韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2001, 5. 제 40권, 제 1호, 113-123.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2001, Vol. 40, No. 1, 113-123.

Spreadsheet를 活用한 상수 e의 實驗的 比較

김 철 수 (제주대학교)
양 영 근 (한림고등학교)

I. 서 론

현재 고등학교 과정에서 배우는 「수학II」 교과서에 나타나는 상수 e에 대한 설명은 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$의 수렴 여부를 간단히 조사하고 나서 간단히 실수 x에 대하여 극한값으로서 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, 또는, $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$을 e로 정의하고 있다. 이것은 e가 구체적으로 어떤 수인가, 어떻게 계산하는 것이 좋은가에 대한 언급이 없거나 충분하지 못하여 이해를 돕는데 부족한 점이 많다.

정보화 사회에서 첨단 기술을 수학 교육에 도입하여 창의적이고 생동하는 과학 기술 현장에서 이용할 수 있는 것이 되도록 교과내용과 교육방법을 개혁해야 한다는 시대적 요청이 전문가들 사이에 꾸준히 제기되고 있다. 미국의 경우 수학교육에 실험수학적인 방법을 도입하여 교육의 질을 높일 것을 촉구하고 있다(Hae-Soo Oh, 1992). 또한 수학교육이 교실에서만 이뤄지는 것이 아니라 on-line을 통해 집에서도 이뤄질 수 있는 환경으로 바뀌어 가고 있고, 학생들도 통신망을 통해서 방과후에도 숙제하다 궁금한 사항 등을 교사에게 물어볼 수 있는 전자메일 기능의 활성화로 인해 수학교육의 내용에 변화가 필요한 시점이다.

이 논문은 이러한 관점에서 상수 e의 구체적인 값을 Excel spreadsheet 상에서 계산하는 탐구활동을 수학교육에 도입하는 실험수학적 활동을 통해 수학교육의 내용과 방법에 변화를 모색하고자 하는 데 있다. 이러한 방법을 통해 미적분의 과목 수업시에 e의 무한급수를 이용한 정의의 소개와 더불어 직접 e의 구체적인 값을 계산 관찰, 비교함으로써 무리수로써 e의 이해뿐만 아니라 나아가 복소수 영역에서 밑을 e로 사용하는 지수함수와 로그함수 및 삼각함수 사이의 관계 등의 이해를 가능하게 하고, 통계에서 나타나는 정규분포 곡선에서도 e가 사용되는 확률밀도함수를 이해할 수 있는데 도움이 되리라고 생각한다.

이에 본 논문에서는 II장에서 e가 등장하게 된 역사적 배경을 소개하고, III장에서는 e의 극한의 정의와 무한급수의 정의 사이의 관계를 설명, 무리수임을 증명하고, IV장에서는 e를 구체적으로 계산할 수 있는 몇 가지 접근법들을 소개하였다. V장에서는 소개된 접근법들을 실험하고 관찰, 비교하기 위해 엑셀의 스프레드쉬트(Spreadsheet)를 이용하여 e의 값을 계산하는 방법을 제시하고, VI장에서는 쉬트상에서 계산된 e의 값의 결과를 비교하고 효율적인 지도방법을 언급하고, 마지막으로 VII장에서 결론을 제시하였다.

II. 상수 e 등장의 역사적 배경

플로리안 캐조리(Florian Cajori, 1859~1930)가 쓴 수학사에 의하면 삼각법에 관심을 두고 있던 존 네이피어(John Napier, 1550-1617)는 1614년에 로그에 관한 논문을 「놀라운 로그 체계의 기술, Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio」이라는 제목을 달아 소책자로 발간하였는데, 그 책에서 로그를 정의하고 분 단위의 각 각에 대한 사인의 로그값을 계산한 표가 실려 있는데, 이때 사용한 로그의 밑이 $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$이다. 실제로 이 밑의 값은 $\frac{1}{e}$의 근사값이 된다.

---

* 2000년 7월 투고, 2001년 1월 심사 완료.

네이피어가 그의 결과를 세상에 발표하였던 6년 후인 1620년에 독자적인 로그표를 발간한 뷔르기는 새롭게 로그를 정의하고 이 때 사용한 로그의 밑 $\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^L$의 값은 $L=10000$일 때 e의 근사값인 2.718146이 된다.

네이피어와 뷔르기 모두 발표하기 전에 오랫동안 로그의 개념을 연구하였지만 네이피어가 먼저 그 생각을 했었다고 일반적으로 믿고 있다. 네이피어의 접근방법이 기하학적인 반면에 뷔르기의 접근방법은 대수적이었다. 오늘날에는 일반적으로 로그를 지수로 간주한다. 즉 $a=b^x$ 이면 x 는 b를 밑으로 하는 a의 로그라고 한다. 이 정의에 의하면 로그의 법칙들은 지수의 법칙으로부터 바로 얻어진다(Florian Cajori, 1925 & Howard Evas, 1953). 이렇게 로그가 발견됨에 따라 상수 $e=2.718281\cdots$도 자연스럽게 등장하기 시작하였는데 이를 최초로 문자로 쓰기 시작한 사람은 고오트프라이드 빌헬름 라이브니츠(Gottfried Wilherm Libniz, 1646-1716)로 1690년과 1691년에 물리학자인 크리스찬 호이겐스(Christian Huygens, 1629-1695)에게 보낸 편지 속에 영문자 b로 나타내었고, 후에 레오나르드 오일러(Leonhard Euler, 1707-1783)에 의해서 영문자 e로 표기되었는데, 그는 러시아 페테르부르크의 궁정 시절 그의 나이 스물 한 살 때에 「대포의 점화에 대해서 최근 이루어진 실험에 관하여(Meditatio in Experimenta explosion tormentorum nuper instituta)」라는 논문에서 다음과 같이 제안하고 있다.

"그 로그가 1인 수를 e라 적기로 하자. 이 수는 2.7182818…이고 10을 밑으로 하는 e의 로그는 0.4342944…이다."[1)]

오일러는 자연로그의 밑 e 를 소수점이하 23자리까지나 계산하였는데 그 값은

$e=2.71828182845904523536028$ 이다[2)].

오일러가 이 문자를 택한 이유는 지수(exponential)의 첫 글자이기 때문이라고도 하고 자신의 이름의 첫 글자이기 때문이라고 하지만 그 후 많은 사람들은 $e=2.7182817\cdots$이라는 수를 오일러 상수 또는 네이피어 상수라고 불러주기도 하였다(Eli Maor, 1994).

