韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2001, 5. 제 40권, 제 1호, 93-102.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2001, Vol. 40, No. 1, 93-102.

평면변환기하에 있어서 Mathematica를 이용한 교수-학습방법

김 향 숙 (인제대학교)

Ⅰ. 서 론

학습이란 수동적으로 정보를 받아들이고 그것을 반복적인 훈련과 연습을 통해 쉽게 꺼낼 수 있도록 만들어 두뇌에 저장하는 것이 아니라, 선행지식을 사용하여 새로운 과제에 접근하여 새로운 정보를 동화하고 자신의 의미를 구성할 때 이루어진다는 구성주의는 Piaget, Dienes 및 Vygotsky 등의 이론의 핵심이다. 이러한 이론들에 근거하여 요즈음 수학을 가르치거나 배우는 사람들 사이에, 수학교육에서 열린 교육, 학습자 중심의 탐구형 교육의 필요성을 느끼며, 학습자 주도형 수학교육의 한 방법으로써 Computer를 이용한 수학교육, Technology를 활용한 수학교육이 학습에 어떤 효과를 미치며, 또 그러한 효과를 극대화 시키기 위해서 Computer와 Technology가 어떻게 학습에 적용되어야 하는지에 대한 논의가 활발히 이루어지고 있다. 기하교육의 주된 목적 중 하나는 기하학적 직관능력과 그것을 바탕으로 한 논리적인 추론능력을 향상시키는 것이다. 분석적인 직관과정에 의존함이 없이 문제의 의미, 의의, 구조를 곧바로 파악하는 직관적인 사고는 날카로운 추측, 의미 심장한 가설, 잠정적인 결론으로의 과감한 도약과 같이 생산적인 사고의 매우 중요한 일면이다. 직관은 핵심적인 연결 관계를 즉각적으로 파악하는 거의 무의식적인 매우 신속한 인지과정이며, 특히 시각적인 요소와 밀접하게 관련되어 나타나는 경우가 많다(우정호, 1998). 직관과 관련된 시각적인 요소는 기하의 교수학습에서 중요한 역할을 한다. 그러므로 기하교수 학습을 위해 고안된 탐구형 소프트웨어의 시각적 요소에 대한 동적 조작 가능성은 기하 교육에 많은 영향을 줄 수밖에 없다(류희찬 외 2인, 1999).

제7차 수학과교육과정에는 개인차와 진로를 고려한 단계형, 심화 보충형, 과목 선택형의 탐구형 학습문제 및 컴퓨터교육 강화가 실제로 반영이 되어, 학습과 교수 및 평가에서 현재와는 다른 모습으로 현장교육이 이루어질 것이라 생각한다. Technology를 수학교과에 실제로 어떻게 적용하며, 어떤 내용에 사용할 것이며, 탐구형 방식의 수업결과를 어떻게 적절히 평가할 것인가에 대한 문제는 앞으로의 해결 과제일 것이다. 역동적인 수학 학습은 수학적 그래픽의 연출이 효과적이므로, 프로그램 작성의 전 단계로서 소프트웨어의 활용은 유익하며, 특수한 소프트웨어로 수학 학습을 진행하는 시기가 도래할 것을 예측하고 있다(이청주 외 3인, 1999).

수학이 다른 학문과 구별되는 뚜렷한 성질 중의 하나는 연역적 체계를 가지고 있다는 점이다. 수학은 양면성이 있어서 하나의 수학적 사실을 발견하고 창조하기까지 과정은 귀납이고, 일단 발견된 사실을 증명하는 과정은 연역이다. 그러나 지필 환경에서 귀납적 활동을 기대하기에는 많은 한계가 있다. 현재의 수학교육은 연역적 증명에 강조를 두고 있는 측면이 많으나 수학적 기본 개념이나 원리가 학생들에게 의미를 갖도록 하는 것이 중요하므로 이를 위해서는 연역 이전에 학생들이 지식을 귀납적으로 탐구하는 과정이 필요하다. 능동적이며 자기 의미를 구성하는 귀납 형태의 학습이 가능하게 하는 수업방식의 도입이 앞당겨 질 수 있는 대안으로 Technology의 활용이 기대된다. 컴퓨터를 중심으로 하는 Technology를 활용한 수업활동은 학생들의 수업참여를 극대화 시키고, 적절한 학습수준을 제시할 수 있으며, 새로운 수업 방법을 도입함으로써 학생들에게 수학에 대한 관심과 태도를 증진시켜 줄 것이다(구광조 외 2인, 1992). Simons(1993)에 의하면, 수학이 컴퓨터를 만들고 향상시킬 때, 컴퓨터는 수학의 힘을 만들고 향상시킨다. 컴퓨터로 인하여 수학활동에서 실험하고 추측하고 증명하고 모의 실험하는 활동이 용이해졌으므로, 컴퓨터와

* 2000년 5월 투고, 2000년 11월 심사 완료.

