
AWGN 환경에서 웨이브렛을 이용한 잡음 제거 방법에 관한 연구

배상범* · 김남호*

A Study on Denoising Methods using Wavelet in AWGN environment

Sang-Bum Bae* · Nam-Ho Kim*

요 약

본 논문에서는 웨이브렛을 이용한 두 가지 새로운 잡음 제거 방법으로, 공간적 상관관계를 이용한 NSSNF(new spatially selective noise filtration)과 threshold에 기초한 UDWT(undecimated discrete wavelet transform)을 제시한다. NSSNF에서는 기존의 SSNF에 새로운 파라메타를 추가하여, 융통성 있는 SNR 이득 특성을 얻도록 하였으며, UDWT에서는 hard-threshold를 적용하여, 기존의 soft-threshold를 적용한 OWT(orthogonal wavelet transform)보다 우수한 잡음 제거 효과를 얻도록 하였다. 이러한 테스트 환경으로는 AWGN을 선택하였으며, 개선 효과의 판단 기준으로 SNR을 사용하여, 기존의 잡음 제거 방법과 비교 분석하였다.

ABSTRACT

This paper presents the new two denoising methods using wavelet. One is new spatially selective noise filtration(NSSNF) using spatial correlation and the other is undecimated discrete wavelet transform(UDWT) threshold-based. NSSNF got the flexible gain special property of SNR adding new parameter at the existing SSNF and UDWT had superior denoising effect than orthogonal wavelet transform(OWT) applied soft-threshold by applied hard-threshold. We selected additive white gaussian noise(AWGN) in this test environment. Also we analyzed and compared existing denoising method using SNR as standard of judgement of improvemental effect.

키워드

Denoising, spatially selective noise filtration, spatial correlation, undecimated discrete wavelet transform, threshold.

1. 서론

사회가 고도의 디지털 정보화 시대로 급속히 발전함에 따라 영상 및 음성 데이터의 획득, 전송, 저장

위한 멀티 미디어 통신 서비스가 국내외적으로 상용화되어가고 있다. 그러나, 여전히 데이터를 디지털화하거나 전송하는 과정에서 여러 가지 원인에 의해 임펄스 잡음과 가우시안 잡음 등이 발생하고 있으며, 이러한 잡음을 제거하기 위한 연구는 지금까지 계속되고 있다.

*부경대학교 공과대학 제어계측공학과

접수일자 : 2001. 7. 23

최근 수년간 다해상도 해석이 가능한 웨이브렛 변환은 많은 공학 분야에 응용되고 있으며, 입력 신호를 서로 다른 해상도로 표현하기 위한 부 신호들과 나머지 신호들을 표현하기 위한 상세 신호들로 분해하고, 이들 인접한 scale에서의 상세 신호들 사이의 상관관계는 잡음 제거에 이용될 수 있다. 이러한 웨이브렛 변환에 사용되는 기저함수는 원형(prototype) 웨이브렛을 확장/수축 그리고, 천이시킴으로써 얻을 수 있다.

기존의 웨이브렛을 이용한 잡음 제거 방법에는, 인접한 scale에서의 높은 상관관계에 의해 edge를 인식하는 공간적 상관도를 이용한 잡음 제거 방법(SSNF)과 soft-threshold를 적용한 직교 웨이브렛 변환(OWT)등이 있으며, 이에 상응해서 본 논문에서는 새로운 파라메타 계수를 적용한 NSSNF(new SSNF)와 hard-threshold를 적용한 UDWT를 제안하여, 기존의 방법과 비교 분석하였다. 이러한 테스트 잡음 환경에는 여러 가지 형태가 존재하지만, 본 논문에서는 AWGN을 선택하고, 개선효과의 판단 기준으로 SNR을 사용하였으며, noisy signal은 동등하게 8dB의 SNR을 적용하여 시뮬레이션하였다.