III. 상수 e의 정의와 간단한 성질

[정리 3.] 수열 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 은 증가하고 수렴한다.

【증명】 참고 양영오(1996, pp.111~112) .■

위의 정리로부터 모든 양의 정수 n에 대하여 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4$이고, $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$이 증가수열이고 $n=1$일 때 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2$이므로 모든 양의 정수 n에 대하여 $2\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<4$ 이다.

따라서 다음과 같이 고등학교 과정에 나오는 상수 e의 정의를 만들 수 있다.

[정의 1.] $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

위의 정의를 사용하여 급수로 표현되는 상수 e를 증명하여 보자.

[정리 2.] $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$,

단, $n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$

【증명】 참고 양영오(1996, pp.159~160).■

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots,$$

$n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$ 의 부분합 수열 S_n은

$$S_n=1+1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3$ 이므로 단조증가수열이면서 위로 유계이다. 따라서 수렴한다.

급수의 수렴속도는 다음과 같이 평가된다.

$$e-S_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\cdots$$

1)http://members.aol.com/jeff570/constants.html에서 발췌
2)http://xavier.gourdon.free.fr/Constants/E/e.html에서 발췌

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{n+3}+\cdots\right)$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{n\times n!}$$

따라서, $0 < e - S_n < \frac{1}{n\times n!}$ 이다.

〔정리 3.〕 상수 e는 무리수이다.

【증명】 $e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$ …①

를 유리수라고 가정하자. 그러면 $e = \frac{q}{p}$(단, p, q는 서로소 $p \neq 0$). 그런데 e는 정수가 아니므로 $p \geq 2$라고 할 수 있다. ①의 양변에 $p!$을 곱하면

$$p!e = p!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right) \quad \cdots ②$$

$$= p!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{p!}\right)$$

$$+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{(p+1)(p+2)}+\cdots$$

$e = \frac{q}{p}$ 이므로 $pe = q$, 우변의 q는 정수이므로 좌변 pe도 정수이다. 그러므로 ②의 좌변 $p!e$도 정수이다. 또 ②의 우변 중에서

$p!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{p!}\right)$도 정수. 그런데,

$p+1<p+2<p+3<\cdots$이므로

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{(p+1)(p+2)}+\cdots < \frac{1}{p+1}+\frac{1}{(p+1)^2}+\cdots$$

$$= \frac{1}{p+1}\times\frac{1}{1-\frac{1}{p+1}} = \frac{p+1}{p(p+1)} = \frac{1}{p}$$ 이다.

그리고, $p \geq 2$인 정수이므로 $\frac{1}{p}$은 정수가 아니다.

곧, 좌변 $p!e$는 정수이고, 우변의

$p!\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}$ 도 정수이지만

$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{(p+1)(p+2)}+\cdots < \frac{1}{p}$ 에서

$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{(p+1)(p+2)}+\cdots$은 정수가 아니므로 ②는 모순이다. 따라서 e는 무리수이다(Johnson, R. & Pfaffenberger, W. E, 1981).■

IV. 상수 e의 계산 접근법

1. 고전적 정의를 이용한 계산법

상수 e는 단조증가수열에 의하여 정의된다. 즉

$$e = \lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

그러나 수렴은 매우 느리다.

$e_1 = 2,$

$e_{10} = 2.(59374246010\cdots),$

$e_{100} = 2.7(0481382942\cdots),$

$e_{1000} = 2.71(692393223\cdots),$

$e_{10000} = 2.718(14592682\cdots), \cdots$

이는 복리로 원리합계를 계산하는 방법과 동일하다.

2. 급수를 이용한 계산법

$$e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$$

은 1748년 오일러에 의하여 만들어 졌다. 계승은 빠른 속도로 증가하는 수이기 때문에 e를 계산하는데는 매우 충분하다.

$S_n < e < S_n+\frac{1}{n\times n!}$을 보이는 일은 쉽고 오일러는 이를 이용하여 소수점이하 23자리까지 계산하였다.

3. 연분수를 이용한 계산법

오일러는 1737년과 1738년에 상수 e와 관계된 세 가지 중요한 전개식을 발표하였다. 편의상 다음과 같은 기수법을 사용한다.

$$x = a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots]$$

그 첫 번째 전개는

$$e = [2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,1,12,\cdots]$$

$$e = \left\{2, 3, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \frac{1264}{465}, \frac{1457}{536}, \frac{2721}{1001}, \cdots\right\}$$

두 번째는

$$\sqrt{e} = [1;1,1,1,5,1,1,9,1,1,13,1,1,17,\cdots]$$

마지막으로는

$$\frac{e-1}{2} = [0;1,6,10,14,18,22,26,30,34,38,42,\cdots]$$

$$e = \left\{0, 3, \frac{19}{7}, \frac{193}{71}, \frac{2721}{1001}, \frac{49171}{18089}, \frac{1084483}{398959}, \cdots\right\}$$

위에서 보면 e의 연분수의 수렴속도가 $\frac{e-1}{2}$의 수렴속도보다 늦다는 것을 알 수 있다.

이제 $x = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k]$ 라하고 $\frac{p_k}{q_k}$를 연분수 x의 k번째까지의 수라고 하자. 그러면 다음과 같은 순환 관계를 얻는다.

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$$

여기서 초기 조건은 $p_{-1} = 1$, $p_0 = a_0$, $q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$이다.

만약 $\frac{e-1}{2}$에 대한 연분수를 사용한다면 $a_k = 4(k-1)+2$ (단, $k > 1$)이고. 연분수의 k 번째까지의 수는 $\frac{p_k}{q_k}$이고 이를 이용하여 e에 대한 연분수의 k번째까지의 수는 $2\frac{p_k}{q_k}+1$이 된다. 예를 들면 $k=1500$이면 e는 소수점이하 10^4자리, $k=12000$이면 e는 소수점 이하 10^5자리의 값을 얻을 수 있다 (Eli Maor, 1994).

4. 무한 곱을 이용한 계산법

무한 곱을 이용한 e의 값을 계산하는 공식은 여러 가지 있지만 여기서는 1873년 카탈란(Catalan, ?)에 의하여 얻어진 공식을 설명한다.

