈을 하

기 위해 "두 배하기와 더하기"라는 두 종류의 셈법을 이용했다. 그들이 이와 같은 방법을 사용할 수 있었다는 것은, 이미 놀랍게도 "모든 자연수는 2의 거듭제곱수들의 합으로 나타낼 수 있다."라는 사실을 알고 있었다는 증거이기도 하다. 따라서, 이집트의 곱셈은 곱셈표가 없이도 곱셈이 가능하였기 때문에 손쉽게 큰 수의 곱셈을 할 수 있었다.

(1+1/3+1/5)×(30+1/3)의 곱셈 방법을 살펴보면, 다음과 같다.

	1	1+1/3+1/5
∨	2	3+1/15
∨	4	6+1/10+1/30
∨	8	12+1/5+1/15
∨	16	24+1/3+1/15+1/10+1/30
	2/3	2/3+1/6+1/18+1/10+1/30
∨	1/3	1/3+1/12+1/36+1/20+1/60

∨표한 곳의 세로를 각각 더하면, 2+4+8+16+1/3=30+1/3이므로,
(1+1/3+1/5)×(30+1/3)=46+1/5+1/10+1/12+1/15+1/30+1/36이다.

또한, 나눗셈은 다음과 같이 곱셈의 역연산으로 계산하였기 때문에 나눗셈이라는 새로운 연산을 도입할 필요가 없었다 이것은 교육적으로 효과적이라고 할 수 있다.

1/2÷1/3 ⇒ 1/3×x=1/2 ⇒ x=?

∨	1	1/3
∨	1/2	1/6
	1/4	1/12

∨표한 곳의 세로를 각각 더하면, x=1+1/2이고 1/3+1/6=1/2이므로,
1/2÷1/3=1+1/2

2. 이집트 분수의 교육학적 의미

이집트인들은 나일강의 하류 지방에 있는 파피루스라는 갈대와 비슷한 풀을 이용하여 종이를 만들어 사용했기 때문에 바빌로니아에 비해 많은 양의 수학 관련 자료를 얻을 수 없다. 그러나, 기원전 1650년경 사원의 서기인 아메스가 쓴 '아메스의 파피루스'(발견자의 이름을 따서 린드 파피루스라고도 함)에는 농토의 면적을 구하는 방법, 분수 계산의 방법과 같은 당시의 수학이 기록되어 있다. 이집트 분수가 중요한 이유는 고대 문명의 발상지인 메소포타미아 역시 분수를 사용했지만 수 체계가 60진법이었기 때문에 현대적으로 이용하기가

힘들고, 가장 먼저 분수가 발생했다는 중국은 자료가 거의 남아 있지 않기 때문에 이집트 분수를 통해서만 고대 분수의 역사를 현대적인 감각으로 느껴볼 수 있기 때문이라고 생각한다. 즉, 이집트 분수의 수학사적 측면을 교육적으로 활용할 수 있기 때문이다. 특히, [5]에서는 수학사를 이용한 수업의 장점에 대하여 다음과 같이 언급하고 있다.

첫째, 알고리즘적인 계산 수학을 반성하고 개념적 사고를 고취할 수 있다.

둘째, 교육과정을 자연스러운 내용 배열의 준거에 따라 작성할 수 있고, 수학적 아이디어의 발달과정을 따라 전개됨으로 학생들의 이해를 촉진할 수 있다.

셋째, 수학의 역사 발달과정을 통해서 수학적 사고의 인간적인 면을 접해 볼 수 있고, 학습동기와 흥미를 유발할 수 있다.

넷째, 현대 기술 문명에서 수학이 차지하는 중심적인 역할과 인간관과 세계관 형성에 수학이 미친 역할을 이해함으로써 학생들의 수학에 대한 인식의 전환이 이루어질 수 있다.

수학사적 측면에서 이집트 분수의 교육학적 의미를 살펴보면, 이집트 분수는 가장 오래된 분수 사용의 예로 인류의 조상들이 어떤 이유로, 어떤 방법으로 분수를 표현하였으며, 왜 그러한 독특한 분수체계를 가지게 되었는지에 대한 근거 자료로 이용될 수 있다. 앞장에서 살펴보았듯이 이집트 분수를 통해서 자연수 형태의 분배가 불가능할 경우, 즉, 주어진 물건을 훼손하면서 분배해야 할 경우, 가장 합리적인 방법으로 분배하는 방법이 바로 이집트의 분수 표현임을 알 수 있었다. 이와 같은 분배 방식을 중세의 수학 교과서 **지혜를 길러주는 문제**에서도 찾아 볼 수 있다[12].

> 문제: 집을 짓기 위하여 6명의 일군을 고용하였다. 다섯 명은 숙련 기술자이고, 한 명은 소년으로 실습생이다. 5명의 숙련 기술자는 하루에 25펜스(pence)를 받아서 똑같이 나누어 갖고, 그 나머지는 소년에게 주었다. 소년이 받는 돈이 숙련 기술자 한 사람이 받는 돈의 절반이라면 일군들은 하루에 얼마씩 받는가?
>
> 답: 22펜스를 가지고 어른들에게 4펜스씩 주고 나머지 2펜스를 소년에게 준다. 남은 돈을 각각 11조각으로 나누면 33조각이 된다. 이중에서 어른들에게 6조각씩 주면 30조각이므로 남은 3조각은 소년에게 준다.

