韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2001, 5. 제 40권, 제 1호, 103-112.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Nov. 2001, Vol. 40, No. 1, 103-112.

코시 부등식에 관한 연구

한 인 기 (경상대학교)

1. 서 론

최근 들어 수학교육의 다양한 분야들에 대한 연구가 활성화되고 있으며, 중·고등학교의 수학 교수-학습 현장에 대한 연구 뿐만 아니라, 예비 교사들에 대한 사범대학에서의 수학교육에 대한 관심도 크게 증폭되고 있다. 국립 사범대학 학장 협의회(2000)에서는 교육부 정책 연구 과제로 국립 사범대학 표준 교육과정에 관한 연구 보고서를 발간하여, 사범대의 특수성을 살린 교육과정에 대한 모색을 시도하였다.

과연, '수학자'를 위한 수학과 '교사'를 위한 수학은 달라야 하는가? 교사를 위한 수학이란 무엇인가? 이 물음과 관련하여, 박한식(1991)은 그의 저서 '교직수학'에서 교직수학은 '이 책의 내용을 학생들에게 지도하라는 것은 결코 아니다. 수학을 학생들에게 지도함에 있어서 이 책의 내용을 알고 있으면, 교실에서 수학을 지도할 때 마음의 여유가 생길 것이고….'와 같이 규정하고 있다. 이로부터 우리는 교직 수학의 정체성에 대한 몇 가지 아이디어를 얻을 수 있는데, 첫째 교직 수학에서 다루는 내용이 중·고등학교 학생들에게 필수적이지는 않으며, 둘째 중·고등학교의 수학 교과 내용에 관련된 다양하고 깊이 있는 지식을 제공하여 교사들에게 폭넓은 식견을 가질 수 있는 기회를 제공하는 것이다.

특히, 박한식 교수는 1998년 한국 교원 대학교에서 개최된 '98 ICMI-EARCOME1에서 '수학 교사의 수학'이라는 논문을 발표하였고, 2000년 일본에서 개최된 ICME9에서도 '수학교사를 위한 수학(통계에 대해)' 라는 논문을 발표하는 등 '수학 교사를 위한 수학'의 정체성 확립을 위해 많은 연구를 수행하고 있다.

그리고, 박근생·권영인·이상근·조열제·전영배(1993)는 중등 수학 교사 양성 교육의 개선에 관한 연구에서 사범 대학 수학 교육과에서 지도되는 수학 과목이 중등 수학과의 관련성을 중요시 되어야 한다고 주장하였으며, 전평국(1993)도 전공 수학 교과의 내용이 수학 교육학과 유기적으로 연계되어, 중·고등학교에서 가르쳐야 할 수학 교과의 내용을 효과적으로 가르치기 위한 방법과 과정에 대한 근거를 제시해야 함을 강조하였다.

물론, 수학 교육에 관련된 많은 사람들이 사범대 수학 교육과에 적합한 수학 교육과정과 교과 내용에 대한 체계적인 연구가 중요하다는 것을 인식하고 있지만, 지금까지 사범대 수학 교육과정 내용이나 구체적인 교과 내용들에 관련된 연구들이 미진한 상태이며, 교직 수학의 정체성은 아직 확립되지 못한 듯 하다.

본 연구는 교직수학의 정체성을 모색하기 위한 기초 연구의 하나로서, 중·고등학교에서 다루는 중요한 부등식들 중의 하나인 산술 평균-기하 평균의 관계를 일반화한 코시 부등식에 관련하여 교사들에게 필요한 다양한 증명 방법들, 코시 부등식에 관련된 다른 부등식들, 그리고 코시 부등식의 활용에 대한 다양한 접근들을 소개할 것이다. 특히, 본 논문에서는 코시 부등식에 대한 코시 자신의 증명 방법에 대해 자세히 소개하고 있기 때문에, 수학사를 수학 교수-학습에 활용할 수 있는 기초 자료로 제공하고 있다.

2. 코시의 부등식에 대한 몇 가지 고찰

코시(Cauchy Augustin Louis, 1789 - 1857)는 1805년 에콜 폴리테그닉에 입학하여 라그랑쥬와 라플라스의 지도를 받았으며, 그후 1816년부터 이 학교에서 재직하며 수학을 가르쳤으며, 1848년부터는 파리 대학교에서 교수로 재직하였다. 그는 무한 급수의 수렴과 발산에 관한 연구, 실함수와 복소수 함수론, 미분 방정식, 행렬식, 수리 물리 등의 분야에서 많은 연구 업적을 남겼다.

* 2000년 10월 투고, 2001년 1월 심사 완료.