II. 웨이브렛을 이용한 잡음 제거

2-1 웨이브렛 변환

신호 $f(t) \in L^2(R)$ 이면, 연속 웨이브렛 변환(CWT)은 식 (1)과 같이 정의될 수 있으며, *는 공액복소를 의미하고, $\psi^*((t-b)/a)$ 는 Fourier 변환의 $e^{-j\omega t}$ 와 같은 기저함수 기능을 한다. 그리고, $\psi(t)$ 는 mother wavelet이며, 식 (2)의 조건을 만족하여야 하고, $\psi(t)$ 의 이동과 확장에 의해 식 (3)의 baby wavelet을 얻을 수 있으며, scale factor a 가 변함에 따라 창이 넓어지거나 확대 또는 축소된다.

$$\begin{aligned} (W_\psi f)(b, a) &= |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (1) \\ a, b &\in L^2(R) \quad a \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt &= 0 \quad (2) \\ \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt &< \infty \end{aligned}$$

$$\psi_{a,b}(t) = \psi((t-b)/a)/\sqrt{a} \quad (3)$$

따라서, 짧은 지속시간을 갖는 고주파 신호에 대해서는 짧은 길이의 창함수를 사용하고, 긴 지속시간을 갖는 저주파 신호에 대해서는 긴 창함수를 사용하게 되어 주파수 영역에 따른 다중 해상도를 갖게 된다.

이러한 연속 웨이브렛 변환을 이산적인 형태로 바꾸고, 계수 구현을 용이하게 하기 위해 scale factor $a = 2$ 로 하는 dyadic 웨이브렛 변환은 식 (4)와 같으며, 일반적으로 이산 웨이브렛 변환(DWT)이라 한다.

$$\begin{aligned} (W_\psi f)_d &= 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*(2^{-j}t - k) dt \quad (4) \\ j, k &\in Z \end{aligned}$$

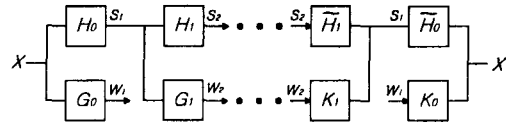


그림 1. Dyadic 웨이브렛 변환
Fig. 1 Dyadic wavelet transform.

Fast discrete 알고리즘[1]은 그림 1과 같으며, 필터 F_j 는 F_0 의 각 계수들 사이에 $(2^j - 1)$ 개의 영을 놓는 것에 의해 얻어지므로, F_j 의 대역폭은 F_0 대역폭의 $1/2^j$ 이다.

2-2 Scale에 따른 AWGN의 분산 σ_m^2

그림 1로부터 X 가 화이트 가우시안 잡음 $x \sim N(0, \sigma^2)$ 이라고 가정할 때, 첫 번째 웨이브렛 변환 데이터 $W_1 = X * G_0$ 의 분산은 식 (5)와 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= D(W_1) = D(X * G_0) \\ &= \|g_n^0\|^2 \cdot D(X) = \sigma^2 \|g_n^0\|^2 \quad (5) \end{aligned}$$

따라서, m 번째 웨이브렛 변환 데이터의 분산은

그림 1의 피라미드 분해 구조로부터, 다음의 식 (6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_m^2 = \sigma^2 \left\| h_n^0 * h_n^1 * \dots * h_n^{m-2} * g_n^{m-1} \right\|^2 \quad (6)$$

2-3 공간적 상관도를 이용한 잡음 제거

웨이브렛 변환 데이터에는 scale에 따라서 경계선에 의한 edge와 잡음에 의한 edge가 존재하며, 경계선에 의한 edge는 일반적으로 잡음에 의한 edge보다 큰 값을 가지고, 잡음에 의한 edge는 scale에 따라서 급속히 작아진다.

이러한 특징을 이용한 인접한 scale에서의 웨이브렛 계수들 간의 공간적 상관도는 경계선과 잡음의 판단 기준을 제시한다.

$$Corr_l(m, n) = \prod_{i=0}^{l-1} W(m+i, n) \quad (7)$$

$n = 1, 2, \dots, N$

식 (7)의 공간적 상관함수 $Corr_l(m, n)$ 는 잡음의 작고 날카로운 특징을 억제하는 동안, 경계선의 중요한 특징과 edge가 강화되도록 하며, $W(m, n)$ 은 웨이브렛 변환 데이터를 의미하고, m 은 scale index, n 은 translation index이며, $l < M - m + 1$, M 은 scale의 총수이다. 식 (7)에서, 일반적으로 $l = 2$ 를 선택하여 인접한 두 scale에서의 웨이브렛 변환 데이터의 상관도를 계산한다.