Technology를 수학교육에 적극 반영하고자 노력해야 할 것이다. NCTM에서도 계산기능, 문제해결, 공학의 사용 등에 컴퓨터와 계산기의 활용을 권장하고 있다. 신동선 외 1인(1998)은 컴퓨터에 관한 지식과 기능의 습득은 정보화 시대에 능동적으로 대처하는 방법이므로 학생들에게 컴퓨터를 가르치는 일은 중요하다고 강조하면서 수학교육에 컴퓨터가 사용될 수 있는 기능을 다음과 같이 제시하고 있다.

a) 그래픽과 애니메이션
b) 시뮬레이션
c) 계산 속도와 계산 능력
d) 오류 수정

컴퓨터가 가지는 다양한 기능의 활용은 추상적인 수학내용을 시각화하여 지도할 수 있을 뿐만 아니라 그 시각화가 학생들의 직접적인 경험이나 통제를 통해 이루어질 수 있다는 점에서 현재의 교수·학습 방법에 대한 발전 지향적인 대안이 될 것이다.

이러한 여건에 비추어 볼 때, 소프트웨어를 활용한 수학 학습 모형의 개발은 수학의 역동성, 보편성, 실용성 및 사회성에 기여하는 중요한 매체이다. 따라서 본 논문의 내용과 같은 Technology나 Software를 활용한 교수·학습자료의 개발은 수학교육의 발전에 기여하는 점이 있을 것으로 기대된다.

본 논문에서는 평면 변환기하의 모형을 Mathematica를 이용하여 만들고, 또 Mathematica의 그래픽 기능을 충분히 활용하여 교육적 효과를 높일 수 있는 자료들을 제시하고자 한다. 수학용 Software 중에서 Mathematica를 이용한 교수·학습자료의 개발은 학습자의 흥미와 교사들의 새로운 수업 진행을 위한 하나의 예시가 될 것이며, 나아가 수학 교육의 새로운 패러다임에 의미 있는 자료를 제공할 것이다.

II. 변환기하

변환(transformation)이라는 말은 함수, 사상, 대응, 조작 등의 용어와 동의어이나, 도형의 변환에서는 그 뜻을 다음과 같이 제한하여 사용하고 있다. 집합 X에서 집합 Y로의 함수 $f: X \to Y$에서, 특히 $Y = X$일 때, 즉 집합 X에서 자기 자신으로의 함수 $f: X \to X$를 **변환**이라 한다. 집합 X 위의 모든 변환의 집합 $H = \{S, T, U, \ldots\}$가 다음 세 조건

(1) H는 변환의 곱에 대하여 닫혀 있다. 즉,
$S,\ T \in H \Rightarrow S \cdot T \in H$
(2) H는 항등 변환 I를 포함한다. 즉, $I \in H$
(3) H는 모든 변환에 대한 역 변환을 포함한다. 즉,
$T \in H \Rightarrow T^{-1} \in H$

를 만족할 때, 변환의 집합 H는 군(group)을 이룬다. 이러한 변환의 군을 간략하게 **변환군**(transformation group)이라고 한다. H가 X의 변환군일 때, H에 속하는 임의의 변환에 대하여, 변하지 않는 공간 X의 성질을 변환군 H에 대한 **불변성**이라 말한다. 평면 또는 공간 위에서의 변환으로서는, 일차변환(一次變換), 평행이동, 회전이동, 대칭이동과 이들의 합성으로서 구성되는 합동변환(合同變換)과 이것을 특별한 경우로서 포함하는 닮음변환(相似變換), 그리고 아핀변환(affine 變換), 사영변환(射影變換), 위상변환(位相變換) 등이 있다(곽동애 외 2인, 1998). 이들 중에서 중등학교 수학교과과정에 포함이 되는 일차변환, 합동변환, 닮음변환에 대해 요약해 보기로 한다.

1. 일차변환

좌표평면 위의 점 $P(x,\ y)$를 점 $P'(x',\ y')$으로 옮기는 변환 $T: (x,\ y) \to (x', y')$에서 대응하는 점의 좌표 사이에 상수 $a,\ b,\ c,\ d$ 에 대하여 $x' = ax + by,\quad y' = cx + dy$ 와 같이 상수항이 없는 일차 식의 관계가 성립할 때 이 변환 T를 일차변환(linear transformation)이라 한다. 특히 직교행렬을 변환행렬로 갖는 일차변환을 직교변환(orthogonal transformation)이라 한다.

2. 합동변환

(1) 평행이동

평행이동이란 평면 또는 공간의 각 점을 일정한 길이만큼 옮기는 변환이며, 평행이동 전체의 집합은 한 변환군을 이룬다. 좌표평면 위의 각 점을 x축과 y축의 방향으로 각각 길이 $a,\ b$만큼 옮기는 평행이동 T에 의하

여 점 $P(x, y)$가 점 $P'(x', y')$으로 옮겨졌다고 하면, 이 변환의 관계식은 다음과 같다.

$x'=x+a, \quad y'=y+b$

(2) 대칭이동

대칭이동이란 평면의 각 점을, 그 위에 있는 한 정직선의 둘레로 (공간 안에서) 180° 회전하여, 뒤집어 둔 위치로 옮기는 변환이고, 그 정직선을 **대칭이동의 축**이라고 한다. 그러면 이 대칭축은 한 쌍의 대응점을 잇는 선분을 수직 이등분하게 된다. 대칭이동 전체의 집합은 변환군을 이루지 못한다. 대칭이동의 축이 x축이면

$$x'=x, \quad y'=-y$$

이고, 대칭이동의 축이 y축이면

$$x'=-x, \quad y'=y$$

이며, 대칭이동의 축이 직선 $y=x$이면

$$x'=y, \quad y'=x$$

이다.