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

이라 하면

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)!} = S_n\left(1 + \frac{1}{(n+1)! \times S_n}\right) = S_n\left(1 + \frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

분명히 u_{n+1}은 정수이다. 그리고

$$u_n = n! \times S_{n-1},$$

$$u_{n+1} = (n+1)! \times S_n = (n+1) \times n! \times \left(S_{n-1} + \frac{1}{n!}\right) = (n+1)(n! \times S_{n-1} + 1)$$

그러므로 수열 u_n을 다음과 같이 정의하면

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = (n+1) \times (u_n + 1)$$

$$e = \Pi\left(\frac{u_n+1}{u_n}\right) = 2\left(\frac{5}{4}\right) \times \left(\frac{16}{15}\right) \times \left(\frac{65}{64}\right) \times \left(\frac{326}{325}\right) \times \cdots$$

을 얻는다.

5. 지수함수를 이용한 계산법

지수함수의 급수전개는

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

이다. 이 급수로부터

$$e = \exp(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

을 계산하는 대신에 급수의 이점을 살려 다음과 같이 계산하여 보면

$$\exp\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \times 2!} + \frac{1}{2^3 \times 3!} + \frac{1}{2^4 \times 4!} +$$

$$\exp\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\right) + \cdots$$

$$\exp\left(\frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4 \times 2!} + \frac{1}{2^6 \times 3!} + \cdots$$

$$\exp\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{2^2}\right)^2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7}\right) + \cdots$$

$$\exp\left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(1 + \frac{1}{2^2}\right)^4 + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^8}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^{10}}\right) + \cdots$$

$\exp\left(\frac{1}{2}\right)$, $\exp\left(\frac{1}{4}\right)$, …이 빠른 속도로 e에 수렴하고 있기 때문에 $\exp\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\exp\left(\frac{1}{4}\right)^4$, …을 계산하는 것이 좋다. 일반적으로는

$$e = \exp(1) = \exp\left(\frac{1}{2^N}\right)^{2^N}$$

여기서 N은 연속적인 제곱수이다.[3)]

6. 새로운 급수 전개를 이용한 계산법

우선, Maclaurin 급수에 의해 $\ln(1+x)$를 전개하여 보자(이 급수는 $-1<x\leq 1$에서 수렴한다.).

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\cdots$$

여기서 x대신 $\frac{1}{x}$로 대치하고 x를 곱하면

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$
$$= 1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{4x^3}+\frac{1}{5x^4}-\cdots$$
$$\equiv P(x), \qquad x \geq 1$$

따라서, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{P(x)} = e\times e^{P(x)-1}$

$$= e\left[1+(P(x)-1)+\frac{(P(x)-1)^2}{2!}+\frac{(P(x)-1)^3}{3!}+\cdots\right]$$

또는,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\left[1-\frac{1}{2x}+\frac{11}{24x^2}-\frac{7}{16x^3}+\frac{2447}{5760x^4}-\frac{959}{2304x^5}+\cdots\right], \quad x\geq 1. \quad \cdots(1)$$

이 급수는 고전적 접근 방법에는 오차가 있음을 보여준다. 그것은 단지 일차근사에서의 정확도, 즉, 급수(1)이 $\frac{1}{x}$의 비가 되는 항을 가지고 있기 때문에 작은 값 x에 대하여 접근이 아주 정확하지 않다. 이 항은 비교적 작은 값 x보다는 크다. 고전적 접근에서의 급수는 그 취약점이 항의 정밀도에 있다는 사실을 이용하여 그 정밀도를 개선할 수 있는 새로운 대수적 표현을 만들 수 있다.

급수를 이용하여 e 에 접근하는 새롭고 좀더 정확한 접근을 얻기 위한 길은 반복되는 "부트스트랩핑(bootstrapping)" 즉, 나은 방법을 얻기 위하여 두 개의 좋은 접근식을 조합하는 방법을 포함한다. 우선 이차접근 방법을 얻기 위해서는 하나의 e의 접근 즉, $e\left(1+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$를 얻는다.

$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$와 $\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$에 대하여 두 급수를 합하여 e에 이차 접근을 얻어낼 수 있다. 즉,

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$$
$$= \left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{4x^3}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{24x^3}-\cdots\right)$$
$$= 1+\frac{5}{24x^2}-\frac{5}{24x^3}+\cdots \qquad \equiv q(x)$$

따라서,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{2x}\right) = e\times e^{q(x)-1}$$

또는,

ACM: $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{2x}\right)$

$$= e\left[1+\frac{5}{24x^2}-\frac{5}{24x^3}+\frac{1187}{5760x^4}-\frac{587}{2880x^5}+\frac{117209}{580608x^6}-\cdots\right] \quad \cdots(2)$$

(2)를 "가속화 된 고전적 방법(Accelerated Classical Method)"이라고 부른다.

급수(2)는 처음 항이 x의 멱이 크기 때문에 고전적 방법보다 좀 더 정확함을 보여준다. 그러므로 괄호 속의 항의 합은 급수(1)보다 $x\geq 1$인 모든 x에 대하여 1에 더 가깝다.

또 다른 이차 접근은 $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$에 대하여 "거울상(mirror image)"이라고 하는

$$-x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{4x^3}+\frac{1}{5x^4}+\cdots$$

급수를 더하였을 때 얻는 결과이다. 이 합에서는 $\frac{1}{2x}$

3)http://xavier.gourdon.free.fr/Constants/E/e.html에서 발췌

항이 소거되고 모든 x의 소수멱항들은 소거되어 전개된다. 그 합을 2로 나누고 지수표현을 하면

$$\text{MIN}:\ \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$$

$$= e\left[1+\frac{1}{3x^2}+\frac{23}{90x^4}+\frac{1223}{5670x^6}+\cdots\right],\ x>1 \quad \cdots(3)$$

이 된다. 이 방법을 "거울 상 방법" 또는 "MIN" 이라고 한다.

이 두 개의 이차 접근을 조합하여 다음과 같은 삼차 접근방법을 만들 수 있다.

$$\text{ACMMIN}: (x+1)^{\frac{11x}{6}}(x-1)^{\frac{5x}{6}}\left(\frac{2x+1}{2x^{x+1}}\right)^{\frac{8}{5}}$$

$$= e\left[1-\frac{5}{9x^3}+\frac{19}{120x^4}-\frac{77}{180x^5}+\frac{137}{1008x^6}-\cdots\right],\quad x>1$$

이들 외에 공식을 구하는 것이 복잡하고 이해하기가 다소 어려운 pade 접근법, AGM에 기초한 접근법, 또는 e를 계산하기 위한 프로그램 접근법 등이 있지만 컴퓨터를 사용하고 프로그래밍을 이해할 수 있다면 앞으로 연구해 볼 만하다(John Knox & Harlan, Brothers, 1999).

