베이즈 정리를 이용한 부품 또는 서브시스템의 고장 확률 계산

- Probability Calculation of Component or Subsystem Failure used by Bayes Formula -

* 이 성 철

Abstract

Reliability calculation of a system is frequently required in industrial, military, and everyday life situations. For such a calculation, it is necessary to specify the configuration of components and subsystems, the failure mode of each component, and the states in which the system is classified as failed. In this paper, we are primary interested in the time to the first failure of a system. And we discuss failure probability of coherent system under various condition, especially focus on probability calculation of subsystem failure before system failure used by Bayes formula. Problem statement and general applications illustrated by several examples.

1. 서론

현대산업사회에 있어서 특정 욕구를 충족시키기 위한 시스템은 초기의 설계과정에서부터 그 고유의 기능적 요구에 맞도록 설계되어야 하며, 원활한 기능을 위해서는 여러 가지 척도 중 신뢰성 문제를 고려하여야만 한다. 따라서 시스템이나 부품의 신뢰성계산의 필요성은 생산제품의 신뢰성에 큰 영향을 미치므로 신뢰성을 정확하고 빠르게 계산할 수 있는 알고리즘 개발의 필요성은 매우 절실하다 할 것이다

* 남서울대학교 교양학부 교수

시스템 신뢰성에 관한 연구는 Von Neuman(1956)의 'Sheffer stroke' 기관의 신뢰성 연구에 의하여 처음 시작된 이래, Moore와 Shannon(1956)의 릴레이 회로의 신뢰성 연구, Birbaum, Esary, Saunders(1961) 등에 의한 잉여부품(redundancy component)을 이용한 응집시스템(coherent system)설계, Barlow 와 Proschan (1975)의 부품 수명신장이 시스템 신뢰성에 미치는 영향 연구 등으로 이어져 내려왔다. 1980년이후 컴퓨터의 발전에 따른 계산력 향상에 힘입어 Cardarola(1980), Kenyon, Neell(1983), Heidtmann (1984) 등이 시스템 신뢰성 향상을 위한 계산 알고리즘 개발에 박차를 가 하였으며. 그후 Ball(1986)은 복합 시스템의 신뢰성 계산을 OR에 적용하였다. 필자는 1991년 사건나무를 이용한 응집구조의 신뢰성 알고리즘 개발 연구를 서두로 시스템 신뢰성 알고리즘 개발에 관심을 가지고 연구하여 왔으며, 본 연구는 참고문헌 [6]~[10]의 연장선상에 있다.

대부분의 시스템 신뢰성 계산은 부품 또는 서브시스템의 작동 또는 고장 여부의 가정에 의하여 계산된다. 시스템 신뢰성은 확률이론에 의하여 계산되어지므로 시스템에 확률이론을 적용하여 신뢰성을 예측하기 위해서는 시스템의 고장원인이 되는 부품의 신뢰성을 알아야한다. 특히 시스템의 효율적인 관리를 위하여 시스템을 구성하고 있는 부품 또는 서브시스템의 고장여부를 수시로 점검하여야 하는데, 이를 효과적으로 수행하기 위해서는 시스템이 고장나기 전 부품 또는 서브시스템들의 고장 확률 계산이 필수적이라 할 수 있다.

본 연구에서 필자는 조건부확률과 사후확률 계산으로 유명한 베이즈 정리를 이용하여 시스템이 고장나기 전에 부품 또는 서브시스템이 고장날 확률을 효율적으로 계산하는 방법을 연구하였다. 기존의 신뢰성 연구는 [3]-[5]에 기술된 바와 같이 시스템의 신뢰성 계산 시 단순히 부품 또는 시스템의 작동확률 또는 고장확률 계산에 중점을 두었으나 본 연구에서는 부품 또는 서브시스템의 상태를 분류하여 범주를 정한 다음 범주에 따른 신뢰도 계산 방법을 베이즈 정리를 사용하여 연구하였다.