(3) 회전이동

회전이동이란 평면의 각 점을 그 위에 있는 한 정점을 중심으로 하여, 일정한 방향으로 일정한 크기의 각만큼 회전하는 변환이고, 그 정점을 **회전이동의 중심**이라고 한다. 특히 회전각의 크기가 180° 일 때의 회전이동을 **점대칭 이동**이라 한다. 한 정점을 중심으로 하는 회전이동 전체의 집합은 변환군을 이룬다. 좌표평면에서 원점 O의 둘레로, $\alpha°$ 의 회전이동에 의하여, 점 $P(x, y)$가 점 $P'(x', y')$으로 옮겨졌다고 하면, 이 변환의 관계식은

$$x'=x \cos \alpha° - y \sin \alpha°,$$
$$y'=x \sin \alpha° + y \cos \alpha°$$

이며, 점 $A(a, b)$를 중심으로 회전각 $\alpha°$ 의 회전이동을 하면 관계식은

$$x'=(x-a)\cos \alpha° - (y-b)\sin \alpha° + a$$
$$y'=(x-a)\sin \alpha° + (y-b)\cos \alpha° + b$$

이다. 합동변환에 대해 선분, 직선, 선분의 길이, 각의 크기, 평행선 및 삼각형은 불변성을 갖는다.

3. 닮음변환

평면(또는 공간)의 한 변환 f 에 의하여 임의의 두 점 P, Q 가 각각 P', Q'으로 변환되었을 때, $d(P, Q)$를 두 점 P, Q 사이의 거리라 하면 양의 상수 k가 존재하여 $d(P', Q')=k\,d(P, Q)$의 관계가 성립할 때, f를 평면(또는 공간)의 **닮음변환**이라 하고, 양의 상수 k를 **닮음비**라고 한다. 특히 $k=1$인 경우는 앞에서 말한 합동변환이 되므로, 닮음변환은 합동변환을 확장한 것이다. 닮음변환에 대하여, 선분은 선분으로, 직선은 직선으로, 삼각형은 닮은 삼각형으로, 각은 그 크기가 변하지 않도록, 평행한 두 직선은 역시 평행한 두 직선으로 변환된다. 평면의 한 점 O를 닮음의 중심으로 잡고, 임의의 한 점 P에, 닮음비가 k이고, 닮음의 위치에 있는 점 P'을 대응시키는 변환 h를 **호모세티**(상사변환 또는 homothety)라고 한다. 그러므로 호모세티는 닮음변환의 특수한 경우이고, 위의 닮음변환의 성질을 모두 만족한다. 좌표평면에서 닮음비가 $k(\neq 0)$이고, 원점 O를 중심으로 하는 호모세티에 의하여 점 $P(x, y)$가 점 $P'(x', y')$으로 변환되었을 때, $x'=kx, \quad y'=ky$ 의 대응 관계식을 얻는다. 닮음비가 k이고, 닮음의 중심이 점 $A(a, b)$ 일 때의 호모세티의 관계식은

$$x'-a=k(x-a), \quad y'-b=k(y-b)$$

이다. 닮음변환 전체는 변환군을 이룬다. 합동변환은 닮음변환의 특수한 경우이므로, 닮음변환군에 의하여 불변인 성질은 합동변환군에 의해서도 불변이지만, 그 역은 성립하지 않는다.

III. Mathematica를 이용한 평면 변환기하의 모델

Mathematica는 1988년 6월 미국의 이론 물리학자겸 수학자인 Stephen Wolfram에 의해 version 1이 개발된 후 다양한 운영체제에 적용될 수 있도록 계속 발전되어, 2000년 12월 현재 최신 version 4.0이 개발되었다. 수학적인 계산을 하는데 사용할 수 있는 유용한 컴퓨터 프로그램은 요즈음 많이 개발되고 있으며 그 중요성이 날로 증가하고 있다(류재구, 1998). 수학교육의 새로운 패러다임이 도래하고 있는 현실에서, 연구용으로 널리 사용되고 있는 수학용 Software 중에서 Wolfram Research사에서 개발한 Windows용 Mathematica를 사용하여 본 논문

에서는 평면변환 기하의 도형 지도에 대한 새로운 교수 학습 방안을 탐구하고자 한다. 본 논문은 version 4.0을 사용하였으나 여기 실린 내용을 실행하는 데는 version 3.0 이상이면 문제가 없으며, 지금부터 Mathematica 3.0 과 4.0을 통칭하여 Mathematica라 한다. Mathematica는 폭넓은 수학의 전 분야 및 응용분야에 활용이 가능하다 (김안현 외 5인, 2000).

