信賴性應用研究
제1권, 제2호, pp. 165-174, 2001

각 반응의 목표 영역 존재시의 다반응 최적화: 상대변화 제곱합의 최소화에 의한 방법1)

홍 승 만*, 임 성 수*, 이 민 우**

*고려대학교 정보통계학과
**고려대학교 정보통계학과 석사과정

Multiresponse Optimization in the Presence of the Goal Regions for the Respective Responses: A Method by Minimization of the Sum of Squares of Relative Changes

Seungman Hong*, Sungsue Rheem*, Minwoo Lee**

*Informational Statistics Department, Korea University
**M.S. Program, Informational Statistics Department, Korea University

Abstract

The desirability function approach by Derringer and Suich (1980) and the generalized distance approach by Khuri and Conlon (1981) are two major approaches to multiresponse optimization for improvement of quality of a product or process. So far, the desirability function method has been the only tool for multiresponse optimization in the situations where there are the goal regions for the respective responses. For such situations, we propose a multiresponse optimization method based on the generalized distance approach.

1. 서론

제품 또는 공정의 품질 개선을 위한 다반응 최적화에의 접근 방법들 중 요인들과 반응들이 각각 3개 이상인 경우에도 사용될 수 있는 방법들은 바람직성 함수 방법(desirability

1) 본 논문은 2001년도 고려대학교 특별연구비에 의하여 연구되었음.

function approach; Derringer and Suich, 1980)과 일반화 거리 방법(generalized distance approach; Khuri and Conlon, 1981)이다. 바람직성 함수 방법은 연구자의 주관적 판단을 수용할 수 있는 방법으로 각 반응의 목표 영역이 존재할 때에 적절한 방법이다. 이우선 · 김영주(1997)는 SAS 프로그래밍을 통한 바람직성 함수 방법의 구현을 예시하였고, 이우선 · 이종협 · 임성수(1999)는 바람직성 함수 방법을 다구찌 파라미터 설계에 대한 반응표면 접근방법을 이용한 다반응 최적화에 응용하였다. 일반화 거리 방법은 연구자의 잘못된 주관적 견해가 다반응 최적화에 반영되는 문제가 발생하지 않는 방법(Khuri and Cornell, 1987, p. 288)으로 데이터에 근거한 객관적 솔루션을 제공할 수 있는 방법이라고 할 수 있다. 임성수 · 홍승만(1999)은 일반화 거리 방법에 근거한 측도인 상대변화(relative change)들을 결합함으로써 얻어지는 표준상대변화라는 다반응 최적화 측도를 제안하였다.

현재까지 각 반응의 목표 영역이 존재할 경우에는 사실 바람직성 함수 방법만이 사용되어 왔는데, 본 논문에서는 그러한 경우에 사용될 수 있는, 일반화 거리 아이디어에 근거한 다반응 최적화 방법을 제안하고자 한다. 2절에서는 각 반응의 목표 영역이 존재할 경우의 다반응 최적화를 위하여 사용될 수 있는 상대변화 측도를 제시하고, 3절에서는 이러한 상대변화 측도들의 제곱합을 최소화함으로써 다반응 최적화를 구현하는 방법을 제안한다. 사례 연구를 통한 본 다반응 최적화 방법의 예시를 4절에서 제공하고, 본 다반응 최적화 방법의 구현을 위한 SAS 프로그램을 부록에서 제시한다.

2. 반응 최적화를 위한 상대변화 측도

반응의 목표 영역이 존재할 경우, 반응 최적화를 위한 상대변화 측도를 반응에 관한 목적(최대화, 최소화, 또는 목표치화)별로 제안한다.

