

세라믹 복합체의 굽힘강도 데이터의 통계적분석 : 와이블 형상모수의 추정과 비교를 중심으로

전 영 록

경남대학교 벤처창업학부

Statistical Analysis of Bending-Strength Data of Ceramic Matrix Composites : Estimation of Weibull Shape Parameter

Young-rok Chun

Division of Venture Technology, Kyungnam University

Abstract

The characteristics of Weibull distribution are investigated as a function of shape parameter. The statistical estimation methods of the shape parameter and statistical comparison methods of two or more shape parameters are studied. Assuming Weibull distribution, statistical analysis of bending-strength data of alumina titanium carbide ceramic matrix composites machined two different methods are performed.

1. 서론

와이블분포는 극치분포(*asymptotic distribution of extreme values*) 중의 하나로서 Fisher와 Tippett에 의해 제안된 후 Weibull이 재료의 파열강도의 분포모형으로 이를 적용하여 널리 알려진 분포모형으로 재료의 강도모형이나 제품 또는 부품의 수명모형으로 자주 사용되고 있다[배도선·전영록(1999)].

척도모수 θ , 형상모수 β 인 와이블분포를 따르는 확률변수 T 의 누적분포함수(CDF)는

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^\beta\right\}, \quad t \geq 0 \quad (1)$$

이고, $Y = \log(T)$ 라 하면, Y 는 위치모수 $\mu = \log(\theta)$, 척도모수 $\sigma = 1/\beta$ 인 최소극치분포를 따른다.

즉, Y의 CDF는

$$F(y) = 1 - \exp\left\{-\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right\}, \quad -\infty < y < \infty \quad (2)$$

로서 위치-척도분포족(location-scale family)에 속한다. 이러한 관계로부터 와이블분포에 대한 추론은 대개 이와 동등한 최소극치분포의 추론으로 대신하는 경우가 많다.

와이블 분포는 모수 (θ, β) 에 대한 결합 충분통계량(joint sufficient statistics)이 존재하지 않기 때문에 이에 대한 여러 형태의 추정량이 존재할 수 있는 가능성이 있고, 추정량의 확률분포가 매우 복잡하거나 다루기 어려우므로 추정량의 확률분포표와 근사식에 대한 많은 연구가 있다. 단일 와이블 모집단의 모수추정의 방법은 최우추정과 선형추정으로 나눌 수 있으며, 선형추정량은 제II종 관측중단 데이터의 경우에 대해서 구할 수 있다. 최우추정량과 관련된 연구로 Harter와 Moore(1968), Thoman et al.(1969,1970), Billamn et al.(1972), McCool(1974,1975), Lawless와 Mann(1976) 등이 있으며, 선형추정에 관한 연구로는 Mann(1967,1969), Bain(1972), Mann과 Fertig(1973), Engelhardt와 Bain(1973,1974,1977), Engelhardt(1975) 등이 있다. 두 개 이상 와이블 모집단의 비교에 대한 연구로 Thoman과 Bain(1969), Thoman et al.(1969), Lawless와 Mann(1976), Schafer와 Sheffield(1976) 등이 있다.

이 논문은 산화알루미늄-탄화티타늄(Al_2O_3 -TiC) 세라믹 복합체를 두 가지 방법으로 가공한 후에 측정된 강도데이터를 와이블분포로 모형화하여 비교·분석한다. 보통의 경우 와이블분석의 주요 관심은 척도모수의 추정에 있다. 즉, 척도모수의 값이 클수록 긴 수명 혹은 높은 강도를 갖는 제품이라고 볼 수 있으므로 척도모수에 대한 정확한 추정이 주요 관심사이며 형상모수에 대한 정보는 고장률의 특성 파악에 이용하는 정도로 취급되고 있다. 그러나 형상모수는 평균과 표준편차에 대한 정보를 모두 갖고 있으므로 이에 대한 특성파악과 추정방법 그리고 두 와이블 형상모수의 비교방법에 대한 정확한 이해가 필요하다. 따라서 이 논문에서는 형상모수의 추정과 비교를 중심으로 세라믹 복합체의 강도데이터를 분석한다.

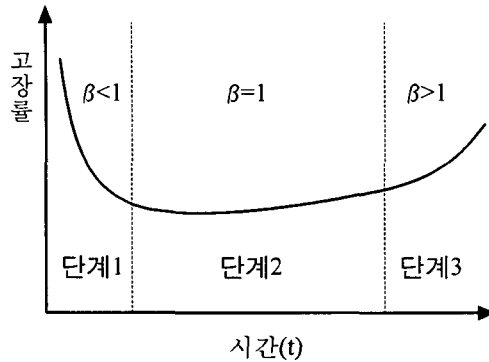
제2절에서는 와이블 형상모수의 특성에 대해서 살펴보고, 제3절에서는 와이블 형상모수의 추정과 두 개 이상의 와이블 모집단의 형상모수의 비교방법에 대한 기존의 연구결과를 정리한다. 그리고 제4절에서는 두 가지 방법으로 가공한 세라믹 복합체의 굽힘 강도 데이터를 와이블분포모형을 적용하여 분석·비교한다.

2. 형상모수의 특성

식(1)의 와이블분포에서 척도모수 $\theta=1$ 이면 T의 CDF는

$$F(t) = 1 - \exp(-t^\beta), \quad t \geq 0 \quad (3)$$

로 나타낼 수 있다. 식(3)에서 $\beta=1$ 이면 평균 1인 지수분포가 되고, $\beta=2$ 이면 평균 $\sqrt{\pi}/2$ 인 랄리분포(Rayleigh distribution)가 된다. 그리고 $\beta \approx 3.6$ 일 때 정규분포에 근사한다. 고장률함수는 $h(t) = \beta t^{\beta-1}$, $t \geq 0$ 로서 $\beta > 1$ 이면 t에 따라 단조증가하고, $\beta < 1$ 이면 단조감소한다. 그리고 $\beta=1$ 일 때는 지수분포의 경우가 되어 t에 관계없이 일정하다. 특히 $\beta=2$ 일 때는 $h(t)$ 는 시간에 따라 선형적으로 증가한다.



<그림1> 고장률 특성

<그림1>은 와이블분포의 고장률특성을 그림으로 나타낸 것이다. 대부분의 기계부품은 단계2와 단계3의 과정을 거치며, 단계2의 고장률은 우발고장(chance failure)의 특성을 나타내고, 단계3의 고장률은 피로(fatigue), 마손(wear), 균열(tear), 부식(corrosion)의 손상특성을 나타낸다. 그리고 $\beta \in [1.5, 2.5]$ 이면 피로특성을 나타내고, $\beta \in [3.0, 4.0]$ 이면, 마손, 균열 또는 부식특성을 나타내는 것으로 알려져 있으며, 볼베어링(ball bearing)의 경우 $\beta \approx 1.5$, 기어의 경우 $\beta \in [0.8, 1.3]$ 으로 알려져 있다[Guérin et al.(2001)].

T의 평균과 분산은 각각 $E[T]=\Gamma(1+1/\beta)$, $Var(T)=\Gamma(1+2/\beta)-\Gamma^2(1+1/\beta)$ 이고, β 가 크면 근사식 $E[T] \approx 1 - 0.57722/\beta + 0.98905/\beta^2$, $Var(T) \approx 1.64493/\beta^2$ 으로 표현된다. 단, 여기서 $\Gamma(v)$ 는 감마함수(gamma function)이다.