V. 상수 e의 Spreadsheet 상에서의 계산

e = 2.71828182845905000000000000000000⋯

Excel Spreadsheet 상에서 가장 간단히 e의 값을 계산하는 방법은 지수함수 exp(1)을 소수30째 자리까지 구하는 것이다. 그러나 이 값은 Spreadsheet에서는

소수 14자리까지밖에 나타나지 않는다. 이렇게 되는 이유는 Excel상의 버그나 한계가 아니고 Excel의 IEEE 754 Floating-point 표준을 준수하기 때문이다. 이를 기준으로 하여 IV 장에 기술한 접근법을 직접 Spreadsheet 상에서 계산하는 방법과 그 결과 어느 정도 계산할 수 있는가를 살펴보자

1. 고전적 정의를 이용한 계산

Exel sheet 상에서 계산은 A셀에 수 n 의 값을 주고 C셀에 수식 함수 '=(1+1/An)^An '을 입력하면 주어진 n의 값의 변화에 따라 수식 함수를 입력한 C셀에서 쉽게 그 값의 변화를 볼 수 있다. 그러나 주어진 e의 값에 접근하는 것은 n의 값이 아주 커야만 접근하고 있음을 알 수 있다.

C20 =(1+1/A20)^A20

	고전적 정의를 이용한 계산	
n	(1+1/n)^n	상대오차
1	2.000000000000000000000000000000	0.35914091422952300000000
2	2.250000000000000000000000000000	0.20812525709290900000000
3	2.370370370370370000000000000000	0.14677514638116000000000
4	2.441406250000000000000000000000	0.11340823693682500000000
5	2.488320000000000000000000000000	0.09241650127758700000000
10	2.593742460100000000000000000000	0.04801531774062160000000
20	2.653297705144420000000000000000	0.02449183263100400000000
30	2.674318775870300000000000000000	0.01643897241623190000000
40	2.685063838389970000000000000000	0.01237139675941420000000
50	2.691588029073600000000000000000	0.00991749075159466000000
100	2.704813829421530000000000000000	0.00497927025180751000000
1,000	2.716923932235520000000000000000	0.00049979177091168700000
10,000	2.718145926824360000000000000000	0.00004999791709037560000
100,000	2.718268237197530000000000000000	0.00000499997069115186000
10,000,000	2.718281693980370000000000000000	0.00000004947194138850630
11,000,000	2.718281705026330000000000000000	0.00000004540836131748930
40,000,000	2.718281802626450000000000000000	0.00000000950328125707491
40,000,001	2.718281798148480000000000000000	0.00000001115063324677310
10,000,000,000,000	2.716110034086890000000000000000	0.00079959734505924200000

<그림 1> 고전적 정의를 이용한 계산

2. 급수를 이용한 계산

Excel sheet 상에서 계산은 고전적인 방법과 비슷하다. 우선 F셀에 수식함수 '=fact(An)'을 입력하여 계산한 다음 C셀에 수식함수 '=C(n-1)+1/Fn'을 입력하면 C셀에 e 값의 계산되면서 나타난다. 수렴속도가 고전적인 방법보다는 매우 빠르지만 n 값이 170이 넘어 가면 엑셀에서는 계산이 안 된다.

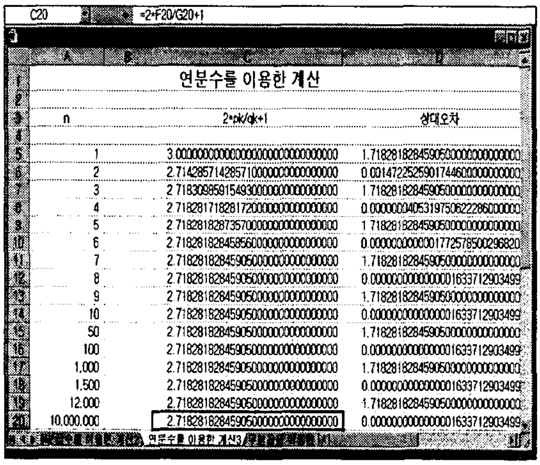
C22 =C21+1/FACT(A22)

	급수를 이용한 계산	
n	1+1/1! +1/2!+1/3!+14!	상대오차
1	2.000000000000000000000000000000	0.359140914229523000000000000000
2	2.500000000000000000000000000000	0.087312731383618000000000000000
3	2.666666666666667000000000000000	0.019355685672142000000000000000
4	2.708333333333330000000000000000	0.003673290507955220000000000000
5	2.716666666666667000000000000000	0.000594538083084202000000000000
6	2.718055555555556000000000000000	0.000083248078953778000000000000
7	2.718253968253970000000000000000	0.000010249301721656100000000000
8	2.718278769841270000000000000000	0.000001125203863926060000000000
9	2.718281525573190000000000000000	0.000000111425490698296000000000
10	2.718281801146380000000000000000	0.000000010047766411168700000000
11	2.718281826198490000000000000000	0.000000000831610677043909000000
12	2.718281828286170000000000000000	0.000000000063597666025328100000
13	2.718281828446760000000000000000	0.000000000004519666747550640000
14	2.718281828458230000000000000000	0.000000000000299786317792172000
15	2.718281828458990000000000000000	0.000000000000018460955809540000
16	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000000816856451749543
17	2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
18	2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
50	2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908

<그림 2> 급수를 이용한 계산

3. 연분수를 이용한 계산

Excel sheet 상에서 계산은 다소 복잡하다. 우선 A셀에 k값을 입력하고, E셀에는 a_k를 계산하는 수식함수 '=4*(An-1)+2'를 입력하여 a_k를 계산한 다음, F셀에는 p_k를 계산하는 수식함수 '=En*F(n-1)+F(n-2)'를 입력하여 계산하고, G셀에는 q_k를 계산하는 수식함수 '=En*G(n-1)+G(n-2)'를 입력하여 계산을 끝내고 나서 마지막으로 C셀에 e값을 구하는 수식함수 '=2*Fn/Gn+1'을 입력하면 e의 접근 값들이 C셀에 나타난다. 수렴속도가 아주 빠르다.