SSNF 알고리즘[2]은 다음과 같이 설명되며, 여파된 데이터는 $W_{new}(m, n)$ 로 표현한다.

1) 모든 웨이브렛 scale m 에 대해 상관함수 $Corr_2(m, n)$ 를 계산한다.

2) $\{W(m, n)\}$ 과 $\{Corr_2(m, n)\}$ 의 파워를 공식화하여, $\{New\ Corr_2(m, n)\}$ 를 얻는다.

$$New\ Corr_2(m, n) = Corr_2(m, n) \sqrt{PW(m)/PCorr(m)} \quad (8)$$

여기서, $PCorr(m) = \sum_n Corr_2(m, n)^2$

$$PW(m) = \sum_n W(m, n)^2$$

3) 만약, $|New\ Corr_2(m, n)| \geq |W(m, n)|$ 이면

그 점을 edge로 받아들인다. 그러나, fine scale에서 잡음은 경계선에 의한 edge를 제외하고는 지배적이므로, $|W(m, n)|$ 와 $|New\ Corr_2(m, n)|$ 의 비교에서 상당히 많은 잡음이 edge처럼 구해질 것이다. 이러한 경우를 피하기 위해, 본 논문의 new SSNF에서는 새로운 파라메타 $\lambda(m)$ 를 도입하여, 다음의 식 (9)를 만족할 때 그 점을 edge로써 받아들이고, $|W(m, n)|$ 의 데이터를 $W_{new}(m, n)$ 에 옮긴다.

$$|New\ Corr_2(m, n)| \geq \lambda(m) |W(m, n)| \quad (9)$$

4) m 번째 웨이브렛 scale에서 $W(m, n)$ 의 파워가 어떤 reference 잡음의 파워와 거의 동등할 때까지 2)와 3)을 반복한다.

최종적으로, 어떤 웨이브렛 scale에서 벡터 $W_{new}(m, n)$ 를 얻고, 이것을 이용하여 신호를 재건한다. 여기서, 잡음이 화이트 가우시안이라고 가정하여, reference 잡음의 파워를 추정한다.

$\sqrt{PX/N}$ 은 수열 $x \sim N(0, \sigma^2)$ 에 대해서 σ 의 점근적인 추정치이며, K 지점이 구해졌다고 가정할 때, $W'(m, n)$ 은 $W(m, n)$ 에서 구해지지 않은 지점들을 의미한다. 만약, $W'(m, n)$ 이 잡음에 의해 생성됐다면, $PW'(m)/(N-K)$ 은 σ_m^2 의 점근적인 추정치이며, $(N-K)\sigma_m^2$ 은 reference 잡음의 파워로서 사용될 수 있다.

실제로, $W'(m, n) = W_s'(m, n) + W_n'(m, n)$ 이며, $W_s'(m, n)$ 과 $W_n'(m, n)$ 은 각각 원신호와 잡음의 웨이브렛 변환이고, $W'(m, n)$ 의 파워는 식 (10)으로 정의 될 수 있다.

$$\begin{aligned} PW'(m) &= (N-K) \cdot E\{W'(m, n)^2\} \\ &= (N-K) \cdot E\{W_s'(m, n)^2 \\ &\quad + W_n'(m, n)^2 \\ &\quad + 2W_s'(m, n)W_n'(m, n)\} \\ &= (N-K) \cdot E\{W_s'(m, n)^2\} \\ &\quad + (N-K) \cdot \sigma_m^2 \end{aligned} \quad (10)$$

위의 식 (10)으로부터 식의 전반부는 K 지점으로

구해지지 않은 원신호 성분이며 scale에 따라 증가하지만, 식의 후반부는 추정되는 잡음 성분으로써 scale에 따라 감소한다.

따라서, fine scale에서는 σ_m^2 이 우위를 나타내고, coarse scale에서는 $E\{W_s'(m, n)^2\}$ 이 우위를 나타낸다.

2-4 표준편차 σ 의 추정

잡음은 fine scale에서 지배적이므로, σ 는 첫 번째 두 개의 scale로부터 추정될 수 있다.