<표1>은 형상모수 β 값의 변화에 따른 평균, 표준편차, 변동계수(coefficient of variation), 왜도계수(coefficient of skewness), 첨도계수(coefficient of kurtosis)를 나타낸 것이다. <표1>에서 보면 동일한 척도모수에 대해서 β 의 값이 증가하면 평균은 점점 감소하여 $\beta \approx 2.17$ 에서 최소점을 가지며 표준편차는 감소한다. 특히 β 의 값이 클수록 표준편차가 감소하므로 β 가 클수록 특성치의 산포가 작다는 것을 의미한다. 따라서 비슷한 척도모수를 갖는 경우 큰 β 값을 갖는 제품이 더 좋은 품질을 갖는다고 할 수 있다.

왜도계수는 β 가 증가함에 따라 양의 값에서 감소하여 $\beta \approx 3.6$ 에서 0의 값을 가지며, 이 때 확률밀도함수의 모양이 정규분포의 모양과 비슷하게 된다. Dubey(1967)는 와이블분포와 정규분포의 여러 특성들을 비교하였다. 첨도계수는 $\beta \approx 3.35$ 에서 최소값 2.71을 가진다. Rousu(1973)은 와이블분포의 왜도계수와 첨도계수를 형상모수 β 의 함수로써 분석하였다. Groeneveld(1986)은 왜도와 첨도값에 따른 분포모형 특성을 다루었다.

<표1> β값에 따른 평균, 표준편차, 변동계수, 왜도계수, 첨도계수의 변화

β	평균	표준편차	변동계수	왜도계수	첨도계수
1.2	0.9407	0.7872	0.8369	2.310	6.24
1.4	0.9114	0.6596	0.7238	1.440	4.84
1.6	0.8966	0.5737	0.6399	0.922	4.04
1.8	0.8893	0.5112	0.5749	0.608	3.56
2.0	0.8862	0.4633	0.5227	0.397	3.25
2.2	0.8856	0.4249	0.4798	0.260	3.04
2.4	0.8865	0.3935	0.4438	0.160	2.91
2.6	0.8882	0.3670	0.4131	0.102	2.82
2.8	0.8905	0.3443	0.3866	0.058	2.76
3.0	0.8930	0.3246	0.3634	0.029	2.73
3.2	0.8957	0.3072	0.3430	0.012	2.71
3.4	0.8984	0.2918	0.3248	0.003	2.71
3.6	0.9011	0.2780	0.3085	0.000	2.72
3.8	0.9038	0.2656	0.2939	0.002	2.73
4.0	0.9064	0.2543	0.2805	0.008	2.75

변동계수는 표준편차의 평균에 대한 상대적 크기로서 산포를 비교하는데 널리 이용된다. 와이블분포의 변동계수 φ는 척도모수의 크기와 관계없이 다음 식으로 표현되며, β가 커짐에 따라 점점 감소한다.

$$\phi = \frac{\sqrt{\Gamma(1+2/\beta) - \Gamma^2(1+1/\beta)}}{\Gamma(1+1/\beta)} \tag{4}$$

3. 형상모수의 추정과 두 집단의 비교

와이블 형상모수의 추정은 순위회귀추정(rank regression estimation), 적률추정(moment estimation), 최우추정(maximum likelihood estimation), 선형추정(linear estimation) 등을 사용한다.

3.1 순위회귀추정과 적률추정

식(1)은 $\log[-\log(1-F(t))] = \beta \log(t) + \beta \log(\theta)$ 로 나타낼 수 있고, $t_{(i)}$, $i=1, \dots, n$ 를 $t_{(1)} < t_{(2)} < \dots < t_{(n)}$ 인 순서통계량이라 하면

$$\log[-\log(1-F(t_{(i)}))] = \beta \log(t_{(i)}) - \beta \log(\theta) \tag{5}$$

이다. 식(5)에서 $F(t_{(i)})$ 대신 중앙순위(median rank)를 이용한 추정치 $f_i = (i-0.3)/(n+0.4)$ 를 사용하여 단순회귀모형

$$\log[-\log(1-f_i)] = \beta \log(t_{(i)}) - \beta \log(\theta) + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \tag{6}$$

를 얻을 수 있다. 이식에서 $y_i = \log[-\log(1-f_i)]$, $x_i = \log(t_{(i)})$ 라 두고 구한 직선의 기울기의 최소자승추정치(least square estimates)가 β의 순위회귀추정치 β^{RRE} 이다. 즉, β^{RRE} 는 $y_i = \log[-\log(1-f_i)]$

f)], $x_i = \log(t_{(i)})$, $i=1, \dots, n$ 이라 할 때 다음 식으로 구한다.

$$\beta^{RRE} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \tag{7}$$

일회관측중단 데이터(singly censored data)의 경우에는 고장이 관측된 데이터의 $F(t_{(i)})$ 만 이용하여 β 의 순위회귀추정치를 구한다. 랜덤관측중단 데이터(randomly censored data)의 경우에는 $F(t_{(i)})$ 의 추정치를 구하는데 어려움이 있다. 이 경우에는 누적고장률(cumulative hazard rate)을 이용하거나 복잡한 절차를 이용하여 $F(t_{(i)})$ 의 추정치를 구해야 한다. Wang(2001)은 랜덤관측중단의 경우에 대한 $F(t_{(i)})$ 의 추정방법을 제안하였다.

적률추정량은 완전데이터의 경우에 이용할 수 있으며, β 에 대한 적률추정량으로 Menon(1963)이 잘 알려져 있다. Menon의 추정량 β^{MME} 는 $Y_i = \log(T_i)$, $i=1, \dots, n$ 이고, \bar{Y} 를 Y_i 의 평균이라 할 때

$$\frac{1}{\beta^{MME}} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \tag{8}$$

이고, $\text{Var}(1/\beta^{MME}) = 1.1/(n\beta^2) + O(n^{-2})/\beta^2$ 그리고 $1/\beta^{MME}$ 은 점근적으로 $1/\beta$ 의 불편추정량이며, 정규분포를 따른다.

3.2 최우추정과 추정량의 분포

모수 θ, β 인 와이블 모집단에서 크기 n 의 표본 중 처음 r 개의 순서화된 데이터를 $t_{(1)}, \dots, t_{(r)}$ 라 할 때 형상모수 β 의 최우추정량 β^{MLE} 는

$$\frac{\sum_{i=1}^r t_{(i)}^{\beta^{MLE}} \log t_{(i)} + (n-r)t_{(r)}^{\beta^{MLE}} \log t_{(r)}}{\sum_{i=1}^r t_{(i)}^{\beta^{MLE}} + (n-r)t_{(r)}^{\beta^{MLE}}} - \frac{1}{\beta^{MLE}} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \log(t_{(i)}) \tag{9}$$

을 만족하는 값이다. 최우추정량의 점근성질로부터 n 이 충분히 크면, $\sqrt{n}(\beta^{MLE}/\beta - 1) \rightarrow N(0, \text{Var}(\beta^{MLE}))$ 이다. 여기서 $\text{Var}(\beta^{MLE})$ 는 관측중단개수의 비율 r/n 에 따라 달라지는 값으로 <표2>에 주어져 있다.

<표2> r/n 값에 따른 $\text{Var}(\beta^{MLE})$ 의 값

r/n	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6
$\text{Var}(\beta^{MLE})$	0.608	0.767	0.928	1.122	1.373
r/n	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
$\text{Var}(\beta^{MLE})$	1.716	2.225	3.066	4.739	9.745

표본의 크기가 충분히 큰 경우에는 앞의 정규분포를 이용하여 β 의 구간추정치를 구할 수 있으나, 표본 크기가 충분히 크지 않은 경우에는 이용이 어렵다. 표본의 크기가 충분하지 않은 경우에는 (i) 피벗량(pivotal quantity) (β^{MLE}/β) 의 조건부분포 이용방법; (ii) 몬테칼로 모의분포 이용방법; (iii) χ^2 -근사분포 이용방법 등을 이용할 수 있다.