C20 =2*F20/G20+1

연분수를 이용한 계산

n	2*pk/qk+1	상대오차
1	3.000000000000000000000000000000	1.718281828459050000000000000000
2	2.714285714285710000000000000000	0.001472252590174460000000000000
3	2.718309859154930000000000000000	1.718281828459050000000000000000
4	2.718281718281720000000000000000	0.000000040531975062228600000000
5	2.718281828735700000000000000000	1.718281828459050000000000000000
6	2.718281828458560000000000000000	0.000000000000177257850029682 0
7	2.718281828459050000000000000000	1.718281828459050000000000000000
8	2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349 9
9	2.718281828459050000000000000000	1.718281828459050000000000000000
10	2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349 9
50	2.718281828459050000000000000000	1.718281828459050000000000000000
100	2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349 9
1,000	2.718281828459050000000000000000	1.718281828459050000000000000000
1,500	2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349 9
12,000	2.718281828459050000000000000000	1.718281828459050000000000000000
10,000,000	2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349 9

연분수를 이용한 계산3

<그림 3> 연분수를 이용한 계산

4. 무한 곱을 이용한 계산

Excel 에서의 계산은 연분수를 이용한 계산보다는 비교적 쉽다. A셀에 수 n의 값을 넣고, E셀에 u_n을 계산할 수 있는 수식함수 '=(An+1)*(En+1)'을 넣어 계산한 다음 C셀에 무한 곱을 계산할 수 있는 수식함수 '=(En+1)/En'을 입력하면 C셀에 e의 접근값이 나타난다. 비교적 빠르다.

5. 지수함수를 이용한 계산

Excel sheet상에서 계산은 A셀에 수 n을 넣고 E셀에 2^n을 계산할 수 있는 수식 함수 '=2^An'을 입력하여 계산한 다음 C셀에 수식 함수 '=EXP(1/En)^En'의 값을 입력하면 e의 접근값이 나타나는데 n이 50부터 근접한 값이 나타난다.

C22 =EXP(1/E22)^E22

지수함수를 이용한 계산

n	exp(1/2^N)^N	상대오차
1	2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000163371290349908
2	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000000163371290349908
3	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000000163371290349908
4	2.718281828459040000000000000000	0.000000000000000147034161314918 0
5	2.718281828459050000000000000000	0.000000000000000179708419384899 0
6	2.718281828459030000000000000000	0.000000000000000441102483944755 0
7	2.718281828459070000000000000000	0.000000000000000816856451749536 0
8	2.718281828458990000000000000000	0.000000000000001895106968058970 0
9	2.718281828458990000000000000000	0.000000000000001895106968058970 0
10	2.718281828458700000000000000000	0.000000000000012806309163434500 0
11	2.718281828458700000000000000000	0.000000000000012806309163434500 0
12	2.718281828457440000000000000000	0.000000000000058944361558281700 0
13	2.718281828457440000000000000000	0.000000000000058944361558281700 0
14	2.718281828462340000000000000000	0.000000000000121384868729835000 0
15	2.718281828452460000000000000000	0.000000000000242197937944326000 0
16	2.718281828472310000000000000000	0.000000000000487843010111482000 0
17	2.718281828432770000000000000000	0.000000000000966749610654929000 0
20	2.718281828432770000000000000000	0.000000000000966749610654929000 0
26	2.718281808182470000000000000000	0.000000007459334023415550000000

지수함수를 이용한 계산5

<그림 4> 지수함수를 이용한 계산

6. 새로운 급수를 이용한 계산

1) 가속화된 고전적 계산 방법(ACM)

Excel sheet 상에서 A셀에 수 x의 값을 주고 E셀에 고전적 방법의 수식 함수 '=(1+1/x)^x '을 입력하여 계산하고, F셀에 수식 함수 '=(1+1/(2*x)) '을 입력한 다음 C셀에 수식 함수 '=En*Fn '입력하면 e의 접근값을 계산할 수 있다.

2) 거울상 방법의 계산(MIM)

Excel sheet 상에서 A셀에 수 x 값을 입력하고 E셀에 수식 함수 '=(An+1)^(An/2)' 을 입력하고, F셀에 수식 함수 '=(An-1)^(An/2)' 을 입력한 다음 C셀에 수식 함수 '=En/Fn'을 입력하면 e 의 접근값이 계산된다.

3) 삼차 접근 계산법(ACMMIM)

Excel Sheet 상에서는 A셀에 수 x 의 값을 입력하고 E셀에 수식 함수
'=(An+1)^(11*An/6)'을, F셀에는 수식 함수
'=(An-1)^(5*An/6)'을, G셀에는 수식
함수 '=(2*An+1)^(8/5)'을, H셀에는 수식 함수 '=(2*An^(An+1))^(8/5)'을 입력하고 계산하고 난 다음 C셀에 수식 함수 '=En*Fn*Gn/Hn'을 하면 e 의 접근값이 계산된다.

VI. Spreadsheet 상에서의 e의 계산 결과 비교

앞 장에서 계산한 결과와 결과의 그래프를 간단히 비교 기술하고 학교 현장에서 효율적으로 지도할 수 있는 방법을 모색하여 보자.

1. 고전적 정의를 이용한 계산(CM)

sheet 상에서 e 의 계산을 지도하는데 계산 작업이 수월한 반면 수렴 속도가 아주 느리고, 상대오차의 변화가 완만하여 계산의 정확도가 떨어진다. n값이 10^7이 되어서야 소수 넷째 자리까지 정확한 값을 알 수 있다. 또한 1E+15 자리부터는 값이 부정확하다. 이는 엑셀의 한계로 여겨진다.

<표 1> 고전적 정의를 이용한 계산

n	(1+1/n)^n	상대오차
1	2,0000000000000000000	0,3591409142295230000000000
2	2,2500000000000000000	0,2081252570929090000000000
3	2,3703703703703700000	0,1467751463811600000000000
4	2,4414062500000000000	0,1134082369368250000000000
5	2,4883200000000000000	0,0924165012775870000000000
16	2,6379284973666000000	0,0304607691878914000000000
17	2,6424143751831100000	0,0287114140720929000000000
18	2,6464258210976900000	0,0271520957770712000000000
19	2,6500343266404400000	0,0257534406752849000000000
20	2,6532977051444200000	0,0244918326310040000000000
26	2,6677849665337500000	0,0189283853679206000000000
27	2,6695939778125700000	0,0182379234636910000000000
28	2,6712778534408400000	0,0175960636059094000000000
29	2,6728491439808100000	0,0169978483748519000000000
30	2,6743187758703000000	0,0164389724162319000000000
40	2,6850638383899700000	0,0123713967594142000000000
50	2,6915880290736000000	0,0099174907515946600000000
100	2,7048138294215300000	0,0049792702518075100000000
1,000	2,7169239322355200000	0,0004997917709116870000000
10,000	2,7181459268243600000	0,0000499979170903756000000
100,000	2,7182682371975300000	0,0000049999706911518600000
10,000,000	2,7182816939803700000	0,0000000494719413885063000
11,000,000	2,7182817050263300000	0,0000000454083613174893000
40,000,000	2,7182818026264500000	0,0000000095032812570749100
40,000,001	2,7182817981484800000	0,0000000111506332467731000

그러나 어느 정도 수열의 극한을 이해하고, 극한값으로 나타나는 무리수 e를 이해할 수 있다(<표 1>, <그림5>, <그림6> 참고).