만약, $|New\ Corr_2(1, n)| \geq \lambda(1) |W(1, n)|$ 이면 $W(1, n)$ 의 상응하는 데이터를 0으로 reset하고, $W(1, n)$ 의 나머지 데이터를 $\hat{W}(1, n)$ 으로 대체한다. 이때 K 지점들이 완전히 제거됐다면, $\hat{W}(1, n)$ 은 잡음에 의해 생성된 것으로 고려되어질 수 있고, $\sigma = \sigma_m / \|g_n^0\|$ 와 σ_1^2 의 점근적 추정치 $P\hat{W}(1) / (N-K)$ 로부터 추정된 표준편차 식 (11)을 얻을 수 있다.

$$\hat{\sigma} = \sqrt{P\hat{W}(1)/(N-K)} / \|g_n^0\| \quad (11)$$

2-5 Threshold에 기초한 잡음 제거

Threshold에 기초한 방법들은 잡음 제거에 효과적이며, 다음과 같이 그 알고리즘이 매우 간단하다.

- 1) 잡음이 첨가된 noisy 신호를 웨이브렛 변환하여 웨이브렛 계수 w 를 얻는다.
- 2) 각 scale m 에서 hard 또는 soft-threshold t 를 적용한다.
- 3) Original 영역으로 역변환하고, 추정된 신호를 얻는다.

OWT에서 Donoho[3]-[5]는 soft-threshold를 적용하였으며, 식 (12)와 같다.

$$\eta_t(w) = \text{sgn}(w) (|w| - t)_+ \quad (12)$$

여기서, $t = \sigma\sqrt{2 \log N}$ 이고, N 은 신호의 길이이다. 이것과 상응해서, 본 논문에서는 UDWT와 식 (13)의 hard-threshold를 사용하였다.

$$\hat{w}(m, n) = \begin{cases} w(m, n), & |w(m, n)| > t(m) \\ 0, & |w(m, n)| \leq t(m) \end{cases} \quad (13)$$

여기서, $t(m) = c \cdot \sigma_m$ 이며, i.i.d.(independent and identically distributed) 가우시안 잡음 $x \sim N(0, \sigma^2)$ 에 대해서, $t = \sigma, 2\sigma, 3\sigma, \dots$ 가 잡음의 68.26%, 95.44%, 99.74%...를 제거하므로, 3~4사이의 c 값을 사용한다.

III. 시뮬레이션 및 결과

본 논문에서는 기존의 SSNF 방법에 대응하여 새로운 파라메타를 추가한 NSSNF 방법을 제시하였으며, soft-threshold를 사용한 OWT에 대응하여, hard-threshold를 적용한 UDWT를 제시하여 시뮬레이션하였다.

시뮬레이션의 테스트 신호로서 여러 가지 신호를 사용할 수 있으나, 본 논문에서는 성능 평가의 객관적 판단을 위해, Blocks, Bumps, Doppler, 그리고 HeaviSine을 사용하였으며, 또한 각각의 noisy signal은 동일하게 8dB를 적용하였다.

그림 2, 3, 4, 5는 각각 Blocks과 Bumps 그리고, Doppler와 HeaviSine에 대한 True, Noisy version과 OWT, SSNF, NSSNF, UDWT를 이용해 잡음을 제거한 뒤, 복원한 신호를 나타내고 있다. 그리고, 그림 6, 7, 8, 9는 각 신호들에 대해서, SNR에 따른 SNR 이득을 도표로써 나타내고 있으며, 비교를 위해 각각의 방법들에 따른 개선 효과를 함께 나타내었다.

그림으로부터 open type은 기존의 방법들을 나타내고 있으며, solid type은 제안된 방법을 나타내고 있다. 공간적 상관도를 이용한 잡음 제거 방법에서는 NSSNF 방법이 SSNF 방법보다 같거나 우수한 특성을 나타내었으며, 본 논문에서 사용한 파라메타 계수 벡터에 의해서는 낮은 SNR 영역에서 더 큰 개선 효과를 얻었다. 그리고, threshold에 기초한 방법에서는 UDWT 방법이 OWT에 비해 항상 우수한 특성을 나타내었으며, 전체적으로 가장 우수하였다.