물론 위의 문제는 방정식을 이용하면 쉽게 해결된다. 그러나 분배 과정에서의 공평성과 분배 결과의 공평성에 대해서도 고려했다는 측면에서 보면 수학적으로 단순하게 문제를 해결하는 것보다도 인본주의적이고 합리적임을 알 수 있다.

다음으로 역사-발생적 측면에서 이집트 분수를 활용한다면 교육학적으로 의미가 있다고 본다. 지금까지 대부분의 수학교육자들은 그것이 어떤 형태이든 발생적 원리를 주장해 왔다. 클라인, 푸앵카레, 토에플리츠(Toeplits), 프로이덴탈, 폴리아, 브로우소(Broussau) 등 유명한

학자들은 대부분 발생적 원리를 지지해 왔고, 이들은 수학을 완성된 상품으로써가 아니라 수학화의 과정으로서만 바르게 이해되고 학습될 수 있다는 생각을 공유하고 있다. 발생적 원리는 수학적, 인식론적, 심리학적, 교육학적 관점에서 현대 수학교육이론의 대부분의 주장과 조화되며, 수학적 구조의 발생도 학습자의 인지구조의 발생도 적절히 고려되고 있는 학습지도 원리이므로 수학교육은 발생적 방법에 따라 조직되어야 한다고 주장하기에 이르렀다 [4]. 더군다나 분수 학습은 학생들이 아주 어려워하는 부분이기 때문에 역사-발생적 원리에 입각한 지도가 필수적이라고 생각한다. 초등학교에서 분수는 등분할 한 양을 부분/전체로 나타내는 것으로 도입하고 있다. 학생들이 하는 등분할은 보통 연속량을 등분할하는 활동이거나 이산량을 주어진 분수로 나누어 보는 활동으로 이집트 분수와 같은 공평한 분배의 과정이 없다. 물론 저학년에서는 이집트 분수와 같은 도입 방법이 어렵겠지만, 고학년에서는 도입해 볼만한 과정이다. 특히, 이집트 분수가 수학 역사의 한 부분이기 때문에 이러한 과정을 학생들이 경험해 본다는 것은 아주 중요하다고 생각한다.

마지막으로 수학적 사고력의 신장 측면에서 이집트 분수의 교육적 의미를 찾아 볼 수 있다. 이집트 분수는 한가지의 알고리즘에 의해서 표현되기보다는 아주 다양한 알고리즘으로 이루어져 있다. 알고리즘의 연습에 의한 사고의 자동화는 수학적 능력의 증진에 도움이 되지만 한편으로는 주의 집중 없이 단순하게 절차만을 재현하게 되는 단점이 있기 때문에 이집트 분수의 다양한 알고리즘은 자동화되어 당연히 여기는 분수를 재음미하여 보다 의미 있는 수학적 사고 활동이 가능하도록 할 수 있다.

결론적으로, 학생들이 가장 어려워하는 분수의 학습에 있어서 이집트 분수라는 인류의 학습과정을 경험해 보고 재구성해보는 활동을 통해서 인간의 정신이 어떻게 바뀌어지고 발전되어 왔는가를 알 수 있으며, 단순한 분수 알고리즘에 의해 주의 집중 없이 단순하게 절차만을 재현하기보다는 그 이유나 방법에 대하여 의문을 제기하고 탐구해봄으로써 분수에 대한 통찰이 쉽게 이루어질 수 있다.

3. 결론

이집트는 고대 문명의 발상지로 훌륭한 문화를 꽃피웠으며, 이러한 문화 발전은 바로 수학이 실용 과학으로써 원동력 역할을 했기 때문이다. 이집트 수학의 발전상은 린드 파피루스를 통해서 알 수 있는데 특히, 린드 파피루스에는 단위분수에 대한 최초의 체계적 처리 방법이 기록되어 있다. 이집트 분수는 오늘날과는 달리 모든 분수를 2/3와 단위분수를 이용하여 독창적으로 표현하였고, 분수를 표현하는 알고리즘 역시 다양하였다. 이러한, 이집트 분수체계의 독특성과 다양한 알고리즘을 때문에 이집트 분수는 수학에서 중요한 위치를 차지하고 있으며, 교육학적으로도 유용하게 사용할 수 있다.

따라서 본 연구에서는 이집트 분수의 특징과 다양한 분석을 고찰해 보고, 이집트 분수의

알고리즘에 대한 다양한 해석과 교육학적 의미를 찾아봄으로써 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 이집트분수의 특징으로 다음과 같은 사실을 새롭게 알 수 있었다.

1) 이집트의 분수는 대부분 4개 이하의 단위분수로 나타냈으며, 최대한 큰 분수를 중심으로 구성되어 있다.

2) 이집트의 분수체계를 공동분배과정으로 보았을 경우, 이집트 분수는 분배의 과정뿐만 아니라 분배의 결과 또한 공평하게 나타낸 것이다.