본 논문에서 고찰할 코시의 부등식을 식으로 나타내면 다음과 같다:

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

이 부등식은 고등학교 과정에서 다루는 중요한 부등식들 중에서 하나인 기하 평균-산술 평균에 관한 부등식, 즉 양수 a, b에 대해, $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$를 n개의 양수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대한 부등식으로 확장한 것이다.

물론, 정규 고등학교 교육과정에서 다루는 부등식인 $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$만을 알고 있어도 수학을 지도하는데 문제가 발생하지 않는다고 말할 수도 있겠지만, 부등식에서 그 항의 수를 3개, 4개, 5개, … 등으로 확장할 수 있는 것은 교사나 학생들에게 큰 의의를 가질 것이다. 즉, 학습자들에게 확산적인 다양한 사고 활동을 가능하게 하는 질문이 '만약 …라면'이다. 만약 부등식 $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$에서 하나의 수를 더 생각해 a, b, c를 생각한다면, 주어진 부등식은 어떤 형태로 될까? 만약, n개의 수에 대해서는 어떤 형태가 될까? 과연, 추측한 부등식은 증명이 될까? 교사가 이와 같은 물음에 답할 수 있다면, 박한식이 지적했던 것처럼, 교실에서 수학을 지도할 때 마음의 여유가 생길 것이다.

물론, 수학 분야에는 코시의 부등식으로 불리는 다음과 같은 부등식들도 있다(뷔노그라도프 책임 편집, 1982):

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

혹은, 복소평면 $\mathbf{C}$의 한 점 a에서 regular analytic function $f(z)$의 $|f^{(k)}(a)|$에 대해,

$$|f^{(k)}(a)| \le k!\frac{M(r)}{r^k}.$$

이때, $M(r)$은 원 $|z-a|=r$에서 $|f(z)|$의 최대값이고, r은 함수 $f(z)$가 regular analytic인 폐원반 $U=\{z\in\mathbf{C} \mid |z-a|\le r\}$ 의 반지름이다.

본 논문에서는 산술 평균-기하 평균의 관계를 임의의 n개의 양수에 대해 일반화한 부등식에 관한 다양한 증명의 아이디어들과 관련된 문제들에 대해 고찰할 것이다.

3. 코시 부등식의 다양한 증명들

우선, $n=2$인 경우는 그 증명이 자명하므로, $n=3$인 경우의 증명부터 살펴보자.

정리 1. $a_1\ge0$, $a_2\ge0$, $a_3\ge0$일 때,

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \ge \sqrt[3]{a_1a_2a_3}.$$

증명. 부등식을 증명하기 위해, 우리는 $\frac{a_1+a_2+a_3}{3}-\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$이 양수임을 증명해야 한다. 이를 위해, $a_1=x^3$, $a_2=y^3$, $a_3=z^3$이라 하면,

$$\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{3} = \frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}{3}.$$

여기서, $x+y+z\ge0$이고, $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\ge 0$이다. 이로부터, $n=3$에 대해 코시 부등식이 증명된다.

이제, $n=4$인 경우에 대해, 증명하여 보자.

정리 2. $a_i\ge0$(i=1, 2, 3, 4)일 때,

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \ge \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}.$$

증명.
$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} &= \frac{(a_1+a_2)+(a_3+a_4)}{4}\\ &\ge \frac{2\sqrt{a_1a_2}+2\sqrt{a_3a_4}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2}\\ &\ge \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}} = \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}.\end{aligned}$$

$n=4$인 경우의 증명에서는 $n=2$인 경우 코시의 부등식을 두 번 연속으로 사용하였는데, 이 아이디어를 이용하면, 모든 2^k꼴의 모든 자연수에 대해서 코시의 부등식을 증명할 수 있다. 실제로, 코시는 부등식에 대한 자신의 증명에서 이 아이디어를 사용하였다. 이제, 임의의

의 n의 값에 대해 증명하여 보자.

정리 3(코시의 부등식). 임의의 양수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대해, $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

단, 이때 등호가 성립할 필요 충분 조건은 모든 a_i가 같은 것이다.

증명 1(코시의 증명 방법)[1].