IV. 결론

본 논문에서는 새로운 파라메타 계수를 적용한 NSSNF 방법과 hard-threshold를 적용한 UDWT 방

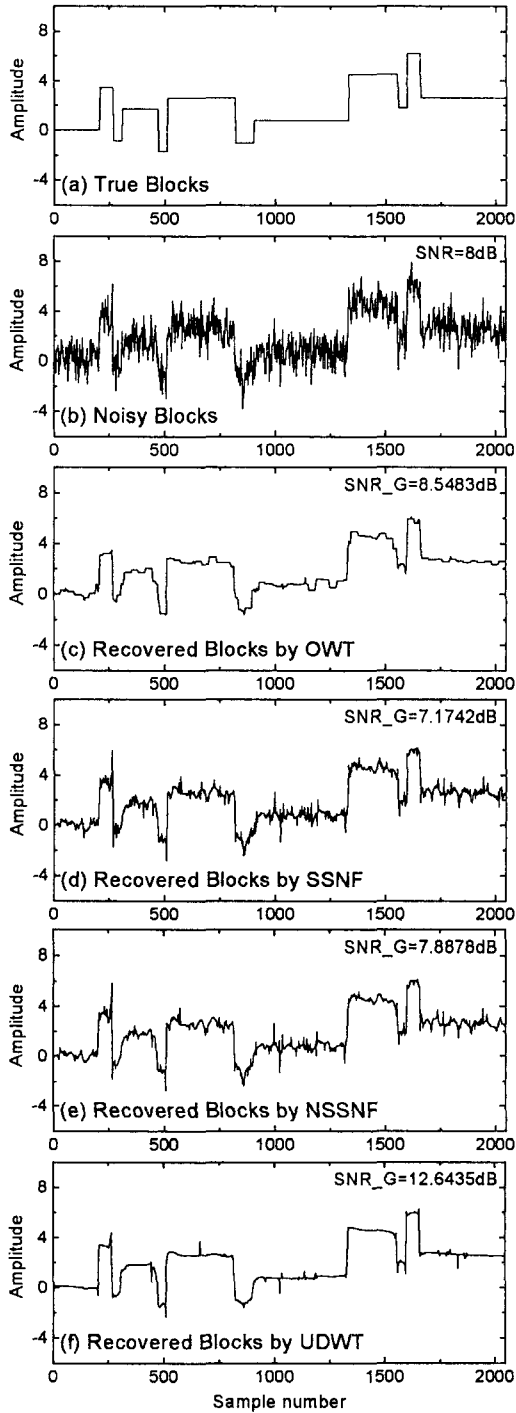


그림 2. 복원된 Blocks 신호
 Fig. 2 Recovered Blocks signal.