피벗량 (β^{MLE}/β)의 조건분포는 복잡한 과정을 거쳐서 구할 수 있으며, 이 경우에는 새로운 자료를 분석할 때마다 수치적분을 해야 한다는 번거로움이 있다. Lawless(1982, pp.146-154)는 (β^{MLE}/β)의 조건분포에 대해서 상세히 설명하고 있다.

몬테칼로 모의분포는 $\theta=\beta=1$ 인 와이블분포(평균 1인 지수분포)를 따르는 난수(random number)를 발생시켜 얻은 데이터로부터 구한 β 의 최우추정량의 분포이다. 완전데이터의 경우에는 Thoman et al.(1969,1972), 관측중단된 데이터의 경우에는 Billman et al.(1972), McCool(1974,1975) 등이 구하였다.

최우추정량 β^{MLE} 는 편의추정량이고, 특히 표본크기가 작은 경우 편의가 크므로 모의분포를 이용하는 경우에는 수정된 최우추정량을 이용한다. <표3>의 b_n 은 편의수정값(bias correction factor), 즉 $E[b_n\beta^{MLE}]=\beta$ 를 만족하는 $b_n=1/E[\beta^{MLE}/\beta]$ 의 값을 나타낸 것이다. <표3>은 $\beta^{CMLE}=b_n\beta^{MLE}$ 라 할 때, $T_n(\beta)=\sqrt{n}(\beta^{CMLE}/\beta - 1)$ 의 모의분포, 즉 $P\{T_n(\beta)\leq t_r\}=\gamma$ 를 만족하는 t_r 의 값을 n 과 r 의 여러 가지 조합에 대해서 몬테칼로 모의실험을 통해서 구한 분포표의 일부를 나타낸 것이다. 이 분포표를 이용하면 쉽게 β 의 구간추정치를 구할 수 있다.

<표3> $T_n(\beta)=\sqrt{n}(\beta^{CMLE}/\beta - 1)$ 의 모의분포표 값 t_r 와 편의수정값 b_n (완전데이터의 경우)

n	γ						b_n
	0.02	0.05	0.10	0.90	0.95	0.98	
6	-0.923	-0.742	-0.544	2.523	3.517	5.063	0.752
8	-0.981	-0.792	-0.588	2.113	2.871	3.895	0.820
10	-1.025	-0.829	-0.626	1.904	2.552	3.384	0.859
12	-1.057	-0.859	-0.655	1.777	2.363	3.097	0.883
14	-1.085	-0.883	-0.677	1.691	2.234	2.907	0.901
16	-1.108	-0.900	-0.696	1.624	2.140	2.772	0.914
18	-1.128	-0.916	-0.713	1.574	2.066	2.673	0.923
20	-1.149	-0.935	-0.724	1.534	2.008	2.589	0.931

χ^2 -근사방법은 표본크기 n 과 관측된 데이터의 수 r 에 따라 변하는 상수 ζ , v 를 정의하고, $\zeta(\sigma^{MLE}/\sigma)\rightarrow\chi^2(v)$ 가 되도록 상수 ζ 와 v 구하면 $\zeta(\sigma^{MLE}/\sigma)$ 는 $\chi^2(v)$ 를 따르게 된다. 이때 ζ 와 v 는 $\zeta(\sigma^{MLE}/\sigma)$ 와 $\chi^2(v)$ 의 제1·2차 적률이 동일하도록 정한다. 단, 여기서 $\sigma=1/\beta$ 이다. <표4>는 Harter와 Moore(1968), McCool(1974,1975), Lawless와 Mann(1976)가 구한 χ^2 -근사분포의 자유도 v 의 값의 일부를 나타낸 것이며, $\zeta=v+2$ 이다. 이 경우 β 의 구간추정치는 χ^2 -분포를 이용한 σ 의 구간추정치의 역수로 구한다.

<표4> χ^2 -근사분포의 자유도 v 의 값

r/n	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
5	-	-	-	2.2	3.5	4.7	6.0	7.8	10.3	12.9
10	-	2.0	4.3	6.7	9.1	11.4	14.8	18.5	23.0	29.3
20	2.0	6.2	10.9	15.8	20.7	25.8	32.6	40.0	49.0	62.4

3.3 선형추정과 추정량의 분포

모집단의 분포가 위치-척도분포족에 속할 경우에는 선형추정법으로 모수의 추정량을 구할 수 있으며, 선형추정치를 간편하게 구할 수 있는 수표들이 많이 발표되어 있으므로 컴퓨터의 사용이 용이하지 않은 경우에도 쉽게 추정치를 구할 수 있다는 장점이 있다.

최소극치분포가 위치-척도분포족이므로 최소극치분포의 모수 μ, σ 에 대한 선형추정치를 구하고, $\theta=\exp(\mu), \beta=1/\sigma$ 의 관계로부터 θ 와 β 의 추정치를 구한다. 선형추정량은 확률표본의 선형식으로 주어지는 추정량이다. 식(2)의 최소극치분포의 모수 μ, σ 의 선형추정량으로써 최량선형불편추정량(best linear unbiased estimator, BLUE), 최량선형불변추정량(best linear invariant estimator, BLIE), 우량선형불편추정량(good linear unbiased estimator, GLUE)가 많이 알려져 있다.

모수 μ, σ 에 대한 BLUE는 위치-척도 분포족의 BLUE를 구하는 일반적인 절차로부터 구할 수 있으며, Mann(1967)은 $n=2(1)25, r=2(1)n$ 일 때 BLUE μ^{BLUE} 와 σ^{BLUE} 를 순서통계량 $Y_{(i)}=\log(T_{(i)})$ 의 선형합으로써 구하는 식

$$\mu^{BLUE} = \sum_{i=1}^r a_i(n,r)Y_{(i)}, \sigma^{BLUE} = \sum_{i=1}^r c_i(n,r)Y_{(i)} \tag{10}$$

의 계수 $a_i(n,r)$ 과 $c_i(n,r)$ 의 수표를 제시하였으며, <표5>는 그 일부를 나타낸 것이다. <표6>은 μ^{BLUE} 와 σ^{BLUE} 의 분산과 공분산을 구하는 표로써 $A=\text{Var}(\mu^{BLUE})/\sigma^2, B=\text{Var}(\sigma^{BLUE})/\sigma^2, C=\text{Cov}(\mu^{BLUE}, \sigma^{BLUE})/\sigma^2$ 이다.

<표5> 최소극치분포의 BLUE를 구하는 계수표

i	r	n	$a_i(n,r)$	$c_i(n,r)$	i	r	n	$a_i(n,r)$	$c_i(n,r)$
1	6	6	0.04887	-0.14581	7	8	8	0.18943	0.07577
2	6	6	0.08352	-0.14953	8	8	8	0.27354	0.39419
3	6	6	0.12105	-0.12672	1	10	10	0.02893	-0.07794
4	6	6	0.16562	-0.07320	2	10	10	0.04175	-0.08355
5	6	6	0.22549	0.03599	3	10	10	0.05419	-0.08277
6	6	6	0.35545	0.45927	4	10	10	0.06699	-0.07702
1	8	8	0.03649	-0.10194	5	10	10	0.08062	-0.06607
2	8	8	0.05613	-0.10807	6	10	10	0.09564	-0.04867
3	8	8	0.07590	-0.10273	7	10	10	0.11287	-0.02218
4	8	8	0.09714	-0.08716	8	10	10	0.13385	0.01921
5	8	8	0.12117	-0.05893	9	10	10	0.16231	0.09116
6	8	8	0.15020	-0.01112	10	10	10	0.22287	0.34783