2. 급수를 이용한 계산

e의 급수 전개를 사용하여 계산하면 sheet 상의 계산 작업은 고전적인 방법만큼이나 쉽고 수렴속도도 고전적인 방법보다 훨씬 빠르고 상대오차의 변화도 크다. n 값이 17부터 Excel이 지원하는 소수 열 넷째 자리까지 정확하게 계산하여 보여준다. 그러나 n 값이 171부터는 계산이 되지 않는다. 이 또한 엑셀 프로그램이 가지고 있는 한계로 여겨진다. 비교적 무한급수의 합을 이해하는데 도움이 되고 무한급수의 합으로 무리수 e의 값을 이해할 수 있어 매우 효과적이라 할 수 있다.(<표 2>, <그림 5>, <그림 6>참고)

<표 2> 급수를 이용한 계산

n	1+1/1! +1/2!+1/3!+14!	상대오차
1	2,0000000000000000000000	0,359140914229523000000000000000
2	2,5000000000000000000000	0,087312731383618000000000000000
3	2,6666666666666700000000	0,019355685672142000000000000000
4	2,7083333333333300000000	0,003673290507955220000000000000
5	2,7166666666666700000000	0,000594538083084202000000000000
6	2,7180555555555600000000	0,000083248078953778000000000000
7	2,7182539682539700000000	0,000010249301721656100000000000
8	2,7182787698412700000000	0,000001125203863926060000000000
9	2,7182815255731900000000	0,000000111425490698296000000000
10	2,7182818011463800000000	0,000000010047766411168700000000
11	2,7182818261984900000000	0,000000000831610677043909000000
12	2,7182818282861700000000	0,000000000063597666025328100000
13	2,7182818284467600000000	0,000000000004519666747550640000
14	2,7182818284582300000000	0,000000000000299786317792172000
15	2,7182818284589900000000	0,000000000000018460955809540000
16	2,7182818284590400000000	0,000000000000000816856451749543
17	2,7182818284590500000000	0,000000000000000163371290349908
18	2,7182818284590500000000	0,000000000000000163371290349908
50	2,7182818284590500000000	0,000000000000000163371290349908
100	2,7182818284590500000000	0,000000000000000163371290349908
150	2,7182818284590500000000	0,000000000000000163371290349908
160	2,7182818284590500000000	0,000000000000000163371290349908
170	2,7182818284590500000000	0,000000000000000163371290349908

3. 연분수를 이용한 계산

sheet 상의 계산 작업이 다소 복잡하나 수렴속도가 아주 빠르다. 상대오차의 변화도 처음부터 변화가 크지 않아 정확도가 아주 좋다고 할 수 있다. k 값이 7부터 1E+35 까지 Excel이 지원하는 소수 열 넷째 자리까지 정확한 값을 나타내며 k 값이 1E+36 부터는 계산되지 않는다. 계속하여 간단한 수열들의 관계를 살펴 볼 수 있으나 연분수에 대한 지도가 부족한 것이 흠이다.(<표 3>, <그림 5>, <그림 6> 참고)

<표 3> 연분수를 이용한 계산

n	2*pk/qk+1	상대오차
1	3,000000000000000000	1,718281828459050000000
2	2,714285714285710000	0,001472252590174460000
3	2,718309859154930000	1,718281828459050000000
4	2,718281718281720000	0,000000040531975062229
5	2,718281828735700000	1,718281828459050000000
6	2,718281828458560000	0,000000000000177257850
7	2,718281828459050000	1,718281828459050000000
8	2,718281828459050000	0,000000000000000163371
9	2,718281828459050000	1,718281828459050000000
10	2,718281828459050000	0,000000000000000163371
50	2,718281828459050000	1,718281828459050000000
100	2,718281828459050000	0,000000000000000163371
1,000	2,718281828459050000	1,718281828459050000000
1,500	2,718281828459050000	0,000000000000000163371
12,000	2,718281828459050000	1,718281828459050000000
10,000,000	2,718281828459050000	0,000000000000000163371
100,000,000	2,718281828459050000	1,718281828459050000000
1,000,000,000	2,718281828459050000	0,000000000000000163371
10,000,000,000	2,718281828459050000	1,718281828459050000000
100,000,000,000	2,718281828459050000	0,000000000000000163371
1,000,000,000,000	2,718281828459050000	1,718281828459050000000
10,000,000,000,000	2,718281828459050000	0,000000000000000163371
100,000,000,000,000	2,718281828459050000	1,718281828459050000000

4. 무한 곱을 이용한 계산법

sheet 상의 계산 작업은 그렇게 복잡하지 않다.

수렴속도도 비교적 빠르다. n 값이 16부터 1E+100까지 정확한 값이 나타나지만 n 값이 1E+101부터 계산되지 않는다. e 의 급수 전개를 무한 곱으로 표현할 수 있는 방법을 유도하는 것이 그다지 쉽지 않아 효율적이지는 못하다(<표 4>, <그림5>, <그림6>참고).