2. 기호

T : 시스템 고장시간을 나타내는 확률변수

T_i : i 번째 부품의 고장시간을 나타내는 확률변수

$e_i(t)$: 시각 t 에서 i 번째 부품이 정상 작동할 확률사건

$e_i(t)$: 시각 t 에서 i 번째 부품이 고장일 확률사건

$f_i(t)$: T_i 의 고장 밀도함수

$F_i(t)$: T_i 의 누적 고장 분포함수

$R_i(t)$: T_i 의 t 시각에서의 신뢰성

$g(t)$: 시각 t 에서 시스템이 작동할 확률사건

3. 시스템 고장 전 부품 또는 서브시스템 고장확률 계산

시스템을 효율적으로 운행하기 위해서는 시스템이 고장 없이 장기간동안 운용되어야 한다. 따라서 시스템의 고장을 줄이기 위해서는 시스템이 고장나기 전에 고장 가능한 서브 시스템을 교체하여야 한다. 이 경우 시스템이 고장나기 전 서브시스템이 고장날 확률을 알 수 있다면 효율적으로 대체할 수 있다. $\{T_i < T\}$를 시스템이 고장나기 전 i 번째 부품이 고장날 확률사건이라고 하면

$$\begin{aligned} P\{T_i < T\} &= \int_0^\infty P\{T_i < T \mid T_i = t\} f_i(t)dt \\ &= \int_0^\infty P\{g(t) \mid \bar{e}_i(t)\} f_i(t)dt \qquad (1) \end{aligned}$$

이다.

i 번째 부품이 고장나는 순간 시스템 전체가 고장날 확률은

$$P\{T_i = T\} = \int_0^\infty f_i(t)[P\{g(t) \mid e_i(t)\} - P\{g(t) \mid \bar{e}_i(t)\}]dt \qquad (2)$$

이다. 따라서 (1), (2)로부터

$$\begin{aligned} P\{T_i \le T\} &= P\{T_i < T\} + P\{T_i = T\} \\ &= \int_0^\infty P\{g(t) \mid e_i(t)\} f_i(t)dt \qquad (3) \end{aligned}$$

을 얻는다.

예1. n개의 부품이 직렬로 연결된 1-out-of-n : F 시스템에서

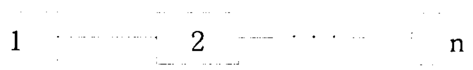

그림 1. n 부품 직렬구조

$$P\{g(t) \mid e_i(t)\} = \prod_{j=1, j \neq i}^{n} R_j(t)$$

이므로

$$P\{T_i \leq T\} = \int_0^{\infty} f_i(t) \prod_{j=i, j \neq i}^{n} R_j(t) dt$$

이다.

예2. n개의 부품이 병렬로 연결된 1-out-of-n : G 시스템의 경우

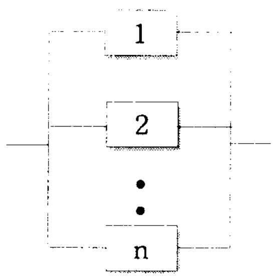

그림2. n 부품 병렬구조

모든 i 번째 부품에 대하여

$$P\{g(t) \mid e_i(t)\} = 1$$

이므로

$$P\{T_i \leq T\} = \int_0^{\infty} f_i(t) dt = 1$$

이다.

예3. 그림3과 같이 잉여 부품(redundancy component)이 있는 릴레이 회로의 경우

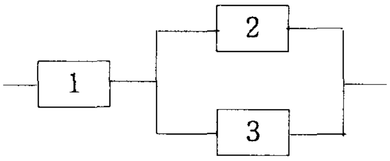

그림3. 릴레이 회로

$$P\{g(t) \mid e_1(t)\} = \prod_{j=2}^{3} R_j(t)$$

$$P\{g(t) \mid e_2(t)\} = P\{g(t) \mid e_3(t)\}$$
$$= R_1(t)$$

이다.
따라서

$$P\{T_1 \le T\} = \int_0^\infty P\{g(t) \mid e_1(t)\} f_1(t)dt$$
$$= \int_0^\infty \prod_{j=2}^{3} R_j(t) f_1(t)dt$$
$$P\{T_2 \le T\} = \int_0^\infty P\{g(t) \mid e_2(t)\} f_2(t)dt$$
$$= \int_0^\infty R_1(t) f_2(t)dt$$
$$P\{T_3 \le T\} = \int_0^\infty P\{g(t) \mid e_3(t)\} f_3(t)dt$$
$$= \int_0^\infty R_1(t) f_3(t)dt$$

이다.

이제 본 논문의 핵심 부문인 시스템이 고장났을 경우 여러 서브시스템 가운데 다른 서브시스템들은 고장나지 않은 반면, 어느 한 서브시스템이 고장났을 확률을 계산하는 방법을 베이즈 정리를 이용하여 연구하기로 한다.