Mathematica 뿐만이 아니라 다른 수학용 Software 들을 수학 학습에 사용할 때는 매우 신중하지 않으면 안 된다. 학생들의 수학적 사고력과 창의력을 신장시키는 방향에서 적용이 되어야 함은 물론이고, 어떤 내용에 적용해서 어떻게 최대의 교육 효과를 얻을 수 있을 것인가에 대해 초점을 두어야만 한다. Mathematica의 장점을 요약하면 수학 개념을 시각화(Visualization) 시키고, 수학적 시각화의 다양성(Variety)을 제공하며, 학습자의 능동적인 수업 참여(Activity)로 인해 탐구학습이 가능하게 하며, 신속한 계산(Speediness)으로 인해 오류 수정을 용이하게 하며, 수학의 실용성(Practical Use)을 부여한다는 것 등이다(Wolfram, 2000).

Mathematica가 가진 기능 중에서도 주로 뛰어난 계산 능력과 그래픽 기능, 애니메이션 기능, 그리고 모든 명령어를 함수로 정의할 수 있는 기능을 이용하여 본 논문을 전개하였다. 특히 추상적인 수학 개념은 장면의 다양성이 제공될 때 학생들에게 최대의 학습 효과를 기대할 수 있다는 관점에서 그래픽 기능을 강조하였으며, 여기에 제시된 명령어들은 교사 및 학습자가 원하는 결과를 위하여 주어진 식을 직접 수정, 실행함으로써 간단히 그 결과를 확인할 수 있도록 하였으며, 본 논문에서 사용한 기본 도형을 좋아하는 도형으로 재구성하여 변환에 대한 독창적인 모델을 만들어 수업에 이용할 수 있도록 전개하였으며, 더욱이 최대한 기본적인 명령어들을 사용하였다. 입력 명령어는 모두 실었지만 일부 명령어의 실행 결과는 지면 관계상 생략하였으며, 편의를 위하여 단계별로 설명을 붙였다. 또 알기 쉽게 하기 위하여 먼저, 기본도형을 정해 놓고 2×2행렬을 변수로 하는 Module함수를 만들어 평면변환 기하의 지도에 도움이 되는 시각적인 모형을 Mathematica를 이용하여 제시하고자 한다.

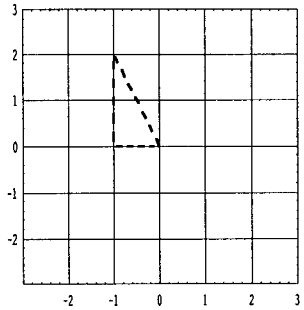
1. 모델 A

• 기본도형을 다음과 같이 정한다.

```
pts={{-1, 0}, {-1, 2}, {0, 0}, {-1, 0}};
```

• 학습자를 위한 보다 선명한 기본도형을 그리기 위해 선택사항을 추가한다.

```
Show[Graphics[
        {Dashing[{0.02 , 0.03}], Thickness[0.01],
        RGBColor[1, 0, 0], Line[pts]} ],
    Frame->True, PlotRange->{{-3,3},{-3,3}},
    AspectRatio->1, GridLines->Automatic ];
```



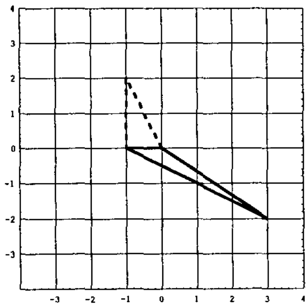
• 2×2행렬을 변수 x로 하는 Module함수 T(x)를 만들어 기본 도형이 변환되는 모습을 알게 한다.

```
T[x_] := Module[{a, b, r},
  a = {{0, 0}, {-1, 2}, {-1, 0}, {0, 0}};
  b = x;
  r = Show[
        Graphics[
          Join[{Dashing[{0.02}],    Thickness[0.01],
              RGBColor[1, 0, 0], Line[a]},
              {Dashing[{0,   0}],   Thickness[0.01],
              RGBColor[0, 0, 1],
               Line[(b.#1 &) /@ a]}
    ]
       ],
       Frame -> True,
       PlotRange -> {{-4, 4}, {-4, 4}},
       AspectRatio -> Automatic,
       ImageSize -> 300,
       GridLines -> Automatic];
 ]
```

(1) 임의의 일차변환

▪ 임의의 일차변환 X에 의해 기본 도형이 어떻게 변화하는지 알 수 있게 한다.

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\quad T[X]$$

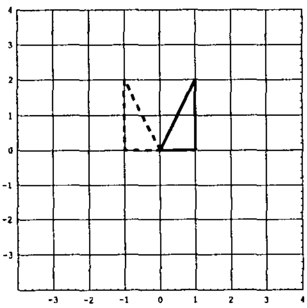


▪ 위의 2×2행렬 X의 성분을 바꾸어 T[X]를 실행해 봄으로써 임의의 일차변환에 의한 기본 도형의 이동으로부터 변환의 개념을 이해한다.

(2) y축에 관한 대칭이동

▪ 일차변환 RY에 의해 기본 도형이 y축 대칭이 됨을 알게 한다.