<표6> 최소극치분포의 BLUE의 분산 계수표

r	n	A	B	C	r	n	A	B	C
2	6	2.24401	1.20822	0.91329	8	8	0.14198	-0.02608	0.09292
3	6	0.65294	0.33325	0.43212	2	10	3.90415	1.75847	0.94883
4	6	0.32372	0.10202	0.26972	3	10	1.20424	0.61052	0.46074
5	6	0.22361	0.01053	0.18611	4	10	0.55927	0.28608	0.29754
6	6	0.19117	-0.03137	0.13196	5	10	0.32104	0.14626	0.21547
2	8	3.10999	1.51858	0.93565	6	10	0.21437	0.07344	0.16577
3	8	0.92703	0.48924	0.45028	7	10	0.16152	0.03128	0.13213
4	8	0.43072	0.20509	0.28759	8	10	0.13406	0.00526	0.10748
5	8	0.25805	0.08593	0.20537	9	10	0.11978	-0.01136	0.08814
6	8	0.18658	0.02596	0.15503	10	10	0.11297	-0.02198	0.07157
7	8	0.15510	-0.00718	0.12015					

BLUE를 이용하는 경우, σ 의 구간추정은 χ^2 -근사분포를 이용한다. $E[\sigma^{BLUE}] = \sigma$ 이므로 $\zeta(\sigma^{BLUE}/\sigma) \rightarrow \chi^2(v)$ 가 되도록 양변의 1·2차 적률을 같게 놓으면 $\zeta = v = 2B$ 가 된다. 즉, $\zeta(\sigma^{BLUE}/\sigma) \rightarrow \chi^2(\zeta)$ 이고, $\zeta = 2B$ 이다.

BLIE는 선형불변추정량 중에서 평균제곱오차(mean squared error, MSE)가 최소인 추정량이다. μ, σ 의 BLIE μ^{BLIE} 와 σ^{BLIE} 는 μ 와 σ 의 BLUE와 이들의 분산-공분산 A, B, C로부터 $\mu^{BLIE} = \mu^{BLUE} - \sigma^{BLUE}C/(1+B)$, $\sigma^{BLIE} = \sigma^{BLUE}/(1+B)$ 로 구할 수 있으며, Mann(1969)과 Mann et al.(1974)은 μ, σ 의 BLIE를

$$\mu^{BLIE} = \sum_{i=1}^n a_i^*(n,r)Y_{(i)}, \quad \sigma^{BLIE} = \sum_{i=1}^n c_i^*(n,r)Y_{(i)} \tag{11}$$

로 계산할 수 있도록 $2 \leq r \leq n \leq 13$ 일 때의 $a_i^*(n,r)$ 과 $c_i^*(n,r)$ 의 수표를 제시하였으며, <표7>은 그 일부를 나타낸 것이다.

<표7> 최소극치분포의 BLIE를 구하는 계수표

i	r	n	$a_i^*(n,r)$	$c_i^*(n,r)$	i	r	n	$a_i^*(n,r)$	$c_i^*(n,r)$
1	6	6	0.04483	-0.12881	7	8	8	0.19124	0.06933
2	6	6	0.07938	-0.13210	8	8	8	0.28294	0.36068
3	6	6	0.11754	-0.11195	1	10	10	0.02733	-0.07273
4	6	6	0.16359	-0.06467	2	10	10	0.04003	-0.07797
5	6	6	0.22649	0.03180	3	10	10	0.04003	-0.07724
6	6	6	0.36818	0.40573	4	10	10	0.05250	-0.07188
1	8	8	0.03405	-0.09327	5	10	10	0.06541	-0.06165
2	8	8	0.05355	-0.09889	6	10	10	0.07926	-0.04542
3	8	8	0.07345	-0.09399	7	10	10	0.09464	-0.02070
4	8	8	0.09506	-0.07975	8	10	10	0.11241	0.01793
5	8	8	0.11977	-0.05392	9	10	10	0.13424	0.08507
6	8	8	0.14994	-0.01018	10	10	10	0.16418	0.32460

Mann과 Fertig(1973)는 BLIE로부 피봇량 $T = (\mu^{BLIE} - \mu)/\sigma^{BLIE}$, $T_p = (\mu^{BLIE} - y_p)/\sigma^{BLIE}$, $W = \sigma^{BLIE}/\sigma$ 의 확률분포표를 제시하였으며 <표8>은 피봇량 W의 확률분포의 일부로써 $P\{W \leq w_\gamma\} = \gamma$ 인 w_γ 을

나타낸 것이다.

<표8> 피분량 $W=\sigma^{BLUE}/\sigma$ 의 백분위수 w_γ

n	r	γ								
		0.02	0.05	0.10	0.25	0.50	0.75	0.90	0.95	0.98
6	4	0.18	0.25	0.32	0.49	0.72	1.01	1.33	1.55	1.84
	5	0.25	0.33	0.42	0.58	0.79	1.05	1.33	1.51	1.73
	6	0.33	0.41	0.50	0.65	0.85	1.07	1.31	1.46	1.64
10	4	0.16	0.23	0.30	0.46	0.70	1.00	1.33	1.57	1.86
	5	0.23	0.30	0.38	0.54	0.77	1.04	1.33	1.53	1.77
	6	0.29	0.37	0.45	0.60	0.81	1.06	1.32	1.49	1.71
	7	0.34	0.42	0.50	0.65	0.84	1.07	1.31	1.46	1.66
	8	0.39	0.47	0.54	0.69	0.87	1.08	1.29	1.43	1.60
	9	0.43	0.51	0.59	0.73	0.89	1.08	1.28	1.40	1.55
	10	0.48	0.55	0.62	0.76	0.91	1.09	1.26	1.38	1.51

GLUE는 Bain(1972), Engelhardt와 Bain(1973,1974,1977), Engelhardt(1975) 등이 제안한 것으로 추정량을 간단한 식으로 나타낼 수 있고, 근사분포도 어렵지 않게 구할 수 있다는 장점이 있다. 또한 최우추정량과의 유효성을 비교하면 관측중단이 많은 경우에는 거의 동등하고 완전자료의 경우에도 큰 차이가 없다고 알려져 있다.

σ 의 GLUE σ^{GLUE} 는 다음 식으로 구한다.

$$\sigma^{GLUE} = \begin{cases} \frac{rY_{(r)} - \sum_{i=1}^r Y_{(i)}}{nk(n,r)}, & r < n \text{ 일때,} \\ -\frac{\sum_{i=1}^s Y_{(i)} + \frac{s}{n-s} \sum_{i=s+1}^n Y_{(i)}}{nk_n}, & r = n \text{ 일때} \end{cases} \quad (12)$$

로 구한다. 여기서 $k(n,r)$ 과 k_n 은 $E[\sigma^{GLUE}]=\sigma$ 가 되도록 하는 상수이며, s 는 $0.84n$ 을 넘지 않는 최대정수이다. <표9>는 Engelhardt(1975)가 제시한 $k(n,r)$ 값의 일부를 나타낸 것이며, <표10>은 Engelhardt와 Bain(1973)이 제시한 k_n 과 GLUE의 분산과 공분산을 구하는 표로써 $A^*=\text{Var}(\mu^{GLUE})/\sigma^2$, $B^*=\text{Var}(\sigma^{GLUE})/\sigma^2$, $C^*=\text{Cov}(\mu^{GLUE}, \sigma^{GLUE})/\sigma^2$ 의 일부이다. GLUE를 이용한 모수의 구간추정과 가설검정은 BLUE의 경우와 동일하게 χ^2 -근사분포를 이용한다.