<표 4> 무한곱을 이용한 계산

n	(n+1)•(u1+1)/u1•(u2+1)/u2•...	상대오차
1	2,000000000000000000000	0,359140914229523000000
2	2,500000000000000000000	0,087312731383618000000
3	2,666666666666667000000	0,019355685672142000000
4	2,708333333333333000000	0,003673290507955220000
5	2,716666666666667000000	0,000594538083084202000
6	2,718055555555556000000	0,000083248078953778000
7	2,718253968253970000000	0,000010249301721819500
8	2,718278769841270000000	0,000001125203864089430
9	2,718281525573190000000	0,000000111425490698296
10	2,718281801146380000000	0,000000010047766411168
11	2,718281826198490000000	0,000000000831610677044
12	2,718281828286170000000	0,000000000063597666025
13	2,718281828446760000000	0,000000000004519830118
14	2,718281828458230000000	0,000000000000299949689
15	2,718281828458990000000	0,000000000000018624327
16	2,718281828459040000000	0,000000000000001143599
17	2,718281828459040000000	0,000000000000000163371
18	2,718281828459040000000	0,000000000000000163371
19	2,718281828459040000000	0,000000000000000163371
20	2,718281828459040000000	0,000000000000000163371
50	2,718281828459040000000	0,000000000000000163371
100	2,718281828459040000000	0,000000000000000163371
1,000	2,718281828459040000000	0,000000000000000163371
10,000	2,718281828459040000000	0,000000000000000163371
10,000	2,718281828459040000000	0,000000000000000163371
1,000,000	2,718281828459040000000	0,000000000000000163371
10,000,000	2,718281828459040000000	0,000000000000000163371

5. 지수함수를 이용한 계산법

sheet 상의 계산 작업은 아주 쉽고, 수렴 값은 n 값이 1일 때는 소수 열 넷째 자리까지, n 값이 2부터 4까지는 소수 열 셋째 자리까지 정확한 값을 나타내고, 값이 5일 때 다시 소수 열 넷째 자리까지 정확한 값을 나타내며, n 값이 6, 7일 때는 소수 열 셋째 자리까지, n 값이 8부터 13까지는 소수 열 한 번째 자리까지, n 값이 14부터 25까지는 소수 열 자리까지, n 값이 26부터 30까지는 소수 아홉째 자리까지, n 값이 30부터 51까지는 소수 열 셋째 자리까지 정확한 값을 계산하고 나서 n 값이 52일 때 소수 열 넷째 자리까지 계산하고 나서는 n 값이 53부터 1,023까지는 1.00000…이 되다가 n 값이 1,024부터는 계산되지 않는다(이것은 excel 프로그램이 가지고 있는 한계임.). 비교적 부정확하고, 단순히 e의 값을 어느 정도라고 하는 선에서 수를 이해할 수 있을 뿐이다(<표 5>, <그림5>, <그림6>참고).

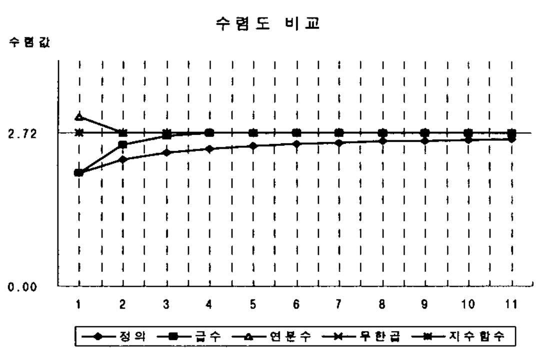
<표 5> 지수함수를 이용한 계산

n	exp(1/2^N)^N	상대오차5
1	2,718281828459050000	0,000000000000000163371290350
2	2,718281828459040000	0,000000000000000163371290350
3	2,718281828459040000	0,000000000000000163371290350
4	2,718281828459040000	0,000000000000000147034161 3149
5	2,718281828459050000	0,000000000000000179708419 3849
16	2,718281828472310000	0,000000000004878430101114820
17	2,718281828432770000	0,000000000009667496106549290
20	2,718281828432770000	0,000000000009667496106549290
26	2,718281808182470000	0,000000007459334023415550000
31	2,718281808182470000	0,000000007459334023415550000
32	2,718281828142600000	0,000000000116415277462381000
33	2,718281828300820000	0,000000000058207557042157000
34	2,718281828379930000	0,000000000029103778520231500
46	2,718281828459030000	0,000000000000007024965485046
47	2,718281828459040000	0,000000000000003430797097348
51	2,718281828459040000	0,000000000000000163371290350
52	2,718281828459050000	0,000000000000000000000000000
53	1,000000000000000000	1,718281828459050000000000000
1023	1,000000000000000000	1,718281828459050000000000000

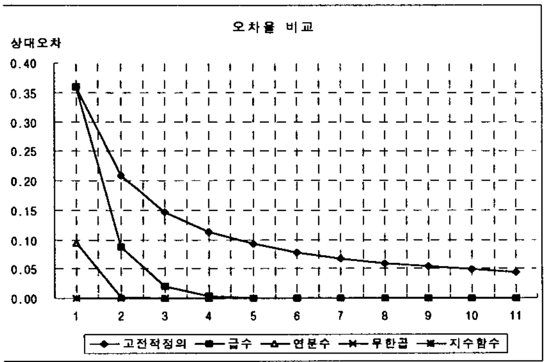
6. 새로운 급수를 이용한 접근 방법

이 방법은 가장 최근에 발견된 방법으로 자연 로그함수의 매크로린 급수 전개에 착안하여 고전적 정의를 이용한 방법에서 출발하여 오차를 빼는 방법으로 급수를 만들어 접근하는 방법으로 sheet 상의 계산 작업이 다소 복잡하고 수렴값들의 속도는 비교적 빠른 편이나(새로운 급수를 이용한 수렴의 그래프 참고) 실제 계산한 결과들(표 생략)이 비교적 정확하지 못하고, 특히 학교 현장에서는 급수전개를 설명하기가 쉽지 않아서 비효율적이라고 하겠다.

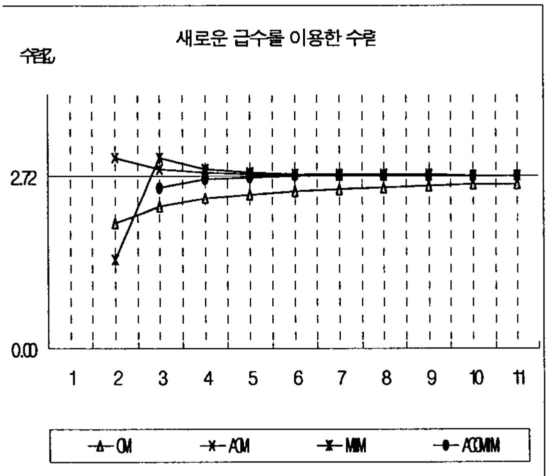
이상에서 학교 현장에서 실험수학의 방편으로 직접 탐구하고 관찰하기에는 고전적 정의를 이용한 접근방법(수렴 속도가 아주 느리고, 수렴 값이 소수 열 넷째 자리까지 나타나지는 않지만 수열의 극한을 이해하고 그 극한값으로 무리수 e 를 취할 수 있다.)과 급수를 이용한 접근방법(무한 급수를 이해하고 무한 급수의 합으로 무리수 e 를 취할 수 있다.) 이 Excel sheet 상에서 계산 작업이 쉽고 수렴정도와 오차율을 비교하기가 수월하고, 짧은 시간에 e 의 값을 소수 열 넷째 자리까지 정확하게 확인할 수 있어서 지도하는 데는 효과적이라고 할 수 있다. 여기에 덧붙인다면 정확도나 수렴속도가 좋은 연분수를 이용한 계산법으로 지도하는 것도 흥미를 유발하는 데는 효율적인 도구가 될 수 있으나, 시간이 많이 소요된다는 점을 고려하여야 할 것이다.