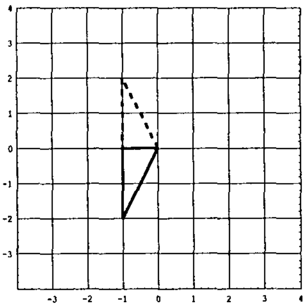
$$RY=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\quad T[RY]$$



(3) x축에 관한 대칭이동

▪ 일차변환 RX에 의해 기본 도형이 x축 대칭이 됨을 알게 한다.

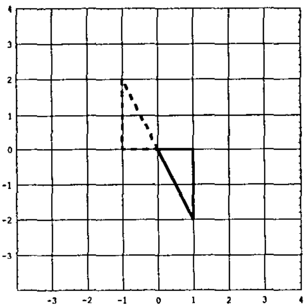
$$RX=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\quad T[RX]$$



(4) 원점에 관한 대칭이동

▪ 일차변환 Or에 의해 기본 도형이 원점 대칭이 됨을 알게 한다.

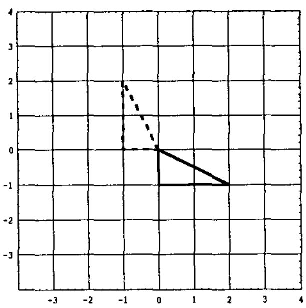
$$Or=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};\quad T[Or]$$



(5) $y=x$ 에 관한 대칭이동

▪ 일차변환 YX에 의해 기본 도형이 y = x에 대칭이 됨을 알게 한다.

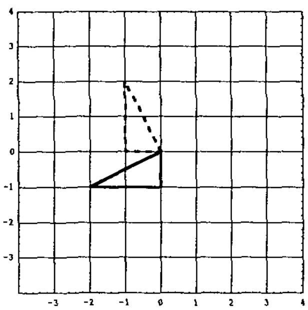
$$YX=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\quad T[YX]$$



(6) $y=x$ 에 관한 대칭이동과 y 축 대칭이동

▪앞에서 사용한 일차변환 RY 와 YX의 합성은 다시 일차변환이 됨을 알며, 일차변환의 합성을 나타내는 행렬은 행렬의 곱으로 나타내어짐을 알게 한다. Mathematica 에서 .는 행렬의 곱을 나타낸다.

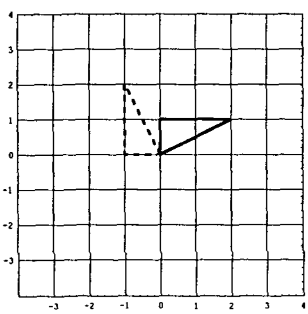
T[RY.YX]



(7) y축 대칭이동 과 $y=x$ 에 관한 대칭이동

▪(6)의 일차변환과 비교하여, RY 와 YX의 합성은 일차변환들 YX 와 RY의 합성과 다름을 알고, 함수에서처럼 변환의 합성에서는 교환법칙이 성립하지 않음을 이해한다.

T[YX.RY]

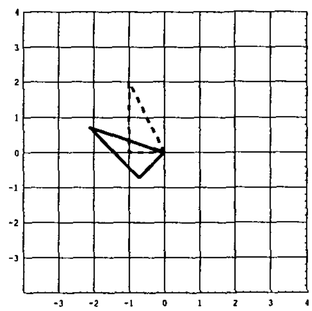


▪앞에서 언급했던 2×2행렬들 X, RY, RX, Or 및 YX 등의 곱에 의해 이루어지는 합성 일차 변환들에 의해 기본 도형이 어떻게 이동되는지 확인하게 함으로써 변환에 의해 일어나는 다양한 장면을 인식하게 하여 학생들에게 수학에 대해 흥미를 갖게 한다. 예를 들면, T[RX.YX.RY], T[RX.X.Or] 및 T[RX.RY.YX]에 의해 일어나는 변환을 학생들로 하여금 추측하도록 한 다음에, 학생들이 직접 함수 T에 변환 RX, YX, RY, X, Or 등의 합성을 변수로 입력해 봄으로써 기본도형의 변환된 모양을 직접 확인할 수 있게 한다.

(8) 왼쪽으로 $\pi/4(=45°)$ 만큼 회전이동

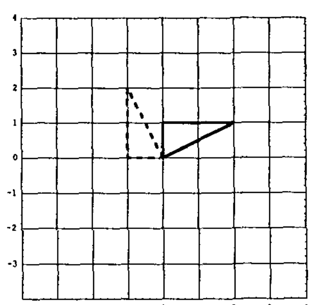
▪회전이동을 나타내는 일차변환은 회전되는 각에 따라 다르므로 회전이동을 나타내는 행렬을 x축의 양의 방향으로 돌아간 각 t를 변수로 하는 rot(t)함수로 만들어 이것을 함수 T에 넣어 회전이동을 이해한다.

rot[t_]= $\begin{pmatrix} Cos[t] & -Sin[t] \\ Sin[t] & Cos[t] \end{pmatrix}$; T[rot[45°]]



(9)오른쪽으로 $\pi/2$ 만큼 회전이동

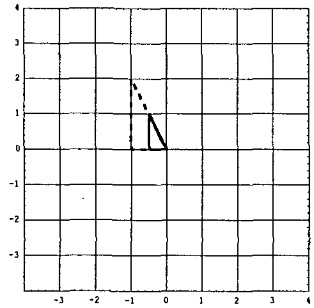
T[rot[-90°]]