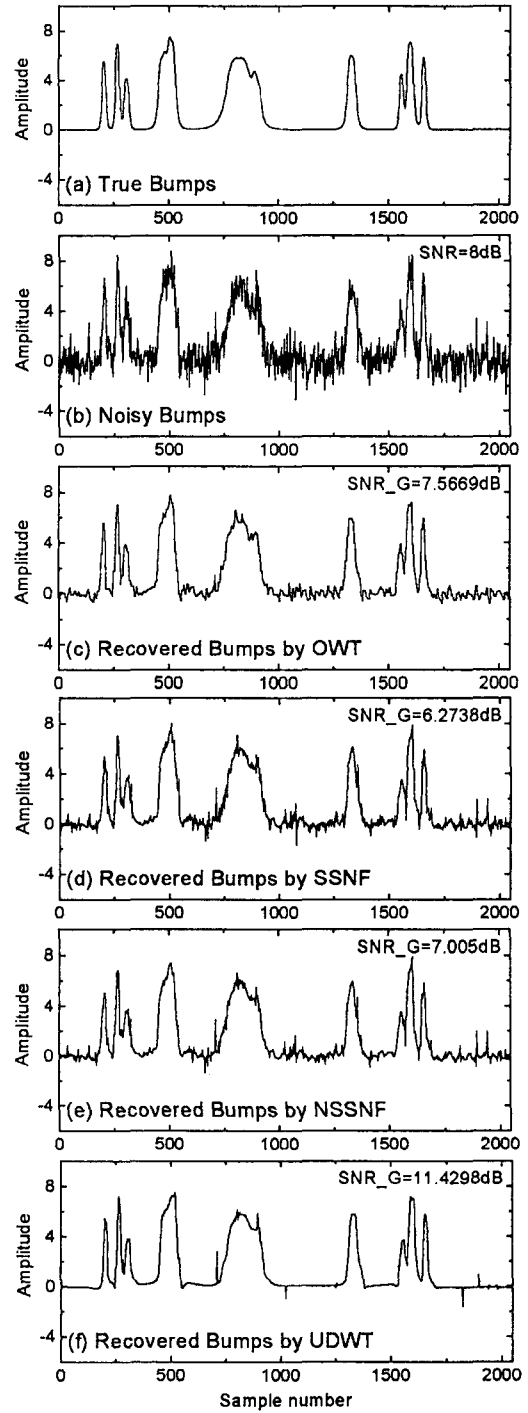


그림 3. 복원된 Bumps 신호
 Fig. 3 Recovered Bumps signal.

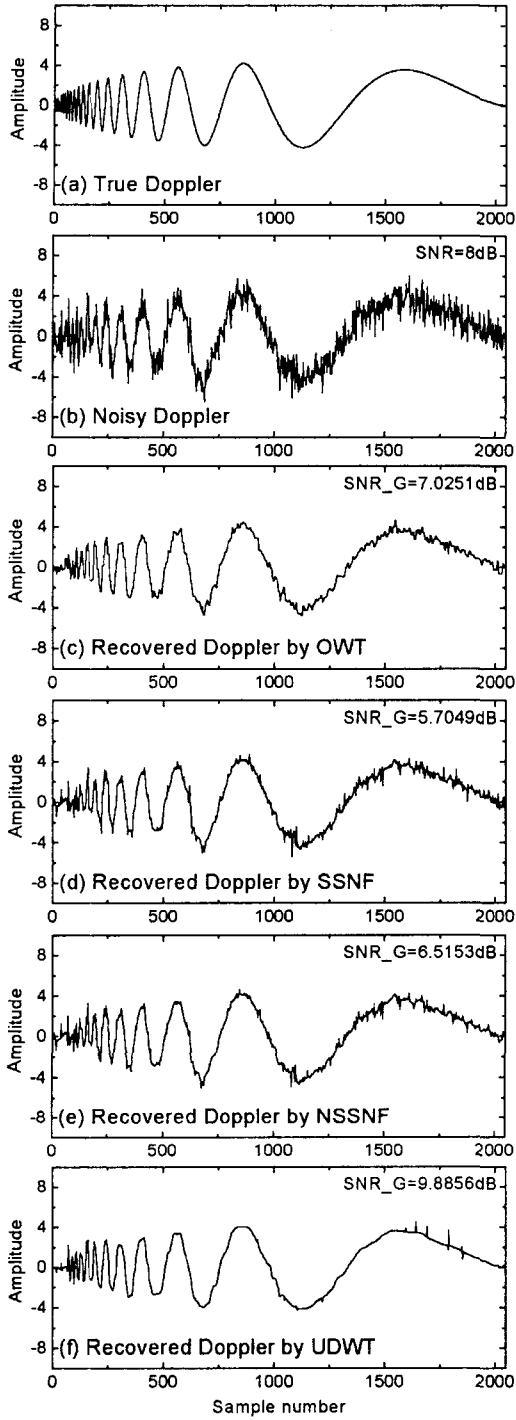


그림 4. 복원된 Doppler 신호
 Fig. 4 Recovered Doppler signal.