2.1 반응을 최대화하고자 하는 경우

연구자가 반응을 최대화하고자 하는 경우, 반응치가 어떤 특정한 값에 도달하거나 그 값을 초과하면 만족한다고 하자. 이 특정한 값을 상방 목표치(upper target)이라고 부르기로 한다. 아래에서 ϕ_j 는 반응 j 의 상방 목표치를 나타낸다. 이 경우, 반응 j 를 최소화하기 위한 상대변화 측도는 다음과 같이 정의된다:

$$\mathrm{RC}\,(\widehat{y_j}) = \mathrm{RC}_{\mathrm{Max}}\,(\widehat{y_j}) = \begin{cases} \dfrac{\widehat{y_j} - \phi_j}{\phi_j}, & \widehat{y_j} < \phi_j \\ 0, & \phi_j \le \widehat{y_j} \end{cases} \tag{1}$$

반응 적합치가 목표 영역에 있으면, $\mathrm{RC}\,(\widehat{y_j})$ 의 절대값은 그 최소값인 0 이 된다.

2.2 반응을 최소화하고자 하는 경우

연구자가 반응을 최소화하고자 하는 경우, 반응치가 어떤 특정한 값 이하가 되면 만족한다고 하자. 이 특정한 값을 하방 목표치(lower target)이라고 부르기로 한다. 아래에서 ϕ_j 는 반응 j 의 하방 목표치를 나타낸다. 이 경우, 반응 j 를 최대화하기 위한 상대변화 측도는 다음과 같이 정의된다:

$$\mathrm{RC}\,(\hat{y}_j) = \mathrm{RC}_{\mathrm{Min}}\,(\hat{y}_j) = \begin{cases} \dfrac{\hat{y}_j - \phi_j}{\phi_j}, & \phi_j < \hat{y}_j \\ 0, & \hat{y}_j \le \phi_j \end{cases} \tag{2}$$

반응 적합치가 목표 영역에 있으면, $\mathrm{RC}\,(\hat{y}_j)$ 의 절대값은 그 최소값인 0 이 된다.

2.3 반응을 목표치에 맞추고자 하는 경우

반응치가 어떤 목표치(target)와 같게 되면 연구자가 만족한다고 하자. 아래에서 ϕ_j 는 반응 j 의 목표치를 나타낸다. 이 경우, 반응 j 를 목표치화하기 위한 상대변화 측도는 다음과 같이 정의된다:

$$\mathrm{RC}\,(\hat{y}_j) = \mathrm{RC}_{\mathrm{Target}}\,(\hat{y}_j) = \frac{\hat{y}_j - \phi_j}{\phi_j} \tag{3}$$

반응 적합치가 목표치와 일치하면, $\mathrm{RC}\,(\hat{y}_j)$ 의 절대값은 그 최소값인 0 이 된다.

3. 상대변화 제곱합의 최소화에 의한 다반응 최적화

k 개의 반응변수 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_k$ 의 예측치들로부터 각각의 상대변화를 계산한 후에, 이것들을 제곱하여 합한다. 다음의 SSRC는 상대변화 제곱합(Sum of Squares of Relative Changes)을 의미한다:

$$\mathrm{SSRC} = \sum_{j=1}^{k} [\,\mathrm{RC}\,(\hat{y}_j)\,]^2 \tag{4}$$

k 개의 반응변수들을 설명하는 요인들이 m 개 있어 이것들의 코드화된 수준들을 $x_1,\ \cdots,\ x_m$ 으로 나타낼 때, SSRC를 최소화하는 $(x_1,\ \cdots,\ x_m)$ 점을 찾아냄으로써 다반응 최적화를 구현할 수 있다.

4. 사례 연구

본 다반응 최적화 방법을 Derringer and Suich(1980)에서의 데이터를 이용하여 예시하고자 한다. 이 데이터는 자동차 타이어와 지면과의 접착 효과를 개선하기 위한 3-요인 4-반응 실험으로부터 얻어졌다. 이 실험에서의 요인들은 수산화 규산(x_1), 커플링(x_2) 및 유황(x_3)이고, 반응들은 타이어의 마모정도(y_1), 200% 비율(y_2), 탄력성(y_3) 및 견고성(y_4)이다. <표 1>에 각 반응의 최적화 목적 및 목표가 주어져 있다. <표 1>의 최적화 목표에서 밑줄그어진 부분들은 본 최적화 방법에서 고려되는 조건들로, 각 반응치가 지향하는 가장 중요한 조건들이라고 할 수 있다.