<표9> $k(n,r)$ 값(n 이 클 경우, $k(n,r) \approx k_p + d_1/n + d_2/n^2$)

n	r/n				
	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
10	-	0.2172	0.4667	0.7715	1.202
20	0.0513	0.2721	0.5277	0.8448	1.316
30	0.0684	0.2904	0.5482	0.8697	1.357
k_p	0.1027	0.3272	0.5894	0.9203	1.4436
d_1	-1.0271	-1.1060	-1.2415	-1.5313	-2.6929
d_2	0.000	0.054	0.145	0.433	2.796

<표10> 완전데이터의 경우 k_n 과 GLUE의 분산을 구하는 계수표

n	k_n	A^*	C^*	B^*	n	k_n	A^*	C^*	B^*
2	0.6931	0.6596	0.0643	0.7119	12	1.4461	-0.0164	0.0980	0.0605
3	0.9808	0.4086	-0.0207	0.3476	13	1.3332	-0.0165	0.0890	0.0554
4	1.1507	0.3014	-0.0288	0.2300	14	1.3686	-0.0153	0.0828	0.0509
5	1.2674	0.2402	-0.0271	0.1725	15	1.4004	-0.0143	0.0775	0.0471
6	1.3545	0.2003	-0.0240	0.1385	16	1.4293	-0.0133	0.0728	0.0439
7	1.1828	0.1662	-0.0267	0.1137	17	1.4556	-0.0125	0.0686	0.0412
8	1.2547	0.1456	-0.0242	0.0963	18	1.4799	-0.0117	0.0650	0.0387
9	1.3141	0.1296	-0.0219	0.0836	19	1.3960	-0.0117	0.0609	0.0366
10	1.3644	0.1170	-0.0198	0.0741	20	1.4192	-0.0111	0.0579	0.0346
11	1.4079	0.1066	-0.0180	0.0666					

3.4 두 개이상 와이블 형상모수의 비교

와이블분포의 형상모수의 비교는 우도비검정법(likelihood ratio test)을 사용하는 것이 보통이지만 완전데이터 혹은 제II종관측중단된 데이터의 경우에는 우도비검정법 외의 다른 연구결과가 있다.

모집단 i 의 수명 T_i 의 CDF를

$$F_i(t) = 1 - \exp\{- (t/\theta_i)^\beta\}, \quad i = 1, 2, \dots, k \tag{13}$$

라 하고, n_i 와 r_i 를 각각 모집단 i 에서 취하는 표본의 수와 관측하는 고장의 개수라 하자. 와이블분포의 형상모수의 동일성검정과 최소극치분포의 척도모수의 동일성 검정은 동등하고, 최소극치분포의 척도모수의 대한 추정량의 확률분포가 알려져 있으므로 최소극치분포의 척도모수의 비교를 일반적으로 이용한다.

최우추정량을 이용하는 경우에 두 최소극치모집단의 척도모수의 비교는 피봇량 $U_1 = \sigma_1^{MLE}/\sigma_1$ 과 $U_2 = \sigma_2^{MLE}/\sigma_2$ 의 비 U_1/U_2 의 확률분포를 이용하면 되지만 U_1/U_2 의 정확한 확률분포를 구하는 것이 쉽지 않으며, 모의분포도 특수한 경우에만 주어져 있어서 활용이 쉽지 않다. 일반적으로 두 척도모수의 비교는 σ_i 의 최우추정량, 선형추정량(BLUE와 GLUE)의 χ^2 -근사분포를 이용한다.

최우추정량을 이용하는 경우, $\zeta_i(\sigma_i^{MLE}/\sigma_i) \rightarrow \chi^2(v_i)$, $i=1,2$ 이고, σ_1^{MLE} , σ_2^{MLE} 는 서로 독립이므로

$$F_0 = \frac{(\zeta_1 \sigma_1^{MLE}/v_1)}{(\zeta_2 \sigma_2^{MLE}/v_2)} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \rightarrow F(v_1, v_2) \tag{14}$$

이다. 식(14)의 분포로부터 σ_1/σ_2 의 구간추정치를 구할 수 있고, 귀무가설 $H_0: \sigma_1 = \sigma_2$ 에 대한 검정통계량은 $F_0 = (\zeta_1 \sigma_1^{MLE}/v_1)/(\zeta_2 \sigma_2^{MLE}/v_2) \rightarrow F(v_1, v_2)$ 로부터 가설검정을 수행할 수 있다. BLUE와 GLUE를 이용하는 경우에는 $\zeta_i = v_i$, $i=1,2$ 이므로 식(14)는 각각

$$F_0 = \frac{\sigma_1^{BLUE}}{\sigma_2^{BLUE}} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \rightarrow F(v_1, v_2) \tag{15}$$

$$F_0 = \frac{\sigma_1^{GLUE}}{\sigma_2^{GLUE}} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \rightarrow F(v_1, v_2) \tag{16}$$

가 된다.

k개 모집단의 비교에도 최우추정량, BLUE, GLUE의 χ^2 -근사분포를 이용한다. 정규모집단에서 모분산의 동일성을 검정하는 바틀렛검정(Bartlett test)[Bartlett(1937)]이 모분산이 δ_i^2 인 모집단 i의 n_i 개 표본의 표본분산 V_i 에 대해서 $(n_i - 1)V_i/\delta_i^2 \rightarrow \chi^2(n_i - 1)$ 임을 이용하여 다음의 검정통계량을 얻을 수 있다. 최우추정량을 이용하는 경우, $\zeta_i(\sigma_i^{MLE}/\sigma_i) \rightarrow \chi^2(\nu_i)$ 이므로 검정통계량 Λ 는

$$\Lambda = \nu^* \log(\sigma^*) - \sum_{i=1}^k \nu_i \log(\zeta_i \sigma_i^{MLE} / \nu_i) \tag{17}$$

$$\nu^* = \sum_{i=1}^k \nu_i, \quad \sigma^* = \sum_{i=1}^k \zeta_i \sigma_i^{MLE} / \nu^*$$

가 된다. 검정통계량 Λ 는 표본의 크기가 클 때 귀무가설 $H_0: \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_k$ 하에서 근사적으로 자유도 $(k - 1)$ 인 χ^2 -분포를 따르므로 유의수준 α 인 기각역은 $\Lambda > \chi_{1-\alpha}^2(k - 1)$ 가 된다. BLUE를 이용하는 경우, $\zeta_i = \nu_i, i = 1, 2, \dots, k$ 이므로 식(17)의 Λ 는

$$\Lambda' = \nu^{**} \log(\sigma^{**}) - \sum_{i=1}^k \nu_i \log(\sigma_i^{BLUE}) \tag{18}$$

$$\nu^{**} = \sum_{i=1}^k \nu_i, \quad \sigma^{**} = \sum_{i=1}^k \nu_i \sigma_i^{BLUE} / \nu^{**}$$

가 된다. GLUE를 이용하는 경우에도 BLUE와 마찬가지로의 결과를 얻을 수 있다.

4. 세라믹 복합체의 굽힘 강도 데이터의 분석

복합재료는 그 기질에 사용되는 재료의 종류에 따라 금속계, 세라믹계, 고분자계 복합체 등으로 나뉘어진다. 그 중 세라믹 복합체는 자동차, 항공기 등 여러 분야에 사용되고 있으며, 최근 산업이 고도화됨에 따라 형태와 치수가 복잡하고 정밀한 부품이 요구되고 있어서 세라믹 복합체를 필요한 형태와 치수로 정밀가공하는 것이 매우 중요해지고 있다. 세라믹 복합체는 일반적으로 연삭가공방식으로 가공해 왔는데 이와 같은 방식으로는 고정밀도와 복잡한 형태의 가공이 어려우며 가공속도도 또한 느리다. 최근 특수가공방식인 초음파가공, 방전가공, 레이저가공, 복합가공 등의 새로운 가공기술이 개발되었는데 그 중 방전가공은 재료가 전기전도성이 있어야 한다는 제약이 있지만 복잡한 형상을 정밀하게 가공하는데 매우 적절한 방법으로 알려져 있다[왕덕현 등(1996)].