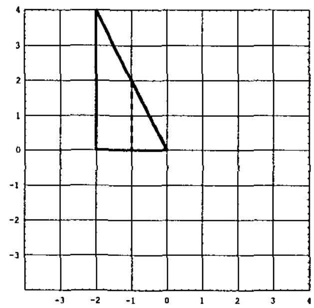
(10) x , y축으로 반을 줄이는 변환

▪닮음변환을 나타내는 일차변환은 닮음비에 따라 다르므로 닮음변환을 나타내는 행렬을 닮음비 t를 변수로 하는 dam(t)함수로 만들어 dam(t)가 만드는 2×2행렬을 함수 T의 변수로 사용하여 t의 값을 변화시키면서 닮음 변환을 이해한다.

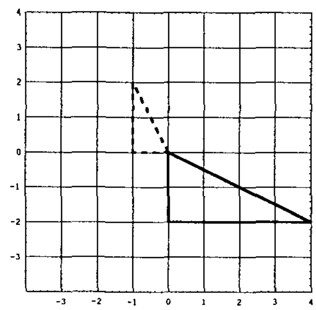
dam[t_]= $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$; T[dam[$\frac{1}{2}$]]



(11) x , y축으로 배를 늘리는 변환
T[dam[2]]

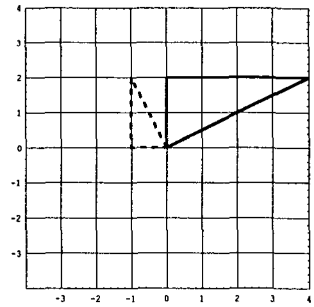


(12) $y=x$에 대칭이고 닮음비가 2인 변환
T[dam[2].YX]]



(13) $-\frac{\pi}{2}$ 회전이동하고 닮음비가 2인 변환

T[dam[2].rot[$-\frac{\pi}{2}$]]



• X, RY, RX, Or, YX, dam(t) 및 rot(t) 등의 일차변환을 합성하면 기본 도형이 어떻게 이동되는지 쉽게 알게 됨으로써 변환에 의해 일어나는 다양한 장면을 인식한 학생들은 수학에 대해 흥미와 호기심을 갖게 될 것이다. 예를 들면, T[RX.dam[2].RY],T[RX.X.rot[30°].Or] 및 T[RX.RY.rot[30°].Or]에 의해 일어나는 변환을 학생들로 하여금 추측하도록 한 다음에, 함수 T에 위 변환들의 합성을 변수로 직접 입력하게 함으로써 기본도형이 어떻게 변환되어 가는 지를 스스로 확인하게 한다.

2. 모델 B

• 평면 위의 모든 점은 벡터로 나타낼 수 있으므로 모델 A에서 생각했던 모든 과정들을 다음과 같이 표현할 수 있다.

```
<< Graphics`Arrow`
call[x_, y_] := Module[{a, b, c},
        a = x; b = y; c = a.b; Return[c] ]
```

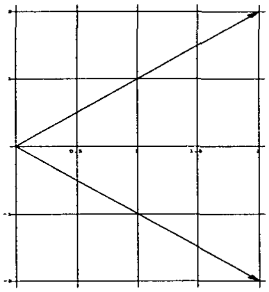
• 여기에서 cal(x, y)함수는 변환을 나타내는 행렬 x와 변환 되기 전의 한 점 y를 곱(행렬 곱)한 결과 x.y를 구해 준다. 그리고 아래의 sh(x, y)함수는 점 y와 cal(x, y)로 구한 점을 각 각 벡터로 나타낸다.

```
sh[x_, y_] := Module[{a, b, c},
  a = x; b = y; c = a.b;
  d = {Arrow[{0, 0}, {Flatten[b][[1]], Flatten[b][[2]]}],
       Arrow[{0, 0}, {Flatten[c][[1]] ,Flatten[c][[2]]}]};
         p = {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]};
         q = {p, d} // Transpose;
         r = Show[Graphics[q],
         Axes -> True,
```

```
AspectRatio -> Automatic,
ImageSize -> 300,
GridLines -> Automatic];
Return[r]; ]
```

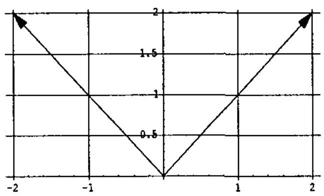
▪ 일차변환 RX에 의해 점 (2, 2)가 x축 대칭이 됨을 알게 한다.

$RX=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;   sh[RX, {2, 2}]



▪ 일차변환 RY에 의해 점 (2, 2)가 y축 대칭이 됨을 알게 한다.

$RY=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;   sh[RY, {2, 2}]



▪ 모델 A에서 사용했던 T[ ]함수와 똑같은 형태의 전개를 sh[,]함수에 적용할 수 있으므로 이후의 전개는 생략한다. 모델 A의 단계를 학생들이 스스로 적용해 보면서 일차변환의 개념을 습득한다.