3) 이집트 분수에서 1/2, 1/3, 2/3이 많이 사용된 이유는 분배과정에서 분배의 간편성과 공평성의 추구뿐만 아니라 분배되는 물건의 성질을 최대한 훼손시키지 않으려는 배려가 들어가 있다.

둘째, 이집트인은 분수에 대한 알고리즘으로 1/p의 2/3는 1/2p+1/6p이고, 1/2p의 두 배는 1/p임을 알고 사용하였고, 특히, 2/(p · q)=1/[p · (p+q)/2]+1/[q · (p+q)/2]와 같은 알고리즘이 제시되어 있지만, 모든 분수에 적용하지는 않았다. 이 이외에 이집트 분수의 알고리즘으로 9가지를 살펴보았다.

셋째, 이집트 분수의 교육학적 의미를 수학사와 역사-발생 원리, 수학적 사고의 측면에서 살펴보았다. 특히, 이집트 분수라는 인류의 학습과정을 경험해 보고 재구성해보는 활동을 통해서 인간의 정신이 어떻게 바뀌어지고 발전되어 왔는가를 알 수 있으며, 단순한 분수 알고리즘에 의해 주의 집중 없이 절차만을 재현하기보다는 그 이유나 방법에 대하여 의문을 제기하고 탐구해봄으로써 분수에 대한 통찰이 쉽게 일어날 수 있으며 이를 재음미해봄으로서 수학적 사고가 길러질 수 있을 것이다.

끝으로, 고대의 이집트 수학과 같은 놀라운 인간의 창조물이 그 후 계속 발전되지 않고 정체성을 띠게 된 이유는 무엇일까? 이집트에서는 수학의 발견이나 의학에 관한 것이 이미 일찍부터 聖典으로 취급되었고, 그 이후 이것에 수정을 가하거나 보완을 하면 이단자처럼 취급받았기 때문이다(김용운 · 김용국, 1992). 혹시 이 시대를 살고 있는 우리 또한 이러한 우(遇)를 범하고 있지 않나 반성해 볼 필요가 있다. 몇 가지 편리하고, 쉬운 알고리즘과 교과서의 방식만을 성전처럼 떠받들며 가르친다면 학생들의 미래는 밝지 않을 것이다. 이집트 분수를 분수학습에 새로운 활력소로 이용하고, 학생들이 창의적으로 생각할 수 있는 자료로 활용한다면, 이집트와 같은 역사는 되풀이하지 않을 수도 있을 것이다. 따라서 본 연구자는 이집트 분수를 초등학교에서 활용할 수 있는 방법으로 다음과 같이 8가지를 생각해보았다.

1) 이집트 분수를 이용한 실생활 문제 해결하기
2) 분수의 크기 비교하기
3) 이집트 사람들은 왜 단위분수를 사용하였는지 생각해 보기
4) 이집트 분수를 이용한 규칙 찾기
5) 이집트 분수의 알고리즘 찾기

6) 다양하게 이집트 분수 만들기
7) 크기가 같은 분수를 이용하여 이집트 분수 만들기
8) 이집트 분수의 곱셈과 나눗셈 활용하기

이 이외에도 이집트 분수를 활용할 수 있는 방법을 다양하게 생각해 볼 수 있다. 단순하게 이집트의 분수를 소개하는 차원을 넘어서 학생들의 수준에 맞게 교사가 재조직하여 이집트 분수를 가르친다면, 수학적 사고를 육성하고, 흥미를 유발할 수 있으며, 분수 학습 후 심화과정의 내용으로도 좋은 자료가 될 수 있을 것이다.

참고 문헌

1. 김용운 · 김용국, **세계수학문화사**, 전파과학사, 1992.
2. 배종수, **초등수학교육 내용지도법**, 경문사, 1998.
3. 안소정, **우리 겨레 수학 이야기**, 산하, 1996.
4. 우정호, **수학학습-지도 원리와 방법**, 서울대학교 출판부, 2000.
5. ______, **학교수학의 교육적 기초**, 서울대학교 출판부, 1998.
6. 이우영 · 신항균 공역, **수학사**, 경문사, 1998.
7. Allen, G. D., "Counting and Arithmetic--basicsm," Retrieved July 11, 2001, from the World Wide Web: *http://www.math.tamu.edu/~don.allen/history/egypt/node2.html, 2001.*
8. Boyer, C. B., *A History of Mathematics*, Brooklyn Collage, 1968.
9. Burton, D. M., *BURTON's History of Mathematics: An Introduction*, Wm. C. Brown Publishers, 1995.
10. Connor, J. J. & Robertson, E. F., "Mathematics in Egyptian Papyri," Retrieved July 11, 2001, from the World Wide Web: *http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Egyptian-papyri.html,* 2001.
11. Knott, R., "Egyptian Fractions," Retrieved July 11, 2001, from the Word Wide Web: *http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fraction/egyptian.html,* 2001.
12. Mendez, P., "A History of Mathematical Dialogue in Textbooks and Classroom," *Mathematics Teacher* 94(2001), 719-723.
13. Struik, D. J., *A Concise History Of Mathematics,* Dover Pub., New York, 1987.