<그림 5> 계산방법별 수렴도



<그림 6> 계산방법별 상대 오차율 비교



<그림 7> 새로운 급수를 이용한 수렴도 비교

VII. 결 론

고도의 지식 정보화사회가 도래하면서 다양한 멀티미디어 매체들이 교육현장에도 도입되고 있으며 이를 활용하여 교육의 질을 높이기 위한 연구와 노력이 요구되고 있다. 정보화의 물결이 교육현장 구석구석에 영향력을 발휘하고 있으나 수학교육현장은 아직도 종래의 교육방법을 획기적으로 개선하지 못한 상태에서 이뤄지고 있다. 현 시점에서 수학교육에서의 커다란 장애 가운데 하나는 학생들이 수식으로부터 개념을 쉽게 구체화하지 못한다는 점이다. 한정된 수업시간으로 인한 설명부족과 엄밀한 수학적 증명을 동반하기가 어려운 점 때문에 대부분 개념을 직관에 호소하고 있는 셈이다. 따라서 본 논문에서는 수학에서의 실험과 관찰이라는 실험수학적 측면에서 우리가 쉽게 이용할 수 있는 Spreadsheet프로그램인 엑셀을 이용하여 수학에서 중요한 역할을 하는 상수 e 를 탐구적으로 살펴보았다.

e 라는 수는 단순히 극한값으로 지수함수나 자연로그함수의 밑 이상의 중요한 의미를 갖고 있는 수임에도 불구하고 학생들에게 그러한 중요성을 인식하도록 하는 데에 있어서는 현행 교과서 내용만으로는 그 설명이 턱없이 부족한 것이 사실이다. 따라서 상수 e 의 극한에 의한 정의 이외에 수를 구체적으로 이해하기 위하여 이 논문에서는 상수 e 의 해석적 접근에서 벗어나 e 값을 구하기 위한 여러 형태의 접근 방법을 Excel Spreadsheet 상에서 직접 계산하고 상대오차[4]를 구하여 그래프로 그리는 실험을 하였다. 그 결과를 비교, 관찰하여 효율적인 방법을 골라 지도함으로써 무리수 e 의 이해와 더불어 무리수 e 로 표현되는 지수함수, 자연로그함수 뿐만 아니라 무리수 e 를 사용하는 모든 표현을 이해하는데 좀 더 가까이 접근하고자 하였다.

수학교육에 있어서 학습자 활동이 함께 어우러지면 학습 효과는 더욱 증대되겠지만 현재 학교의 교실 환경으로는 학습자가 함께 하기에는 턱없이 부족하다. 컴퓨터를 이용한 학습 교실이 전산실 한 장소로 제한되어 있기

4) 오차가 발생하였을 때, 그 오차의 절대값의 참값에 대한 비율을 상대오차라고 한다. 참값 A에 대한 근사값을 a라 할 때, a-A의 절대값을 절대오차라 하고 참값 A에 대한 비율을 근사값 a에 대한 상대오차 또는 오차율이라고 한다.

때문에 학습자들이 수학 학습을 하기에는 아직은 쉽지 않고 장소 또한 마땅하지 못하다. 제7차 교육 과정부터는 교과별 수업을 위한 특별 교실들이 마련되어 질 것으로 여겨지며 그 때가 되면 수학 학습(실험 수학)을 위한 전산실(수학교실)도 또한 마련될 것이다. 그렇게 된다면 이 내용을 지도하는 것도 한결 수월하고 학습의 효과 또한 매우 크게 되리라 확신한다.

하루가 다르게 정보화 사회로 접어들면서 새로운 정보공학적인 도구들이 교육현장에 나타남으로써 수학교육에서도 실험과 탐구, 관찰이라는 활동을 통해 수학활동을 즐거운 교과활동으로 변화시켜야 한다. 뿐만 아니라 첨단기술을 수학교육에 도입하여 창의적이고 실용적인 지식을 전달하고 변화하는 사회 속에서 과학기술의 기초로서 수학이 중요한 역할을 계속 담당하도록 하기 위한 개혁이 요구된다. 아울러 학교 내에서도 실험수학 등의 새로운 수학 교육방법의 조속한 도입과 수학교실을 운영하여 수학의 중요성을 재차 강조하고 또 학생들에게도 수학이 어려운 교과목이 아니라 자연현상을 설명할 수 있는 재미있고 즐거운 교과목임을 강조할 필요가 있다.

참 고 문 헌

양영오(1996). 「해석학」, 청문각

Eli Maor (1994). *e : The Story of a Number*, Princeton University Press.

Florian Cajori (1925). A History of Elementary mathematics, 정지호 역 (1977) 창원사

Howard Evas (1953). *An Introduction to the History of Mathematics*, 이우영외 1인 역(1996) 서울: 경문사

Hae-Soo Oh (1992). *Use of Computer as a Tool of Mathematics Education*, Mathematics Education, Korean Mathematical Society **10**.

John Knox. & Harlan, Brothers (1999). *Novel Series-based Approximations to e*, College Mathematics Journal **30(4)**, pp.269-273

Johnson, R & Pfaffenberger, W. E (1981). *Foundation of Mathematical Analysis*, Marcel Dekker, Inc.

Experimental Comparison for Constant e using Spreadsheet

Kim, Chul-Soo

Department of Computer Science and Statistics Cheju National University, Cheju 690-756, Korea;

E-mail: cskim@cheju.cheju.ac.kr

Yang, Young-Gun

Hallim High School

Hallim-ri, Bukcheju-gun, Cheju-do

We investigated an irrational constant e and compared its computational methods using spreadsheet. Such methods are based on classical definition, infinite series, continued fraction, infinite product, exponential function and accelerated classical method. This kind of work is focused on experimental mathematics using computers in math class. This approach will be helpful for mathematics teachers to teach constant e in their classroom.