실험 설계 및 반응치들은 <표 2>에 나타나 있다. <표 2>의 실험설계는 원점과 축 점(axial point) 간의 거리가 1.633이고 중심점들의 개수가 6인 중심합성설계(central composite design)이다. <표 3>은 각 반응에의 2차 다항 회귀 모형 적합 결과를 담고 있다.

<표 3>의 모형식들을 이용하여 SSRC를 최소화하는 (x_1, x_2, x_3) 점을 아래의 영역 내의 격자점들 중에서 찾음으로써 다반응 최적화 솔루션을 구해 보았다.

$$\{(x_1,\ x_2,\ x_3):\ -1.633 \le x_1,\ x_2,\ x_3 \le 1.633,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 3\}$$

이 다반응 최적화 방법은 <부록>에 실린 SAS 프로그램에 의하여 실행되었고, 이 방법에 의한 최적화 솔루션은 각 가중치를 2로 정한 바람직성 함수 방법에 의한 최적화 솔루션과 함께 <표 4>에 주어져 있다.

<표 4>의 최적화 솔루션들을 비교하여 보면, 각 반응이 각 목표치를 만족시키는 정도가 전반적으로 더 높은, SSRC에 의한 솔루션이 상대적으로 더 좋아 보인다. 이러한 비교 결과는 이 데이터의 경우에 국한된 것이고, 다른 데이터로부터는 다른 결과가 얻어질 수 있지만, 이 사례 연구에서 주목할 만한 사항은 바람직성 함수 방법이 아닌 다른 방법에 의한 최적화 솔루션이 더 좋아 보일 수 있다는 것이다.

<표 1> 각 반응의 최적화 목적 및 목표

반응	최적화 목적	최적화 목표
타이어 마모정도, y_1	반응의 최대화	<u>상방 목표치: 135</u> 하방 한계치: 120
200% 비율, y_2	반응의 최대화	<u>상방 목표치: 1200</u> 하방 한계치: 1000
탄력성, y_3	반응의 목표치화	하방 한계치: 400 <u>목표치: 500</u> 상방 한계치: 600
견고성, y_4	반응의 목표치화	하방 한계치: 60 <u>목표치: 67.5</u> 상방 한계치: 75

<표 2> 실험 설계 및 반응 데이터

시행 번호	Design (Coded)			Responses			
	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4
1	-1	-1	1	102	900	470	67.5
2	1	-1	-1	120	860	410	65.0
3	-1	1	-1	117	800	570	77.5
4	1	1	1	198	2294	240	74.5
5	-1	-1	-1	103	490	640	62.5
6	1	-1	1	132	1289	270	67.0
7	-1	1	1	132	1270	410	78.0
8	1	1	-1	139	1090	380	70.0
9	-1.633	0	0	102	770	590	76.0
10	1.633	0	0	154	1690	260	70.0
11	0	-1.633	0	96	700	520	63.0
12	0	1.633	0	163	1540	380	75.0
13	0	0	-1.633	116	2184	520	65.0
14	0	0	1.633	153	1784	290	71.0
15	0	0	0	133	1300	380	70.0
16	0	0	0	133	1300	380	68.5
17	0	0	0	140	1145	430	68.0
18	0	0	0	142	1090	430	68.0
19	0	0	0	145	1260	390	69.0
20	0	0	0	142	1344	390	70.0

<표 3> 각 반응 데이터에의 2차 다항 회귀 모형 적합 결과

Model Term	Regression Coefficients			
	y_1	y_2	y_3	y_4
Intercept	139.12	1261.13	400.38	68.90
x_1	16.49	268.15	-99.67	-1.41
x_2	17.88	246.50	-31.40	4.32
x_3	10.91	139.48	-73.92	1.63
x_1^2	-4.01	-83.57	7.93	1.56
x_2^2	-3.45	-124.81	17.31	0.06
x_3^2	-1.57	199.18	0.43	-0.32
x_1x_2	5.13	69.37	8.75	-1.63
x_1x_3	7.13	94.13	6.25	0.13
x_2x_3	7.88	104.38	1.25	-0.25
$\sqrt{MS_{Error}}$	5.6112	328.6934	20.5492	1.2674
R^2	0.9720	0.7422	0.9815	0.9581