3. 모델 C

▪ 모델 A에서는 삼각형, 모델 B에서는 화살표를 기본 도형으로 잡았듯이 교사나 학생이 임의의 그림을 하나 만들거나 지정하여 모델 A의 전개방식에 따라 일차변환에 관한 새로운 교수-학습 모델을 만든다.

▪ Mathematica에 의해 만들어진 위의 시각적인 자료를 학습자들에게 제시함으로써 평면 변환기하에 대한 개념을 지도한다면, 위의 장면들은 학생들에게 막연하게 연상했던 변환행렬의 실체를 실감나게 느낄 수 있도록 할 것이며, 또한 이러한 실행의 경험은 교사들에게도 새로운 수업 방식의 획기적인 변화를 가져올 수 있게 할 것이다. 위의 단계들은 Module함수의 정의를 제외하고는 Mathematica의 아주 기본적인 명령어들을 사용함으로써 학생들 스스로도 변수의 형태를 원하는 2×2행렬로 입력만 하면 그 결과를 예측할 수 있도록 하고, 또한 다양한 변환에 의해 도형을 바라보고 관찰할 수 있도록 함으로써 명확한 상상을 할 수 있게 한다. 그리고 Mathematica를 이용한 위와 같은 시각 자료는 일차변환의 행렬이 나타내는 의미를 부각시켜 막연히 계산에 의한 변환 계산뿐만 아니라 변환의 원리를 이해하며 수학을 전개할 수 있도록 한다. 뿐만 아니라 더 나아가 공간 변환 등의 수학적 인식을 정확하게 할 수 있게 한다. 한편, Mathematica에서 만들어진 위의 그림 자료들은 저장할 때 HTML로 저장하는 간단한 작업에 의해 인터넷 웹 브라우저에 올릴 수 있도록 되어 있어서 수학교사의 홈페이지 제작에도 가장 수학적인 자료들이 쉽게 만들어질 수 있게 한다. 위와 같은 여러 가지로 변환된 도형의 모양은 변환기하를 구체적인 예를 들어 학생들에게 확인시켜주며, 그들로 하여금 복잡한 변환의 합성으로 변환된 도형의 실체를 느낄 수 있도록 하고, 나아가서 이러한 시각적인 구체적 모형은 수학적 사고의 발달 및 창의력을 길러 귀납적으로 더 복잡하고 더 많은 수학적인 발견을 할 수 있게 할 것이다. 이러한 작업을 교사나 학습자가 직접 실행해 보는 것은 추상적으로 주어진 수학적인 식으로부터 공간상의 여러 가지 다른 도형을 식으로 표현하는 방법까지 스스로 연구하여 발견할 수 있는 계기가 될 것이며, 이에 대한 응용으로 다양한 형태의 평면상의 도형을 Mathematica가 그리는 도형으로 확인해 보는 것은 시각과 추상이 어우러지는 묘미로부터 수학에의 흥미를 가지는 중요한 요인이 될 것이다.

Ⅳ. 결 론

수학교과에서 Technology의 활용은 앞으로 점점 더

그 필요성이 강조되겠지만 어떤 Software를 어느 시점에서 어떤 관점에서 적절히 사용할 것인가의 문제는 수학의 새로운 교수-학습 방법에 관해 관심이 있는 수학 관계자들의 어렵지만 필연적인 과제라 하겠다. 컴퓨터보조수업(CAI)은 자기 주도적인 학습환경이 가능해야 하고, 교사와 학생들간의 의사소통이 원활해야 하며, 충분히 수학적이어야 한다(장진원 외 1인, 2000). 이러한 요건을 만족시키면서 수학교과에 활용할 수 있는 프로그램으로는 Logo언어, Basic언어, Maple, Matlab, MatheView, Excel, Cabri Geometry, 그래프 마법사, Mathematica, TI92, GSP 등이 있다(Klotz, 1991, Larborde, 1990). 이러한 프로그램의 수학 교수 학습에서의 적용은 무분별한 도입이 아닌 충분히 교육적 효과가 예상되는 내용, 시점 및 방법 등을 적절히 고려하여 도입해야 한다. 예를 들면, 적분의 개념이나 회전체의 부피의 지도에 있어서 Mathematica를 이용한다면 구분구적법을 가르치면서 구간의 크기를 늘려갈 때 사각형의 넓이의 합이 실제의 정적분하고 얼마나 근사한지를 시각적으로 제시하거나, 두 개의 그래프를 회전하여 생기는 회전체의 실제 모습 및 단면의 모습을 구체적인 예를 들어 학생들에게 확인시켜 준다면, 그들로 하여금 구분구적법 및 복잡한 도형의 회전체의 실체를 느낄 수 있도록 할 것이다.