주어진 부등식의 증명을 위해, 우선 임의의 양수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대해, $n=k$일 때 코시 부등식이 성립하면, $n=2k$일 때도 코시 부등식이 성립한다는 것을 증명하자. 코시 부등식이 $n=k$일 때, 성립한다고 가정하자. 즉,

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}.$$

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2k-1}+a_{2k}}{2k}$$

$$= \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}+\cdots+\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}}{k}$$

$$\geq \sqrt[k]{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}\cdots\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}}$$

$$\geq \sqrt[k]{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}\cdots\sqrt{a_{2k-1}a_{2k}}}$$

$$= \sqrt[2k]{a_1a_2a_3\cdots a_{2k}}.$$

얻어진 식으로부터 우리는 $n=k$일 때 코시 부등식이 성립하면, $n=2k$일 때도 코시 부등식이 성립한다는 것을 알았다. 우리는 이미 $n=2$에 대해서 주어진 부등식이 성립한다는 것을 증명했으므로, $n=2^k$ 꼴인 수에 대해 코시 부등식이 성립한다는 것을 알 수 있다.

이제, 2^k꼴로 쓰여지지 않는 n에 대해, 코시 부등식을 증명하자. 이를 위해, 부등식

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \quad \cdots ①$$

로부터, 다음 부등식이 얻어진다는 것을 증명하자:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}.$$

우선, $a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $a_3=b_3$, $\cdots$, $a_{n-1}=b_{n-1}$라 하고, 다음 등식[2]에서 a_n의 값을 정의하자:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1} \quad \cdots ②$$

이제, 식 ②에서 각 a_i를 b_i로 바꾸고, a_n에 대해 방정식을 풀면,

$$a_n = \frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1} \quad \cdots ③$$

부등식 ①의 좌변에 식 ②를 대입하고, 우변에는 a_i를 b_i로 바꾸고 식 ③을 대입하면,

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}$$

$$\geq \sqrt[n]{b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_{n-1}\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}}.$$

얻어진 부등식의 양변에 n제곱하면,

$$\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}\right)^n$$

$$\geq b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_{n-1}\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}.$$

그리고, 부등식의 양변을 $\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}$으로 나누면,

$$\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\geq b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_{n-1}.$$

이로부터, 구하는 부등식

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{b_1b_2\cdots b_{n-1}}$$

이 유도된다.

이제, 주어진 부등식의 등식이 성립할 필요 충분 조건이 $a_1=a_2=\cdots=a_n$라는 것을 보이자.

---

1) 부등식에 대한 코시의 증명 방법은 시바쉰스키 I. H.(1967)의 책에 기술된 것을 번역하여 소개하는 것임.

2) 부등식 ②는 증명 과정의 어떤 식으로부터 유도된 것이 아니며, $n-1$에 대해 코시 부등식을 증명하는 과정에서 코시가 a_n을 정의하기 위해 도입한 부등식임.

우선, $a_1=a_2=\cdots=a_n$이면, 등식

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

이 성립한다는 것을 쉽게 알 수 있다.

$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$이면, $a_1=a_2=\cdots=a_n$라는 것을 보이자. 귀류법으로, 주어진 값들 $a_1, a_2, \cdots, a_n$들 중의 적어도 두 수 a_1과 a_2가 서로 같지 않다고 가정하였을 때, 코시 부등식에서 오직 부등호 '>'만이 성립한다는 것을 보이자.

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_2}{2}+a_3+\cdots+a_n}{n}$$

의 양변에 코시의 부등식을 각각 사용하면, 다음 두 부등식을 얻을 수 있다:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n} \qquad \cdots ④$$

$$\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_2}{2}+a_3+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_1+a_2}{2}\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n} \qquad \cdots ⑤$$

한편, $a_1\neq a_2$이면, $\dfrac{a_1+a_2}{2}>\sqrt{a_1a_2}$이고,

$$\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_1+a_2}{2} > \sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_1a_2}.$$

이로부터, $a_1\neq a_2$일 때, 부등식 ⑤의 우변은 부등식 ④의 우변보다 크고, 이들의 좌변은 서로 같다. 그러므로, 부등식 ④에서 등호는 성립하지 않는다. 즉, $a_1, a_2, \cdots, a_n$들 중에서 적어도 두 개가 같지 않으면, 다음 부등식이 성립한다:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n}.$$

부등식에 대한 코시의 증명 과정은 크게 세 부분으로 구성되어 있는데, 첫째 부분은 $n=k$일 때 부등식이 성립하면, $n=2k$일 때 부등식이 성립한다는 것, 두 번째 부분은 $n=k$일 때 부등식이 성립하면, $n=k-1$일 때 부등식이 성립한다는 것, 그리고 세 번째 부분은 부등식에서 등식이 성립하는 경우에 대한 증명이다.