<표11>의 데이터는 산화알루미늄-탄화티타늄(Al_2O_3 -TiC) 세라믹 복합체를 연삭가공한 경우(집단1)와 연삭가공 후 방전가공(전류 4.5A, 듀티팩터 0.24)한 경우(집단2)에 대해서 시편의 치수, 파괴하중, 굽힘강도 그리고 굽힘강도의 대수값을 나타낸 것이다.

강도의 평균과 표준편차는 집단1의 경우, 570.81, 143.21이고, 집단2의 경우 301.30, 37.10이다. 그리고 대수변환한 데이터의 경우 집단1의 평균과 표준편차는 6.32, 0.25, 집단2는 5.70, 0.12이다. <표12>는 <표11>의 강도데이터의 기초적 통계를 정리한 것이다. 정규분포를 가정하고 두 집단의 표준편차의 동일성검정을 수행하면, 굽힘강도 데이터를 그대로 이용할 경우 유의확률이 0.004이고, 대수변환한 데이터를 이용하는 경우(대수정규분포를 가정)에는 0.064로서 표준편차가 차이가 있는 것으로 평가된다. 즉, 데이터가 정규분포 혹은 대수정규분포를 따른다고 할 수 있는 경우에 방전가공한 시편의 품질이 더 균일한 것으로 평가할 수 있다.

<그림3>은 대수정규확률지와 와이블확률지에 데이터를 타점한 것이며, 그림에서 보면 이 데이터는 대수정규분포 혹은 와이블분포를 따르는 데이터라고 볼 수 있다. 그러나 재료의 강도에 대한 분석에서는 대수정규분포 보다는 와이블분포를 이용하는 것이 일반적이므로 와이블분포를 가정하고 분석한다.

<표11> Al₂O₃-TiC세라믹 복합체의 굽힘강도 데이터

(a) 연삭가공한 시편의 굽힘강도(집단1) (b) 방전가공한 시편의 굽힘강도(집단2)

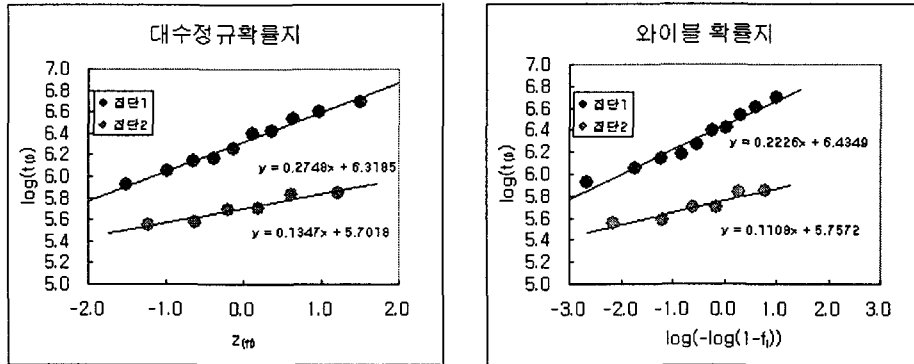
번호	너비 (mm)	두께 (mm)	하중 (kgf)	강도 (MPa)	대수 강도	번호	너비 (mm)	두께 (mm)	하중 (kgf)	강도 (MPa)	대수 강도
1	3.995	2.992	58.25	478.85	6.1714	1	3.994	2.986	42.01	346.83	5.8488
2	3.993	2.996	89.93	737.68	6.6035	2	4.002	2.991	32.35	265.65	5.5822
3	3.985	2.987	83.22	688.14	6.5340	3	3.997	2.990	36.11	297.10	5.6941
4	3.995	2.996	52.08	462.99	6.1377	4	3.997	2.997	36.51	298.99	5.7004
5	3.994	2.994	51.68	424.38	6.0506	5	4.002	2.993	43.62	257.72	5.5519
6	3.991	2.995	63.76	523.63	6.2608	6	3.998	2.998	41.74	341.50	5.8334
7	3.995	2.992	74.50	612.44	6.4175						
8	3.994	2.993	72.88	598.87	6.3950						
9	3.996	2.992	45.10	371.59	5.9178						
10	3.994	2.993	98.52	809.56	6.6965						

<표12> 강도데이터의 기초적인 통계

		평균	표준편차	변동계수	왜도계수	첨도계수
집단1	강도	570.8138	143.2063	0.2509	0.3207	-0.9848
	대수강도	6.3135	0.2530	0.0400	-0.0363	-1.0495
집단2	강도	301.2968	37.0998	0.1231	0.1835	-1.7676
	대수강도	5.7018	0.1231	0.0216	0.0606	-1.7485

4.1 형상모수의 추정

집단1과 집단2의 와이블 형상모수를 각각 β_1, β_2 라 하자. 식(7)을 이용하여 순위회귀추정치 $\beta_1^{RRE}, \beta_2^{RRE}$ 를 구하면 각각 4.492, 9.025이다. 그리고 식(8)로부터 적률추정치를 구하면 $\beta_1^{MME}=5.069, \beta_2^{MME}=10.419$ 이다.



<그림2> 대수정규확률지와 와이블확률지 타점

최우추정치는 뉴턴랩슨방법과 같은 수치적방법으로 구해야 하며, 여기서는 통계패키지 STATGRAPHICS를 이용하여 $\beta_1^{MLE}=4.616$, $\beta_2^{MLE}=10.004$ 를 얻었다.

최우추정치를 이용하는 경우 β 에 대한 구간추정치는 (i) 최우추정량의 점근정규성질을 이용하는 방법[방법I]; (ii) 수정최우추정량의 모의분포를 이용하는 방법[방법II]; (ii) χ^2 -근사분포를 이용하는 방법[방법III]이 있다.

방법I은 표본의 크기가 충분히 크면 $n^{1/2}(\beta^{MLE}/\beta - 1) \rightarrow N(0, \text{Var}(\beta^{MLE}))$ 임을 이용한다. 여기서 $\text{Var}(\beta^{MLE})$ 는 <표2>에서 찾을 수 있으며 완전데이터의 경우에 $\text{Var}(\beta^{MLE})=0.608$ 이다. 이 경우에 β 의 90%구간추정치를 $-z_{0.05} \leq n^{1/2}(\beta^{MLE}/\beta - 1) \leq z_{0.05}$ 에서 $3.507 \leq \beta_1 \leq 6.757$, $7.104 \leq \beta_2 \leq 16.907$ 이 된다.

방법II에서는 먼저 편의수정값을 이용하여 불편추정치를 구한다. 표본 크기에 따라 달라지는 편의수정값을 <표3>에서 찾으면 $b_6=0.752$, $b_{10}=0.859$ 이므로 불편최우추정량은 $\beta_1^{CMLE}=3.965$, $\beta_2^{CMLE}=7.523$ 이다. <표3>의 모의분포에서 $n=10$ 일 때, $t_{0.05}=-0.829$, $t_{0.95}=2.552$ 이고, $n=6$ 일 때, $t_{0.05}=-0.742$, $t_{0.95}=3.517$ 이므로 90%신뢰구간은 $t_{0.05} \leq n^{1/2}(\beta^{CMLE}/\beta - 1) \leq t_{0.95}$ 에서 $2.194 \leq \beta_1 \leq 5.374$, $3.809 \leq \beta_2 \leq 10.793$ 이 된다.