이와 같은 자료의 제시 및 창작활동은 귀납적으로 더욱 많은 수학적 아이디어를 만들어낼 수 있다. 컴퓨터를 사용하여 수학수업활동에 이러한 예시들을 제시하는 것은 지필 환경 속에서 찾아볼 수 없었던 새로운 사실들을 발견해 나가는 자기 주도적인 수업을 가능하게 할 것이다. 수학과 컴퓨터는 서로 상호 작용을 하며 발전을 기해야 한다. 단순히 컴퓨터의 조작에만 능숙한 것이 아닌 수학적 개념을 가진 상태에서 컴퓨터를 발전시키고 이를 수학교육에 활용할 수 있어야 한다. 교사는 컴퓨터가 만능이 아니라는 사실을 염두에 두고 컴퓨터를 도입한 수업에서 흔히 나타나는 일시적인 학습자의 반응을 냉철히 분석, 판단하여야 하며, 가장 최대의 효과를 얻을 수 있는 내용과 수학 교육 방법 적용에 대해 부단한 노력과 연구를 해야 할 것이다. 그리고 수학교사가 운영하는 인터넷 Site에는 수학적인 요소들이 표현되어야 한다. 최근의 수학전용 프로그램인 GSP나 Cabri Geometry에서도 웹브라우저에서 표현할 수 있는 방안들이 같이 개발되어 현실화되었다. Mathematica에서도 파일을 저장할 때, HTML문서로 저장할 수 있어서 웹 상에서도 Mathematica를 간단하게 올릴 수 있다. 이러한 기능은 수학전용 프로그램의 대중화에 큰 기여를 하게 될 것이다.

그러므로, 평면변환기하를 지도할 때 먼저 실생활에서 볼 수 있는 많은 물체들, 예를 들면, 벽지의 무늬, 나비의 모양 및 이불에 그려진 동물들이 놓여 있는 상태가 한 물체를 기준으로 보았을 때 다른 물체들은 어떤 변환이 일어난 상태로 놓여져 있는지를 알게 하며, 나아가 본 논문에서 제 시한 예는 물론이고, 본 논문의 명령어에서 간단한 몇 가지를 설명한 후에 삼각형, 집 또는 그리고 싶은 도형을 그리게 한 후 그것을 일차변환에 의해 이동해 보고, x축 대칭, y축 대칭 및 원점 대칭을 해 보게 하여 흥미를 유발시킴과 동시에 변환의 개념을 시각적으로 이해하게 할 것이다. 따라서 변환의 지도에 있어서 시각적인 교수·학습 방법의 도입은 학생들에게 추가적인 예를 탐구하도록 하고, 독립적인 학습, 수준별 학습, 소그룹 학습 및 프로젝트 학습을 가능하게 할 것이며, 나아가 기하 및 수학의 다른 영역에서도 수학적 구조를 시각화 시키는 다양한 교수-학습 방안이 연구되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

곽동애·기우항·우경수 (1998). 변환에 의한 기하교육, 경북대학교 과학교육연구지 22, pp.51-78.

구광조·오병승·류희찬 (1992). 수학교육 과정과 평가의 새로운 방향, 서울: 경문사.

김안현·김향숙·류재칠·신준용·이강래·표용수 (2000). 수학에서의 Mathematica 활용, 서울: 경문사

류재구 (1998). Mathematica3.0, 크라운 출판사.

류희찬·유공주·조민식 (1999). 탐구형 소프트웨어를 활용한 기하학습내용의 구성방안탐색, 수학교육학연구발표대회논문집, pp.227-253.

신동선·류희찬 (1998). 수학교육과 컴퓨터, 서울: 경문사

이청주·김기연·남숙자·한재영 (1999). 그래픽에 의한 수학적 조형물의 형성, 수학교육학연구발표대회논문집.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울대학교 출판부.

장진원 · 박달원(2000). 컴퓨터보조수업(CAI)이 이 수학교과에 미치는 영향, 한국학교수학회논문집 3(1), 한국학교수학회.

Klotz, E. (1991). *The Geometers Sketchpad[Software]*, Berkley, CA: Key Curriculum Press.

Larborde, J-M. (1990). *CABRI Geometry[Software]*, France : Université de Grenoble 1.

Simons, M. (1993), *The effective teaching of mathematics*, New York: Longman Publishing Co.

Wolfram, S. (2000). *Mathematica(4th, ed.)*, Cambridge Univ. Press.

Teaching-Learning Method for Plane Transformation Geometry with Mathematica

Kim, Hyang Sook

Department of Computational Mathematics, School of Computer Aided Science, Inje University, Obang Dong, kimhae, KyungNam, 621-749 Korea, E-mail : mathkim@ijnc.inje.ac.kr

The world we live in is called the age of information. Thus communication and computers are doing the central role in it. When one studies the mathematical problem, the use of tools such as computers, calculators and technology is available for all students, and then students are actively engaged in reasoning, communicating, problem solving, and making connections with mathematics, between mathematics and other disciplines. The use of technology extends to include computer algebra systems, spreadsheets, dynamic geometry software and the Internet, and help active learning of students by analyzing data and realizing mathematical models visually.

In this paper, we explain concepts of transformation, linear transformation, congruence transformation and homothety, and introduce interesting, meaningful and visual models for teaching of a plane transformation geometry which are obtained by using Mathematica. Moreover, this study will show how to visualize linear transformation for student's better understanding in teaching a plane transformation geometry in classroom. New development of these kinds of teaching-learning methods can simulate student's curiosity about mathematics and their interest. Therefore these models will give teachers the active teaching and also give students the successful learning for obtaining the concept of linear transformation.