$n=2$일 때, 코시의 부등식이 성립하므로(특히, $n=2$일 때는 코시의 부등식은 산술 평균-기하 평균의 관계가 됨), 증명의 첫 번째 부분을 통해, 코시의 부등식이 2^k꼴인 모든 자연수에 대해 성립한다는 것을 주장할 수 있다. 한편, 증명의 두 번째 부분으로부터, 우선 2^k-1인 꼴의 수들에 대해 부등식이 성립함을 알 수 있고, 이를 반복하면 2^k-2, 2^k-3, $\cdots$ 등과 같이 임의의 자연수에 대해 코시의 부등식이 성립한다는 것을 알 수 있다.

2^k꼴인 모든 자연수에 대해 성립한다는 것을 보이고, 2^k-1, 2^k-2, 2^k-3, $\cdots$ 등과 같이 임의의 자연수에 대해 부등식의 성립을 보인 코시의 아름다운 아이디어는 다른 방식으로도 구성할 수 있다. 본 논문에서는 코시의 증명 과정 중에서 두 번째 부분을 좀더 정교화하여 제시하여 보기로 하겠다.

증명 2(코시 증명에서 두 번째 부분에 대한 다른 접근). 만약, n이 2의 거듭제곱이 아니라면, 우리는 n에 어떤 자연수 q를 더해, $n+q$가 2의 거듭제곱이 되도록 할 수 있다. 가령, $n+q=2^l$이라 하자. 코시 증명의 첫 번째 부분에 의해, $n+q$에 대해, 코시 부등식이 성립한다. 즉, 임의의 양수 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+q}$에 대해,

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+q}}{n+q} \geq \sqrt[n+q]{a_1a_2a_3\cdots a_na_{n+1}\cdots a_{n+q}}. \qquad \cdots ⑥$$

이때, 수 $a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots, a_{n+q}$를 임의로 선택했으므로, 다음과 같이 놓을 수 있다:

$$a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=a_{n+q}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

이때, 부등식 ⑥은

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot q}{n+q}$$

$$\geq \sqrt[n+q]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^q}.$$

이로부터,

$$\frac{(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)n+(a_1+a_2+\cdots+a_n)q}{n(n+q)}$$
$$\geq \sqrt[n+q]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^q}.$$

그러므로, $\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$

$$\geq \sqrt[n+q]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^q}.$$

부등식의 양변을 $n+q$제곱을 하면,

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}\right)^{n+q}$$
$$\geq a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^q.$$

이로부터,

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}\right)^n \geq a_1 a_2 a_3 \cdots a_n.$$

그러므로,

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n}.$$

이 증명 과정에서는 코시가 제시한 증명의 아이디어를 좀더 명료하게 하기 위해, n이 2의 거듭제곱이 아닐 경우, 적당한 자연수 q를 택해, $n+q$가 2의 거듭제곱이 되도록 하는 과정을 거쳐 증명을 하였다.

증명 3(수학적 귀납법을 이용한 증명)[3].

(1) $n=2$일 때, 코시 부등식은

$\sqrt{a_1 a_2} \leq \dfrac{a_1+a_2}{2}$이 되므로, 그 증명은 자명하다.

(2) $n=k$일 때, 코시의 부등식이 성립한다고 가정하자. 즉, 다음을 가정하자:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_k}.$$

(3) $n=k+1$일 때, 다음 부등식의 성립을 증명하자:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{k+1}}{k+1} \geq \sqrt[k+1]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{k+1}}.$$

수 $a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}$에서 a_{k+1}을 가장 큰 수라고 하자. 즉, $a_{k+1} \geq a_1$, $a_{k+1} \geq a_2$, $\cdots$, $a_{k+1} \geq a_k$라 하면, 부등식 $a_{k+1} \geq \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$이 성립한다.

이제, $A_k = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$라 하면,

$A_{k+1} = \dfrac{kA_k+a_{k+1}}{k+1}$이다. 한편, $a_{k+1} \geq A_k$이므로, $a_{k+1} = A_k + \alpha\ (\alpha \geq 0)$라 할 수 있다. 그러므로,

$$A_{k+1} = \frac{kA_k+A_k+\alpha}{k+1} = A_k + \frac{\alpha}{k+1}.$$

얻어진 등식의 양변을 $k+1$제곱하면,

$$(A_{k+1})^{k+1} = \left(A_k+\frac{\alpha}{k+1}\right)^{k+1}.$$

등식의 우변을 전개하면,

$$\left(A_k+\frac{\alpha}{k+1}\right)^{k+1}$$
$$= A_k^{k+1} + {}_{k+1}C_1 A_k^k \frac{\alpha}{k+1} + \cdots + \left(\frac{\alpha}{k+1}\right)^{k+1}$$
$$\geq (A_k)^{k+1} + (A_k)^k \cdot \alpha$$
$$= (A_k)^k \cdot (A_k+\alpha) = (A_k)^k \cdot a_{k+1}.$$