<표 4> 상대변화 제곱합 최소화 방법과 바람직성 함수 방법에 의한 최적화 솔루션들

다반응 최적화 방법	x_1	x_2	x_3	y_1 적합치	y_2 적합치	y_3 적합치	y_4 적합치
(1) 상대변화 제곱합 최소화 방법	-0.28	0.23	-0.83	127.804	1248.52	484.909	69.0290
(2) 바람직성 함수 방법	-0.10	0.09	-0.79	129.371	1268.16	466.737	68.0081

5. 요약

지금까지 각 반응치의 목표 영역이 존재할 때 사용될 수 있는 다반응 최적화 방법으로 상대변화 제곱합의 최소화에 의한 방법을 제안하였고, 사례연구를 통하여 이 방법의 실행을 예시하였다. 실제의 경우에서는 추정된 최적점에서 반드시 확인 실험을 실시하여야 하는데, 여러 방법들로 얻어진 최적점들 모두에서 확인 실험을 실시하여 가장 좋은 반응치들을 산출시키는 최적점을 최종 최적화 솔루션으로 선택하는 것을 권장한다.

또한 적절한 통계적 방법의 유효성을 인정하는 경우에도 그 통계적 방법을 실행하기 위한 프로그래밍 방법을 모를 때에는 사실상 그러한 통계적 방법의 실행이 불가능하다는 사실을 감안하여, 사례 연구를 위하여 작성된 SAS 프로그램을 부록에 제공하였다.

참고문헌

[1] 이우선 · 김영주(1997), Desirability 함수 기법에 의한 다중반응표면의 최적화 연구, 응용통계, 12권, 81-105.

[2] 이우선 · 이종협 · 임성수(1999), 다구찌 파라미터 설계에 대한 반응표면 접근방법을 이용한 다반응 최적화, 품질경영학회지, 27권, 1호, 165-194.

[3] 임성수 · 홍승만(1999), 반응표면분석에서의 다반응 최적화: 표준상대변화의 최소화에 의한 방법, 응용통계, 14권, 95-108.

[4] Derringer, D. and Suich, R.(1980), Simultaneous Optimization of Several Response Variables, *Journal of Quality Technology*, Volume 12, 214-219.

[5] Khuri, A. I. and Conlon, M.(1981), Simultaneous Optimization of Multiple Response Represented by Polynomial Regression Functions, *Technometrics*, Volume 23, 363-375.

[6] Khuri, A. I. and Cornell, J. A.(1987), *Response Surfaces,* Marcel Dekker, New York.