방법III의 경우, <표4>에서 ν 값을 찾으면 $n=10$ 일 때 $\nu=29.3$, $n=6$ 일 때 보간법을 이용하여 구하면 $\nu=16.08$ 이므로 90%신뢰구간은 $\chi_{0.05}^2(\nu) \leq (\nu+2)\sigma^{MLE}/\sigma \leq \chi_{0.95}^2(\nu)$ 에서 $2.612 \leq \beta_1 \leq 6.276$, $4.406 \leq \beta_2 \leq 14.551$ 이 된다.

<표13>은 위의 방법으로 구한 결과를 정리한 것으로 구간폭은 신뢰구간의 길이를 나타낸다. 동일한 신뢰수준에 대해서 신뢰구간의 폭이 좁을수록 좋은 추정치라고 볼 수 있으며, <표13>의 구간폭을 보면 방법II가 작다. 방법II는 편의를 수정한 추정치를 사용하고 있고, 구간폭이 가장 작으므로 이 경우에 가장 적절한 추정치라고 볼 수 있다.

<표13> β_1, β_2 의 90%신뢰구간(최우추정)

방법	집단	점추정	하한	상한	구간폭
I	1	4.616	3.507	6.751	3.244
	2	10.004	7.104	16.907	9.803
II	1	3.965	2.194	5.374	3.180*
	2	7.523	3.089	10.793	7.704*
III	1	4.616	2.612	6.276	3.665
	2	10.004	4.406	14.551	10.145

선형추정치는 대수변환한 데이터로 최소극치분포의 척도모수 σ 의 선형추정치와 구간추정치를 구하고, $\beta=1/\sigma$ 의 관계로부터 β 의 추정치를 구한다.

σ 의 BLUE는 <표5>의 BLUE계수표를 이용하면 $\sigma_1^{BLUE}=0.2394, \sigma_2^{BLUE}=0.1157$ 로 얻을 수 있으며 이 값으로부터 $\beta_1^{BLUE}=4.177, \beta_2^{BLUE}=8.641$ 을 얻는다. <표6>에서 $n=r=10$ 일 때 $B=0.07157$ 이므로 χ^2 -근사분포의 자유도 $\zeta=27.945, n=r=6$ 일 때 $B=0.13196$ 이므로 $\zeta=15.156$ 이다. β 의 90% 신뢰구간은 $\chi_{0.05}^2(\zeta) \leq \zeta(\sigma^{BLUE}/\sigma) \leq \chi_{0.95}^2(\zeta)$ 에서 σ_1 과 σ_2 의 구간추정치를 구하고 역수를 취하면 $2.416 \leq \beta_1 \leq 6.000, 4.139 \leq \beta_2 \leq 14.249$ 이 된다.

BLIE는 <표7>의 BLIE계수표로부터 $\sigma_1^{BLIE}=0.2235, \sigma_2^{BLIE}=0.0999$ 로 얻을 수 있으며 이 값으로부터 $\beta_1^{BLIE}=4.475, \beta_2^{BLIE}=10.009$ 을 얻는다. <표8>의 분포표에서 $n=r=10$ 일 때 $w_{0.05}=0.55, w_{0.95}=1.38, n=r=6$ 일 때, $w_{0.05}=0.41, w_{0.95}=1.46$ 이므로 $w_{0.05} \leq (\sigma^{BLIE}/\sigma) \leq w_{0.95}$ 에서 σ_1 과 σ_2 의 구간추정치를 구하고 역수를 취하면 $2.459 \leq \beta_1 \leq 6.169, 4.104 \leq \beta_2 \leq 14.615$ 가 된다.

GLUE는 식(12)와 <표9>의 k_n 값을 이용해서 구한다. $n=10$ 일 때 식(12)의 $s=8$ 이고, $n=6$ 일 때 $s=5$ 이며, $k_6=1.3545, k_{10}=1.3644$ 이므로 $\sigma_1^{GLUE}=0.2430, \sigma_2^{GLUE}=0.1086$ 이며 이 값으로부터 $\beta_1^{GLUE}=4.116, \beta_2^{GLUE}=9.212$ 를 얻는다. <표10>에서 $n=10$ 일 때 $B^*=0.07405$ 이므로 χ^2 -근사분포의 자유도는 $\zeta=27.009, n=6$ 일 때 $B^*=0.13853$ 이므로 $\zeta=14.437$ 이다. β 의 90%신뢰구간은 $\chi_{0.05}^2(\zeta) \leq \zeta(\sigma^{GLUE}/\sigma) \leq \chi_{0.95}^2(\zeta)$ 에서 σ_1 과 σ_2 의 구간추정치를 구하고 역수를 취하면 $2.461 \leq \beta_1 \leq 6.112, 4.193 \leq \beta_2 \leq 15.112$ 가 된다.

<표14>는 BLUE, BLIE, GLUE의 방법으로 구한 β_1 과 β_2 의 점추정치와 구간추정치를 정리한 것이다. 선형추정치를 이용하는 경우, 신뢰구간의 폭은 세가지 방법간에 큰 차이가 없으나 BLUE를 이용하는 경우가 신뢰구간의 폭이 가장 작다. 최우추정량을 이용하는 경우와 비교하면, 최우추정량의 방법II가 가장 좋은 결과를 나타낸다

<표14> β_1, β_2 의 90%신뢰구간(선형추정)

방법	집단	점추정	하한	상한	구간폭
BLUE	1	4.177	2.416	6.000	3.584
	2	8.641	4.139	14.249	10.100
BLIE	1	4.475	2.459	6.169	3.710
	2	10.009	4.104	14.615	10.511
GLUE	1	4.116	2.461	6.112	3.651
	2	9.212	4.193	15.112	10.920

4.2 두 집단의 형상모수의 비교

와이블분포포의 두 형상모수의 비교와 최소극치분포의 두 척도모수의 비교와 동등하므로 여기서는 최소극치분포의 두 척도모수의 비교만 고려한다.

최우추정량을 이용하는 경우 $\zeta_i(\sigma_i^{MLE}/\sigma_i) \rightarrow \chi^2(\nu_i)$, $i=1,2$ 에서 $\nu_1=29.3$, $\zeta_1=31.3$, $\nu_2=16.08$, $\zeta_2=18.08$ 이고, $\sigma_1^{MLE}=0.2166$, $\sigma_2^{MLE}=0.1000$ 이므로 식(14)에서 $F_0=2.0591(\sigma_2/\sigma_1) \rightarrow F(29.3,16.08)$ 이다. 따라서 (σ_2/σ_1) 의 90%신뢰구간은 $F_{0.05}(\nu_1,\nu_2) \leq F_0 \leq F_{0.95}(\nu_1,\nu_2)$ 에서 $0.2419 \leq \sigma_2/\sigma_1 \leq 1.0683$ 이다. 가설 $H_0:\sigma_1=\sigma_2$ 대 $H_0:\sigma_1>\sigma_2$ 에 대한 검정의 유의확률(significant probability)은 0.0654이다.

BLUE를 이용하는 경우, $\nu_1=27.945$, $\nu_2=15.156$ 이고, $\sigma_1^{BLUE}=0.2394$, $\sigma_2^{BLUE}=0.1157$ 이므로 식(15)에서 $F_0=2.0687(\sigma_2/\sigma_1) \rightarrow F(27.945,15.156)$ 이다. 따라서 (σ_2/σ_1) 의 90%신뢰구간은 $0.2351 \leq \sigma_2/\sigma_1 \leq 1.0950$ 이다. 가설 $H_0:\sigma_1=\sigma_2$ 대 $H_0:\sigma_1>\sigma_2$ 에 대한 검정의 유의확률은 0.0712이다.