귀납법의 가정에 의해, $(A_k)^k \geq a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_k$이므로,

$$(A_{k+1})^{k+1} \geq (A_k)^k \cdot a_{k+1}$$
$$\geq a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{k+1}.$$

양변에 $k+1$ 제곱근을 취하면,

$$A_{k+1} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}$$
$$\geq \sqrt[k+1]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{k+1}}.$$

코시 부등식의 증명에서 기본 아이디어로 수학적 귀납법을 이용하는 것은 임의의 n에 대해 부등식을 증명해야 한다는 측면에서는 자연스러운 접근 방법으로 생각된다. 본인이 알고 있는 수학적 귀납법을 이용한 코시 부등식의 다른 증명 방법을 소개하면 다음과 같다.

3) 이 증명 방법은 시바쉰스키 I.H.(1967)에 소개된 것을 토대로 이해하기 쉽게 재구성한 것임.

증명 4(수학적 귀납법을 이용한 증명).

이제, 코시의 부등식

$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \le \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$을 변형시키기 위해, 부등식의 양변을 양수 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$으로 나누면,

$$1 \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n\cdot\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$$

이다. 이때, $\dfrac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}} = b_1$, $\dfrac{a_2}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}} = b_2$, $\cdots$, $\dfrac{a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}} = b_n$이 되고, 각각의 $b_i > 0$이며, $b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_n = 1$이다. 따라서, 우리가 증명해야 할 것은

모든 n에 대해, $b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_n = 1$일 때,

$$1 \le \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} \qquad \cdots ⑦$$

(단, $b_i > 0$, $i=1,2,\cdots,n$).

이제, 얻어진 부등식을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하자.

(1) $n = 1$일 때, 주어진 부등식은 $\dfrac{b_1}{1} = b_1$인데, 이것은 부등식 ⑦을 만족시킨다.

(2) $n=k$일 때, 부등식 ⑦이 성립한다고 가정하자. 즉, $b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_n = 1$이면,

$$1 \le \frac{b_1+b_2+\cdots+b_k}{k}.$$

(3) $n=k+1$일 때, $b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_n\cdot b_{k+1} = 1$이라 하자. 이때, 부등식

$$1 \le \frac{b_1+b_2+\cdots+b_{k+1}}{k+1}$$

을 증명하자. 이를 위해, 모든 b_i가 1인 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어 생각하자.

(i) 모든 $i = 1, 2, \cdots, k+1$에 대해, $b_i=1$이라 하자. 그러면,

$$1 = \frac{b_1+b_2+\cdots+b_{k+1}}{k+1}$$

이므로, 부등식 ⑦이 성립한다.

(ii) $b_1, b_2, \cdots, b_{k+1}$중에 1이 아닌 것도 있다고 가정하자. 그러면, b_i들 중에는 1보다 큰 수가 적어도 하나 존재하고, 1보다 적은 수도 적어도 하나 존재한다. 왜냐 하면, 만일 모든 b_i가 1보다 크면, $b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_{k+1} > 1$이고, 모든 b_i가 1보다 작으면 $b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_{k+1} < 1$이기 때문이다. 따라서, 편의상 $b_k > 1$, $b_{k+1} < 1$이라 하자. 이때, $b_1\cdot b_2\cdot\cdots b_{k-1}\cdot(b_k\cdot b_{k+1}) = 1$이므로, 가정 (2)에 의해,

$$1 \le \frac{b_1+b_2+\cdots+(b_k\cdot b_{k+1})}{k}$$ 이다. 즉,

$$b_1+b_2+\cdots+(b_k\cdot b_{k+1}) \ge k \qquad \cdots ⑧$$

그런데, $b_k > 1$, $b_{k+1} < 1$이므로,

$$\begin{aligned} b_k\cdot b_{k+1} - b_k - b_{k+1} + 1 &= b_k(b_{k+1}-1)-(b_{k+1}-1) \\ &= (b_k-1)(b_{k+1}-1) < 0. \end{aligned}$$

즉, $b_k\cdot b_{k+1} < b_k+b_{k+1} - 1$이다. 이 부등식을 식 ⑧에 대입하면,

$b_1+b_2+\cdots+b_k+b_{k+1}-1 \ge k$. 따라서,

$$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_k+b_{k+1}}{k+1} \ge 1.$$

본 연구에서는 코시의 부등식에 대한 다양한 증명 방법을 고찰하고 있다. 이것을 통해 코시 부등식에 대한 수학사적 지식, 그리고 다양한 문제해결 아이디어에 대한 폭넓은 고찰 뿐만 아니라 학생들이 수학에 대한 심미적 견해를 가지도록 하는데 도움을 줄 수 있다. 이와 관련하여, 로쉬나 N. L(1996)는 '한 가지 문제를 다양한 방법으로 풀어보는 것은 수학교육에서 학생들의 심미적인 양육에 있어 커다란 가능성을 가진다.'고 강조하였다. 이제, 코시 부등식에 대한 다른 증명 방법을 살펴보자.