부록: 상대변화 제곱합의 최소화에 의한 다반응 최적화 SAS 프로그램

```
OPTIONS NODATE PAGENO=1 LINESIZE=100;
DATA DS1980; INPUT X1 X2 X3 Y1 Y2 Y3 Y4;
LINES;
-1.000 -1.000  1.000 102  900  470  67.5
 1.000 -1.000 -1.000 120  860  410  65.0
-1.000  1.000 -1.000 117  800  570  77.5
 1.000  1.000  1.000 198 2294  240  74.5
-1.000 -1.000 -1.000 103  490  640  62.5
 1.000 -1.000  1.000 132 1289  270  67.0
-1.000  1.000  1.000 132 1270  410  78.0
 1.000  1.000 -1.000 139 1090  380  70.0
-1.633  0.000  0.000 102  770  590  76.0
 1.633  0.000  0.000 154 1690  260  70.0
 0.000 -1.633  0.000  96  700  520  63.0
 0.000  1.633  0.000 163 1540  380  75.0
 0.000  0.000 -1.633 116 2184  520  65.0
 0.000  0.000  1.633 153 1784  290  71.0
 0.000  0.000  0.000 133 1300  380  70.0
 0.000  0.000  0.000 133 1300  380  68.5
 0.000  0.000  0.000 140 1145  430  68.0
 0.000  0.000  0.000 142 1090  430  68.0
 0.000  0.000  0.000 145 1260  390  69.0
 0.000  0.000  0.000 142 1344  390  70.0
;

* The following macro is for multiresponse optimization with a 3-factor 4-response
experiment using a CCD (central composite design) with a spherical design space. ;
*---------------------------------------------------------------------------;
%MACRO MOPTSSRC(DATASET=, CENTERX1=, CENTERX2=, CENTERX3=, HAFRANGE=, INCREMNT=,
GRIDINFO=);

DATA GRID;
     DO X1=&CENTERX1-&HAFRANGE TO &CENTERX1+&HAFRANGE BY &INCREMNT;
     DO X2=&CENTERX2-&HAFRANGE TO &CENTERX2+&HAFRANGE BY &INCREMNT;
     DO X3=&CENTERX3-&HAFRANGE TO &CENTERX3+&HAFRANGE BY &INCREMNT;
          Y1=. ; Y2=. ; Y3=. ; Y4=. ; OUTPUT;
     END; END; END;
```

```
DATA SCHSPACE; SET &DATASET GRID; IF X1*X1 + X2*X2 + X3*X3 <= 3;

TITLE 'Fitting a Second-Order Polynomial Model to Data on Each Response';
PROC GLM DATA=SCHSPACE;
     MODEL Y1-Y4=X1-X3 X1*X1 X2*X2 X3*X3 X1*X2 X1*X3 X2*X3;
          OUTPUT OUT=FITTED P=FIT1-FIT4;
     RUN;

DATA MEASURE; SET FITTED;

     UTARGET1=135; UTARGET2=1200; TARGET3=500; TARGET4=67.5;

          IF FIT1 < UTARGET1 THEN RC1=(FIT1-UTARGET1)/UTARGET1;
     ELSE                         RC1=0;

          IF FIT2 < UTARGET2 THEN RC2=(FIT2-UTARGET2)/UTARGET2;
     ELSE                         RC2=0;

     RC3=(FIT3-TARGET3)/TARGET3;
     RC4=(FIT4-TARGET4)/TARGET4;

     SSRC=RC1*RC1 + RC2*RC2 + RC3*RC3 + RC4*RC4;

     KEEP X1-X3 FIT1-FIT4 RC1-RC4 SSRC;

TITLE 'Multiresponse Optimization by Minimization of SSRC';
TITLE2 '(SSRC = Sum of Squares of Relative Changes)';
TITLE4 'The search space consists of (X1, X2, X3) points on the grid that satisfy the
condition that';
TITLE5 'X1*X1 + X2*X2 + X3*X3 <= 3.';
TITLE7 &GRIDINFO;
TITLE9 'Best 20 (X1, X2, X3) Points in the Search Space';

PROC SORT DATA=MEASURE OUT=SORTED; BY SSRC; RUN;

DATA BEST20; SET SORTED; RANKING=_N_; IF RANKING <= 20;

PROC PRINT DATA=BEST20;
     ID RANKING;
     VAR X1-X3 FIT1-FIT4 RC1-RC4 SSRC; RUN;
```

```
%MEND;
*--------------------------------------------------------------------------;
* %MOPTSSRC(DATASET=DS1980, CENTERX1=0, CENTERX2=0, CENTERX3=0, HAFRANGE=1.65,
INCREMNT=0.05, GRIDINFO='GRID INFO: CENTERX1=0, CENTERX2=0, CENTERX3=0,
HAFRANGE=1.65, INCREMNT=0.05');

  %MOPTSSRC(DATASET=DS1980, CENTERX1=-0.3, CENTERX2=0.2, CENTERX3=-0.8, HAFRANGE=0.1,
INCREMNT=0.01, GRIDINFO='GRID INFO: CENTERX1=-0.3, CENTERX2=0.2, CENTERX3=-0.8,
HAFRANGE=0.1, INCREMNT=0.01');
```