확률사건 E 를

$$E=\{\bigcap_{e_i\subset A} T_i<T,\ \bigcap_{e_j\in B} T_j>T,\ \bigcap_{e_k\in C} T_k<\infty\}$$

라 하자. (여기서 A,B,C 는 서브시스템들로서 A는 시스템이 멈추기 전에 고장난 부품들의 집합이고, B는 시스템이 멈추었을 때에도 작동중인 부품들의 집합이고, C는 그 부품이 고장나므로 인하여 시스템 전체가 멈추는 부품들의 집합을 나타냄)

이제 A_m을 m번째 부품이 제외된 집합 A라하고, 확률사건 E_m, E', E'' 을 각각

$$E_m=\{T_m=T,\ \bigcap_{e_i\subset A_m} T_i<T,\ \bigcap_{e_j\in B} T_j>T,\ \bigcap_{e_k\subset C} T_k<\infty\}$$

$$E'=\{\bigcap_{e_i\in A_m} T_i<T,\ \bigcap_{e_j\in B} T_j>T,\ \bigcap_{e_k\in C} T_k<\infty\},$$

E'' : E_m, E'에 속하지 않은 E의 나머지 부분집합

이라고 하면, E는 서로 배반사건인 3개의 사건들로 나타낼 수 있다.

$$E=E'\cup(\bigcup_{e_m\subset A} E)\cup E'' \tag{4}$$

한편, E''는 시각 T 에서 동시에 2개 이상의 부품이 고장날 사건이므로

$$P\{E''\}=0 \tag{5}$$

이다.

따라서 (4), (5)로부터

$$P\{E\}=\sum_{e_m\in A} P\{E_m\}+P\{E'\} \tag{6}$$

를 얻는다.

만일 m이 주어지면, $P\{E_m\}$은 집합 A_m에 속한 부품들이 시스템 고장 이전에 이미 고장이 났고 집합 B에 속한 부품들은 시스템 고장 당시 작동하고 있는 상황에서 m번째 부품이 고장남과 동시에 시스템이 고장날 조건부 확률이므로

$$P\{E_m\}=\int_0^\infty f_m(t)\prod_{e_i\in A_m} F_i(t)\prod_{e_j\in B} R_j(t)P\{B_m \mid G(t)\}dt \tag{7}$$

이다.

여기서

$$G=A_m\cup B$$

이고, 조건부 확률 $P\{B_m \mid G(t)\}$는

$$P\{B_m \mid G(t)\} = P\{g(t) \mid e_m(t), \bigcap_{e_i \in A_m} e_i(t), \bigcap_{e_j \in B} e_j(t),\}$$
$$-P\{g(t) \mid \bigcap_{e_i \in A} e_i(t), \bigcap_{e_j \in B} e_j(t)\} \qquad (8)$$

이다.

한편

$$P\{E'\} = \int_0^\infty \sum_{e_k \in C} f_k(t) \prod_{e_i \in A} F_i(t) \prod_{e_j \in B} R_j(t) P\{B_k \mid G'(t)\} dt \qquad (9)$$

이다.

여기서

$$G' = A \cup B$$

이다.

$P\{B_k \mid G'(t)\}$도 (8)과 같은 방법으로 계산되며 (7)과 (9)를 (6)에 대입하여 $P\{E\}$를 얻을 수 있다.

예4. 5-부품 브릿지 시스템에서

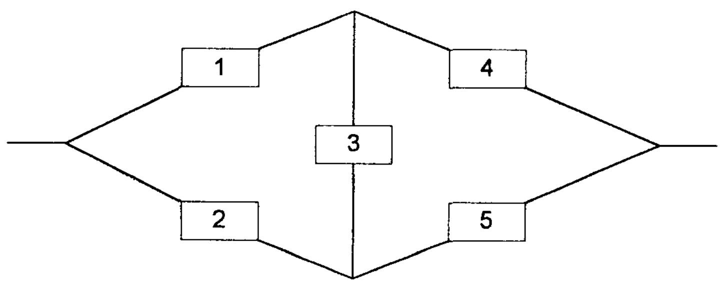

그림4. 5-부품 브릿지 시스템

1번 부품의 경우

$$P\{g(t) \mid e_1(t)\} = 1 - \{F_2(t)F_3(t)F_5(t) + F_2(t)R_3(t)F_4(t)F_5(t) + R_2(t)F_4(t)F_5(t)\}$$

$$P\{T_1 \le T\} = \int_0^\infty f_1(t)\{1 - [F_5(t)F_2(t)F_3(t)R_4(t) + F_4(t)]\} dt$$

이다.