증명 5(합이 일정한 양수의 곱은, 각 인수들이 같을 때 최대임을 이용)[4].

다른 증명 방법을 하나 더 살펴보자. 이 증명을 위해서는 우선, 다양한 문제 해결 과정에서 폭넓게 활용되는

4) 이 증명 방법은 시바쉰스키 I. H.(1967)가 소개된 한 것을 토대로 이해하기 쉽게 재구성한 것임.

다음의 보조 정리를 이용한다: '합이 일정한 n개의 양수의 곱은 각 인수들이 같을 때, 최대값을 가진다.'. 우선, 코시의 부등식에 대한 증명을 살펴보고, 보조 정리에 대한 증명을 탐구하여 보자.

n개의 수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$의 합을 nc라고 하면, 이 수들의 곱은 각 a_i가 c값을 가질 때 최대가 된다. 그러므로,

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \le c^n.$$

한편, $a_1, a_2, \cdots, a_n$의 합이 nc이므로, 이로부터,

$$c = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

이것을 위의 부등식에 대입하면,

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \le \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n.$$

양변에 n제곱근을 취하면,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

이제, 보조 정리 '합이 일정한 n개의 양수의 곱은, 각 인수들이 같을 때 최대값을 가진다.'는 것의 증명을 살펴보기로 하자.

y_i에 대해, $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = nc$이지만, y_i중에서는 같지 않은 것이 있다고 가정하자. 이때, y_i중에서는 같지 않은 것이 있다고 가정했으므로, y_i중에는 c보다 큰 것과 c보다 작은 것이 존재한다. 가령, 이러한 수들을 y_1, y_2라 하자. 즉,

$$y_1 = c + \alpha, \ y_2 = c - \beta, \text{ 단 } \alpha > 0, \ \beta > 0.$$

이때, $y_1 \cdot y_2 \cdot \cdots \cdot y_n$

$$= (c + \alpha)(c - \beta) \cdot y_3 \cdot \cdots \cdot y_n$$
$$= (c^2 + c(\alpha - \beta) - \alpha\beta) \cdot y_3 \cdot \cdots \cdot y_n.$$

이때, $c^2 + c(\alpha - \beta) - \alpha\beta$에 대해서 생각해 보자. 즉, 주어진 식에서 곱 $\alpha\beta$를 뺀 값인 $c^2 + c(\alpha - \beta)$은 c와 $c + \alpha - \beta$의 곱으로 생각할 수 있다. 그런데, c와 $c + \alpha - \beta$의 합은 $c + \alpha$와 $c - \beta$의 합과 같다. 즉, 식 $(c + \alpha)(c - \beta) \cdot y_3 \cdot \cdots \cdot y_n$의 한 인수를 c로 바꾼 식 $c(c + \alpha - \beta) \cdot y_3 \cdot \cdots \cdot y_n$에서 각 인수들의 합은 같지만, 그 곱은

$$c(c + \alpha - \beta) \cdot y_3 \cdot \cdots \cdot y_n$$
$$> (c + \alpha)(c - \beta) \cdot y_3 \cdot \cdots \cdot y_n.$$

즉, 이와 같이 인수들의 합은 변함없이 유지하면서 인수를 c로 바꾸어 가면, 그 곱은 계속해서 커진다. 그러므로, 모든 인수들이 c인 곱, 즉 c^n이 최대값이 된다.

증명 과정에서 살펴본 보조 정리 '합이 일정한 n개의 양수의 곱은, 각 인수들이 같을 때 최대값을 가진다.'는 것은 많은 기하학의 문제를 풀 때 유용하게 활용되는 아이디어이다. 예를 들어, 둘레가 일정한 사각형들 중에서 넓이가 가장 큰 사각형은 정사각형이라는 사실은 이 보조 정리로부터 직접적으로 얻어질 수 있다.

4. 코시 부등식과 관련된 부등식들 및 코시 부등식의 활용

코시 부등식에 관련된 몇몇 기본적인 부등식들을 살펴보기로 하자.