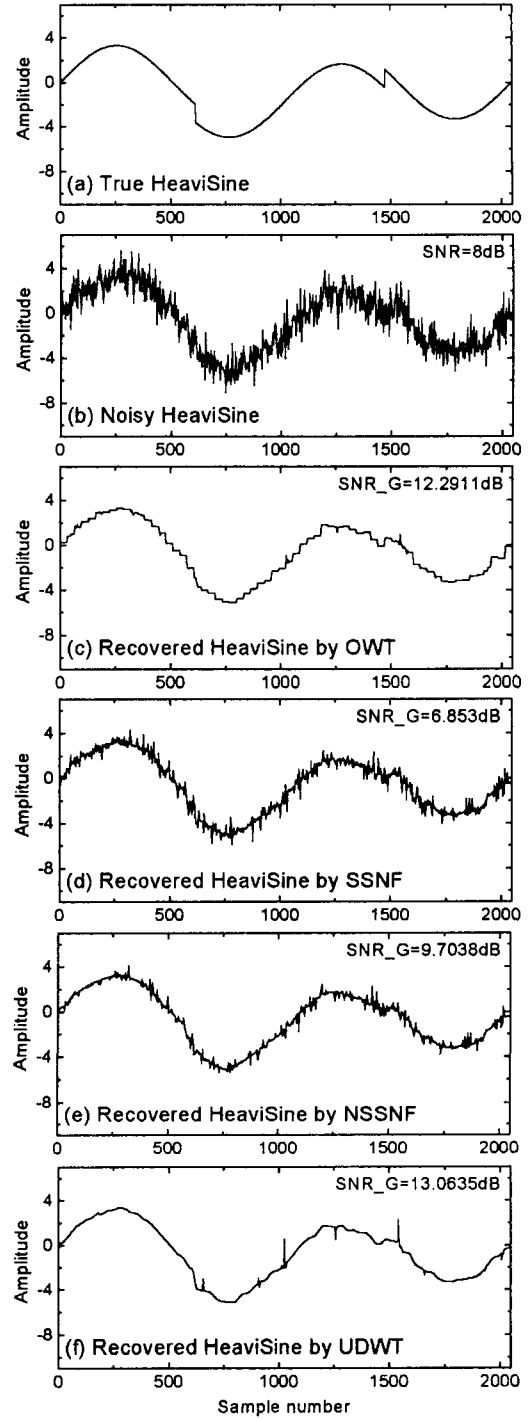


그림 5. 복원된 HeaviSine 신호
 Fig. 5 Recovered HeaviSine signal.

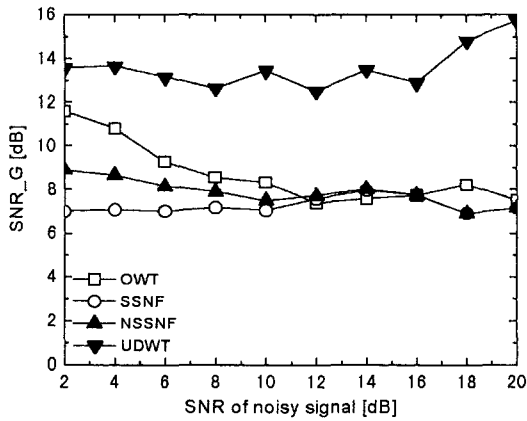


그림 6. 각 방법에 대한 Blocks의 SNR_G
Fig. 6. SNR_G of Blocks for each methods.

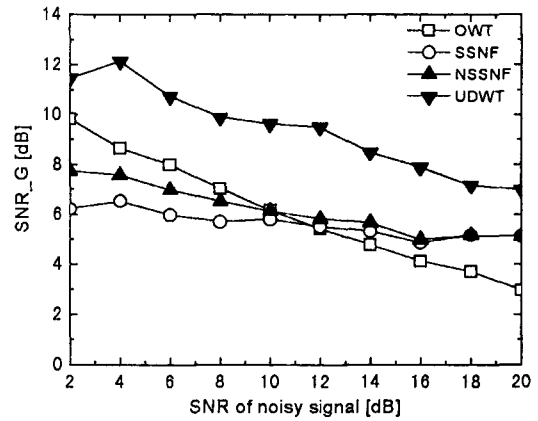


그림 8. 각 방법에 대한 Doppler의 SNR_G
Fig. 8. SNR_G of Doppler for each methods.

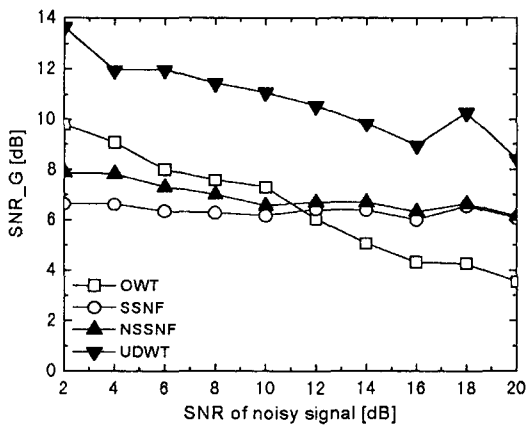


그림 7. 각 방법에 대한 Bumps의 SNR_G
Fig. 7. SNR_G of Bumps for each methods.