이제

$A = \{1,3\}$, $B = \{4\}$, $C = \{2,5\}$ 라 하면

$$
\begin{aligned}
P\{B_1 \mid G(t)\} &= P\{g(t) \mid e_1(t), e_3(t), e_4(t)\} \\
&\quad - P\{g(t) \mid e_1(t), \overline{e_3}(t), e_4(t)\} \\
&= [1 - F_2(t)F_5(t)] - R(t) \\
&= F_2(t)F_5(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\{B_3 \mid G(t)\} &= P\{g(t) \mid e_3(t), \overline{e_1}(t), e_4(t)\} \\
&\quad - P\{g(t) \mid \overline{e_3}(t), e_1(t), e_4(t)\} \\
&= R_2(t) - R_2(t) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\{B_2 \mid G'(t)\} &= P\{g(t) \mid e_2(t), \overline{e_1}(t), \overline{e_3}(t), e_4(t)\} \\
&\quad - P\{g(t) \mid \overline{e_2}(t), \overline{e_1}(t), e_3(t), e_4(t)\} \\
&= 1 - 0 = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\{B_5 \mid G'(t)\} &= P\{g(t) \mid e_5(t), \overline{e_1}(t), \overline{e_3}(t), e_4(t)\} \\
&\quad - P\{g(t) \mid \overline{e_5}(t), \overline{e_1}(t), \overline{e_3}(t), e_4(t)\} \\
&= R_2(t) - R_2(t) = 0
\end{aligned}
$$

이다. 따라서

$$P\{E\} = \int_0^{\infty} [f_1(t)F_2(t)R_5(t) + f_2(t)F_1(t)]F_3(t)R_4(t)dt$$ 를 얻는다.

4. 결론

본 논문에서 우리는 시스템이 고장나기 전에 부품 또는 서브시스템이 고장날 확률의 계산방법을 사후확률 계산의 대표적인 정리인 베이즈 정리를 이용하여 연구하였다. 이 계산 기법을 현장에 적용하여 시스템이 고장나기 전에 고장날 확률이 높은 순서대로 부품 또는 서브시스템을 점검한다면 시스템의 가동률을 극대화할 수 있고 사전점검으로 인한 유지보수 비용의 절감효과도 얻을 수 있을 것이다. 대부분의 연구가 부품 또는 서브시스템의 상태가 이 변량인 경우에 한 하여 이루어지고 있는데, 앞으로 다 변량 상태인 경우로 연구의 범위를 확장할 예정이며 나아가 부품 또는 서브시스템의 수명이 서로 종속관계인 경우까지 연구범위를 확장할 것이다.

5. 참 고 문 헌

[1] R. E. Barlow, F. Proschan, *Statistical Theory of Reliability and Life testing*, Holt, Reinhardt & Winston Inc., 1975.

[2] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* I. II. John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.

[3] H. F. Martz, R. A. Waller, *Bayesian Reliability Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1982

[4] K. D. Heidtmann, "Inverting Paths and Cuts of 2-State Systems", *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-32 No. 5, pp.469-471, 1983.

[5] R. L. Kenyon, R. J. Newell, "Steady-State Availability of k-out of-n: G system with single Repair", *IEEE Transactions on Reliability*, Vol. R-32 No. 2, 1983.

[6] 이성철, "부품 또는 하부구조의 고장확률 결정", *품질관리학회지*, 제21권 제2호, pp.121-130, 1993.

[7] 이성철 "복합구조의 신뢰성 알고리즘", *한국통계학회논문집*, 제3권 제3호, pp.125-133, 1996.

[8] 이성철, "응집구조의 신뢰성 계산 알고리즘 분석", *한국공업경영학회지*, 제21권, pp.153-164, 1998.

[9] 이성철, "복합구조의 개량된 신뢰성 알고리즘, *한국산업정보응용수학회지*, 제3권 제2호, pp.121-135. 1999.

[10] 이성철 · 고용해, "응집구조의 고장확률", *안전경영과학회지*, 제1권 제1호, pp.79-90, 1999.

[11] 三根久, 河合一, *信頼性 保全性の基礎數理*, 日科技連, 1984.

저 자 소 개

이 성 철 : 인하대학교 수학과 졸업하고, 인하대학교 대학원 통계학 석사 및 박사학위를 취득하였다.
현재 남서울대학교 교양학부 교수로 재직중.
주요관심 분야는 통계학, 신뢰성공학 등이다.