정리 4. $a_1, a_2, \cdots, a_n$에서 최소값을 $\min(a_i)$, 최대값을 $\max(a_i)$라 하면,

$$\min(a_i) \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \max(a_i).$$

증명. $a_1, a_2, \cdots, a_n$에서 최소값을 $\min(a_i)$, 최대값을 $\max(a_i)$라 하면,

$$\min(a_i) \cdot \min(a_i) \cdot \cdots \cdot \min(a_i)$$
$$\le a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$$

이고, $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$

$$\le \max(a_i) \cdot \max(a_i) \cdot \cdots \cdot \max(a_i).$$

그러므로,

$$(\min(a_i))^n \le a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \le (\max(a_i))^n.$$

즉, $\min(a_i) \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \max(a_i).$

정리 5. $a_1, a_2, \cdots, a_n$에서 최소값을 $\min(a_i)$, 최대값을 $\max(a_i)$라 하면,

$$\min(a_i) \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \le \max(a_i).$$

증명. $a_1, a_2, \cdots, a_n$에서 최소값을 $\min(a_i)$, 최대값을 $\max(a_i)$라 하면,

$$n \cdot \min(a_i) \le a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le n \cdot \max(a_i).$$

그러므로,

$$\min(a_i) \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \le \max(a_i).$$

앞에서 증명한 코시 부등식과 정리 4, 5로부터 다음 부등식을 알 수 있다:

$$\min(a_i) \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \le \max(a_i).$$

이제, 살펴본 코시 부등식을 활용하여 풀 수 있는 중등 수학에 관련된 몇몇 문제들을 살펴보기로 하자. 코시의 부등식은 매우 어렵게 보이는 많은 부등식의 해결에 있어 매우 중요한 핵심 아이디어로 활용될 수 있지만, 학습자들은 주어진 문제 상황에서 코시 부등식에 포함된 식인 $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$과 $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$에 상응하는 값들을 정확히 규정할 수 있어야 한다.

문제 1. 임의의 자연수 n에 대해, $\sqrt[n]{n!} < \dfrac{n+1}{2}$을 증명하여라.

풀이. 코시 부등식을 사용하기 위해, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3, \cdots, a_n = n$이라 하면,

$$\frac{1+2+3+\cdots+n}{n} > \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}.$$

위의 부등식으로부터,

$$\frac{\frac{(1+n)n}{2}}{n} > \sqrt[n]{n!}, \quad \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}.$$

문제 2. 임의의 자연수 n에 대해, $(1+\dfrac{1}{n+1})^{n+1} > (1+\dfrac{1}{n})^n$을 증명하여라.

풀이. $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = (1+\dfrac{1}{n})$, $a_{n+1} = 1$이라 두고, 이 $n+1$개의 수에 대해 코시의 부등식을 사용하면,

$$\frac{(1+\frac{1}{n}) + (1+\frac{1}{n}) + \cdots + (1+\frac{1}{n}) + 1}{n+1} > \sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n \cdot 1}$$

이 부등식의 좌변은

$$\frac{(1+\frac{1}{n}) \cdot n + 1}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

그러므로, $1 + \dfrac{1}{n+1} > \sqrt[n+1]{(1+\dfrac{1}{n})^n}$.

마지막 부등식의 양변을 $n+1$제곱하면,

$$(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} > (1+\frac{1}{n})^n.$$

문제 3. a, b가 양수이고, m과 n이 자연수일 때, 양수 x에 대해 식 $ax^n + \dfrac{b}{x^m}$의 최소값을 구하여라.

풀이. 주어진 식 $ax^n + \dfrac{b}{x^m}$은 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$ax^n + \frac{b}{x^m} = \underbrace{(\frac{a}{m}x^n + \frac{a}{m}x^n + \cdots + \frac{a}{m}x^n)}_{(m\text{개의 가수})} + \underbrace{(\frac{b}{nx^m} + \frac{b}{nx^m} + \cdots + \frac{b}{nx^m})}_{(n\text{개의 가수})}$$

이때, 코시의 부등식을 사용하면,

$$\frac{ax^n + \frac{b}{x^m}}{n+m} \ge \sqrt[m+n]{\frac{a^m x^{mn}}{m^m} \cdot \frac{b^n}{x^{mn} n^n}} = \sqrt[m+n]{\frac{a^m b^n}{m^m n^n}}.$$

이때, 등식은 $\dfrac{a}{m}x^n = \dfrac{b}{nx^m}$일 때, 즉 $x^{m+n} = \dfrac{bm}{an}$, 또는 $x = \sqrt[m+n]{\dfrac{bm}{an}}$일 때, 성립한다. 결국, 주어진 식의 최소값은 $(m+n)\sqrt[m+n]{\dfrac{a^m b^n}{m^m n^n}}$이다.