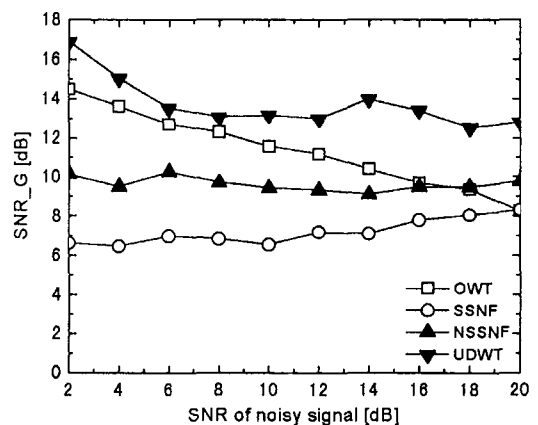


그림 9. 각 방법에 대한 HeaviSine의 SNR_G
Fig. 9. SNR_G of HeaviSine for each methods.

법을 제시하여, 기존의 방법들과 비교하고, 판단 기준으로 SNR을 사용하였다.

공간적 상관도를 이용한 NSSNF 방법은 reference 잡음의 파워와 original 잡음의 표준편차를 추정하고, 새로운 파라메타 $\lambda(m)$ 를 도입하여 기존의 SSNF 방법에 비해 우수한 SNR 이득 특성을 얻었으며, edge 검출과 이미지 향상에 효과적이지만, 여전히 많은 잡음이 edge로서 검출되고 있고, 알고리즘이 복잡하다는 단점을 지니고 있다. 이에 비해, threshold에 기초한 UDWT에서는 hard-threshold를 적용하여, 기존의 OWT에 비해 항상 우수한 SNR 이득 특성을 얻었

며, 알고리즘이 간단하고, 잡음 제거에 효과적이다. 이러한 잡음 제거 방법들은 각기 장점을 지니고 있으므로, 여러 응용 분야에 적용되리라 생각된다.

참고문헌

- [1] S. Mallat, "Characterization of signals from multiscale edges", IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol. 14, July 1992.
- [2] Y. Xu et al., "Wavelet transform domain filters: A spatially selective noise filtration technique",

- IEEE Trans. Image Processing, vol. 3, Nov. 1994.
- [3] D. Donoho, "Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage", J. Amer. Statist. Assoc., vol. 90, no. 432, 1995.
- [4] D. Donoho, "Denoising by softthresholding", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 41, 1995.
- [5] D. Donoho, "Wavelet shrinkage: Asymptopia?", J. R. Stat. Soc., Series B, vol. 57, pp. 301-369, 1995.
- [6] M. Vetterli and C. Herly, "Wavelet and filter banks: Theory and design", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 40, Sept. 1992
- [7] I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelet. Philadelphia, PA: SIAM, 1992.
- [8] I. Daubechies, "Orthogonal bases of compactly supported wavelets", Commun. Pure Appl. Math., vol. 41, 1988.



배상범(Sang-Bum Bae)

1999년 6월 부경대학교 공과대학
제어계측공학과 졸업(공학사)
2000년 2월~현재 부경대학교 대학
원 제어계측공학과 석사과정
관심분야 : 통신 및 신호처리



김남호(Nam-Ho Kim)

1984년 2월 영남대학교 전자공학과
졸업(공학사)
1986년 2월 영남대학교 대학원 전
자공학과 졸업(공학석사)
1991년 8월 영남대학교 대학원 전
자공학과 졸업(공학박사)
1992년 3월~현재 부경대학교 공과대학 전기제어계
측공학부 부교수
1999년 6월~현재 한국통신학회 부산·경남지부 총
무이사
1999년 3월~현재 한국해양정보통신학회 편집위원
관심분야 : 회로 및 시스템, 신호처리