GLUE를 이용하는 경우, $\nu_1=27.009$, $\nu_2=14.437$ 이고, $\sigma_1^{GLUE}=0.2230$, $\sigma_2^{GLUE}=0.1086$ 이므로 식(16)에서 $F_0=2.2382(\sigma_2/\sigma_1) \rightarrow F(27.009,14.437)$ 이다. 따라서 (σ_2/σ_1) 의 90%신뢰구간은 $0.2150 \leq \sigma_2/\sigma_1 \leq 1.0394$ 이다. 가설 $H_0:\sigma_1=\sigma_2$ 대 $H_0:\sigma_1>\sigma_2$ 에 대한 검정의 유의확률은 0.0580이다.

<표15>는 σ_2/σ_1 의 90%신뢰구간과 가설 $H_0:\sigma_1=\sigma_2$ 대 $H_1:\sigma_1>\sigma_2$ 에 대한 유의확률을 정리한 것이다. <표15>에서 보면 신뢰구간의 폭은 GLUE를 이용하는 경우가 가장 작으나 BLUE를 이용하는 경우와 큰 차이는 없다. 그리고 유의확률을 보면 BLUE와 GLUE를 이용하는 경우에 유의수준 10%에서 차이가 있다고 할 수 있으나 최우추정치인 경우에는 그렇지 않다.

<표15> σ_2/σ_1 의 90%신뢰구간과 유의확률

방법	하한	상한	구간폭	유의확률
최우추정	0.2419	1.0683	0.8263	0.0654
BLUE	0.2351	1.0950	0.8598	0.0712
GLUE	0.2150	1.0394	0.8244	0.0580

5. 결론

이 논문에서는 세라믹 복합체의 굽힘강도 데이터를 와이블분포를 이용하여 분석하였다. 와이블분포의 형상모수의 특성과 형상모수에 대한 최우추정과 관련된 기존의 연구결과들과 선형추정과 관련된 여러 연구결과들 그리고 두 와이블 모집단의 형상모수의 동일성을 검정하는 방법에 대해서 정리하였다.

세라믹 복합체의 굽힘강도 데이터는 보통 와이블분포를 이용하여 분석하며, 형상모수의 크기가 클수록 특성치의 표준편차가 작으므로 형상모수가 큰 집단의 특성치가 더 균일하다고 할 수 있다. 이 논문의 데이터를 분석한 결과 (i) 두 집단의 형상모수는 모두 1보다 큰 값을 가지며; (ii) 두 집단의 형상모수를 비교한 결과 분석방법에 따라 차이가 있으나 유의수준 10%에서 유의한 차이가 있는 것으로 평가되었다. 그리고 여러 가지 분석 방법을 신뢰구간의 폭을 기준으로 비교하면 (i) 최우추정량을 이용하는 경우에는 모의분포를 이용하는 것이 신뢰구간의 폭이 가장 작으며; (ii) 선형추정량을 이용하는 경우에는 크게 차이는 나지 않았지만 BLUE를 이용하는 경우가 신뢰구간의 폭이 가장 작았다.

참고문헌

- [1] Bain, L.J.(1972), Inferences Based on Censored Sampling from the Weibull or Extreme Value Distribution, *Technometrics*, 14, 693-702.
- [2] Bartlett, M.S.(1937), Properties of Sufficiency and Statistical Tests, *Proc. R. Soc. London A*, 160, 268-282.
- [3] Billman, B., Antle, C. and Bain, L.J.(1972), Statistical Inference from Censored Weibull Samples, *Technometrics*, 14, 831-840.
- [4] Dubey, S.D.(1967), Normal and Weibull Distributions, *Naval Research Logistics Quarterly*, 14, 69-79.
- [5] Engelhardt, M.(1975), On Simple Estimation of the Parameters of the Weibull or Extreme Value Distribution, *Technometrics*, 17, 369-374.
- [6] Engelhardt, M. and Bain, L.J.(1973), Some Complete and Censored Sampling Results for Weibull or Extreme Value Distribution, *Technometrics*, 15, 541-549.
- [7] Engelhardt, M. and Bain, L.J.(1974), Some Results on Point Estimation for the Two-Parameter Weibull or Extreme Value Distribution, *Technometrics*, 16, 49-56.
- [8] Engelhardt, M. and Bain L.J.(1977), Simplified Statistical Procedures for the Weibull or Extreme-Value Distributions, *Technometrics*, 19, 323-331.
- [9] Groeneveld, R.A.(1986), Skewness for the Weibull Family, *Statistica Neerlandica*, 40, 135-140.
- [10] Guérin, F., Dumon, B. and Hambli, R.(2001), Determining the Shape Parameter of a Weibull Distribution from Mechanical Damage Models, *2001 Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium*, 156-159.
- [11] Harter. H.L. and Moore, A.H.(1968), Maximum Likelihood Estimation, from Double Censored Samples, of the Parameters of the First Asymptotic Distribution of Extreme Values, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 63, 889-901.
- [12] Lawless, J.F. and Mann, N.R.(1976), Tests for Homogeneity for Extreme Value Scale Parameters, *Comm. Stat. - Theo. & Method.*, A5, 389-405.
- [13] Mann, N.R.(1967a), Tables for Obtaining the Best Linear Invariant Estimates of Parameters of the Weibull Distribution, *Technometrics*, 9, 629-645.
- [14] Mann N.R.(1969), Optimum Estimators for Linear Functions of Location and Scale Parameters, *Ann. Math. Stat.*, 40, 2149-2155.
- [15] Mann, N.R. and Fertig, K.W.(1973), Tables for Obtaining Confidence Bounds and Tolerance Bounds Based on Best Linear Invariant Estimates of Parameters of the Extreme-Value Distribution, *Technometrics*, 15, 87-101.
- [16] Mann N.R., Schafer, R.E., and Singpurwalla, N.D.(1974), *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*, John Wiley & Sons, New York.
- [17] McCool, J.I.(1974), Inferential Techniques for Weibull Populations, *Aerospace Research Laboratory*, TR No. 74-0180, Wright-Patterson AFB, Ohio.

- [18] McCool, J.I.(1975), Multiple Comparison for Weibull Parameter, *IEEE Trans. on Rel.*, R-24, 186-192.
- [19] Menon, M.V.(1963), Estimation of the Shape and Scale Parameters of the Weibull Distribution, *Technometrics*, 5, 175-182.
- [20] Rousu, D.N.(1973), Weibull Skewness and Kurtosis as a Function of the Shape Parameter, *Technometrics*, 15, 927-930.
- [21] Schafer, R.E. and Sheffield, T.S.(1976), On Procedures for Comparing Two Weibull Populations, *Technometrics*, 18, 231-235.
- [22] Thoman, D.R. and Bain, L.J.(1969), Two-Sample Tests in the Weibull Distribution, *Technometrics*, 11, 805-816.
- [23] Thoman, D.R., Bain, L.J., and Antle, C.E.(1969), Inferences on the Parameters of the Weibull Distribution, *Technometrics*, 11, 445-460.
- [24] Thoman, D.R., Bain, L.J., and Antle, C.E.(1970), Maximum Likelihood Estimation, Exact Confidence Intervals for Reliability and Tolerance Limits in the Weibull Distribution, *Technometrics*, 12, 363-371.
- [25] Wang, W.(2001), Improving the Quality of Field Data Reliability Analysis, *2001 Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium*, 285-289.
- [26] 배도선, 전영록(1999), 신뢰성분석(대우학술총서449), 아르케.
- [27] 왕덕현, 우정윤, 윤존도, 고철호, 안영철, 정영섭(1996), 산화알루미늄-탄화티타늄 (Al_2O_3 -TiC) 세라믹 복합체의 방전가공, *경남대학교 신소재연구소 연구논문집*, 7, 191-202.