코시 부등식을 이용하여 풀 수 있는 몇몇 문제들을 풀이는 제외하고 소개하면 다음과 같다.

문제 4. 임의의 자연수 n에 대해, $(n!)^2 \le \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right]^n$을 증명하여라.

문제 5. 임의의 자연수 n에 대해, $1+n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}} \le 2^n$을 증명하여라.

5. 결 론

본 연구는 교직수학의 정체성을 모색하기 위한 문헌 연구의 하나로써, 중·고등학교에서 다루는 중요한 부등식들 중의 하나인 산술 평균-기하 평균의 관계를 일반화한 코시 부등식의 다양한 증명 방법들, 코시 부등식에 관련된 다른 부등식들, 그리고 코시 부등식의 활용에 대한 다양한 접근들을 소개하고 있다. 특히, 본 연구에서 소개되는 코시 부등식에 대한 코시 자신의 증명 아이디어는 다양한 수학 교수-학습 상황에서 활용될 수도 있을 것이다.

물론, 코시의 부등식이 정규 교육과정에서 다루는 필수적인 내용은 아니다. 그러나, 이 부등식은 다루는 부등식인 $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$에 대한 일반화로서, 박한식이 교직수학에 대해 언급하며 지적했던 것처럼, '학생들에게 필수적이지는 않지만, 교실에서 수학을 지도할 때 마음의 여유가 생길' 수 있는 내용에 해당될 것이다.

특히, 본 연구에서는 이미 알려진 코시 부등식에 대한 증명 과정을 좀더 정교화하여 중·고등학교 수준에서 이해할 수 있을 정도로 구체적으로 제시하고 있기 때문에, 수학 교수-학습 과정에서 발생하는 '왜'라는 질문에 대해 교사가 자신있게 대답할 수 있도록 구성하였고, 또한 수학에 좀더 관심이 있는 학생들에게 기하 평균-산술 평균으로부터 일반화된 형태로 코시 부등식을 제시하고 있기 때문에, 수학적 사고의 한 유형인 '일반화'를 경험할 수 있는 기회를 제공하고 있다.

한편, 코시 부등식에 관련된 다른 부등식들의 탐구들을 탐구하여, 코시의 부등식을 포함하는 새로운 부등식을 얻었으며, 그리고 코시 부등식을 활용하여 풀 수 있는 중등 학교의 수학교육에 관련될 수 있는 몇몇 흥미로운 부등식 문제들을 소개하였다.

참 고 문 헌

국립 사범대학 학장 협의회 (2000). 2000 교육부 정책 연구 과제 '국립 사범대학 표준 교육과정', 연구 보고서.

박한식 (1991). 교직수학 I, 서울: 대한교과서 주식회사.

박한식 (1998). Mathematics for teachers of mathematics: various solutions, Proceedings of '98 ICMI-EARCOME1. Korea Society of Mathematical Education.

박한식 (2000). Mathematics for mathematics teachers - On statistics, Abstracts of plenary lectures and regular lectures of ICME9.

박근생·권영인·이상근·조열제·전영배 (1993). 중등 수학 교사 양성 교육의 개선에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육> 32(4), 서울: 한국수학교육학회.

전평국(1993). 수학교육과 교육 여건과 교육 프로그램 개선 방향, 한국수학교육학회지 시리즈A <수학교육> 32(4), 서울: 한국수학교육학회.

<러시아어 참고 문헌>

로쉬나 N. L. (1996). 다양한 방법으로 문제를 해결하는 것-기하학의 심미적인 지각을 위한 첫 걸음-. *학교에서 수학* 3, 모스크바: Shkola Press.

뷔노그라도프 책임 편집(1982). *수학 백과 사전*, 모스크바: '소비에트 백과 사전' 출판사.

시바쉰스키 I .H.(1967). *문제에서 부등식들*, 모스크바: '과학' 출판사.

A Study on the Cauchy Inequality

Han, Inki
Department of Mathematics, College of Education, Gyeongsang National University Chinju, 660-701, Korea
E-mail: inkiski@nongae.gsnu.ac.kr

In this article we study on various proofs and applications of the Cauchy inequality. Prof. Park H.S. claims that though "Mathematics for teachers" is not compulsory materials in school, it gives to mathematics teacher feeling of reassurance in the process of teaching mathematics.

In our work, we review some materials concerned with Cauchy inequality, elaborate these, and develop materials for the mathematics teacher. We think that our materials are suitable to contents of "Mathematics for teachers".