

H₂/H_∞ 와 μ -이론을 이용한 유연 빔의 위치제어

Robust Positioning Control of a Flexible beam using H₂/H_∞ and μ -theory

최 연욱

Yeon-Wook CHOE

요 약

본 연구는 유연한 빔의 위치를 제어하기 위한 강인한 제어기 설계를 위한 하나의 방법으로서 혼합 H₂/H_∞과 μ -이론을 이용한 하나의 방법을 제시하고 있다. 먼저 제어기의 설계를 위한 유연한 빔의 수식모델을 얻기 위해 해석적인 방법과 실험을 통한 방법을 적용하였다. 이 결과로서 강인한 제어기의 설계를 위해 필요한 불확실성의 영역에 대한 정확한 정보를 얻을 수 있다. 다음, 혼합 H₂/H_∞-이론을 상기모델에 적용하여 강인한 제어기를 설계하고, 여기에 μ -이론을 적용하여 일반적으로 혼합 H_∞-제어기가 가질 수 있는 보수성을 완화시킨다. 마지막으로 Simulation과 실험을 통하여 설계된 제어기의 유효성을 보인다.

Abstracts

The objective of this paper is to present a method for designing robust positioning control systems of a flexible arm using mixed H₂/H_∞ and μ theory. We begin with a description of the flexible arm based on the model identification method and discuss the derivation of the model uncertainty. The validity of the obtained model is confirmed experimentally. Next, a robust controller is designed based on the mixed H₂/H_∞ and μ theory by which we can improve robustness of the entire system. On this occasion, we also propose a general plant formation suitable to mixed H₂/H_∞ control and μ -theory. Finally, the effectiveness of the proposed design method is verified through experimentation.

Key Words : Mixed H₂/H_∞ control and μ -theory

I. 서론

유연성을 가지는 시스템에서 진동을 제어한다는 것은 제어기 설계에 있어 중요한 요소 중의 하나다. 유연 빔(beam)의 제어에 있어서 특히 문제로 되는 것은 빔 자체가 자지는 고차모드의 동적 특성이 플랜트의 모델링 과정에서 일반적으로 무시 된다는 점이다. 따라서 강인한 제어기의 설계를

위해서는 제어기의 설계과정에서 이와 같은 플랜트가 가지는 불확실성을 반영해야 할 필요가 있다. 많은 연구자들이 수식모델(nominal model)과 그의 불확실영역에 대한 정보를 주어진 플랜트의 모델링 과정에서 얻을 수 있는 방법을 제시하고 있다^{[1]~[3]}. 그러나 유연한 플랜트에 대하여 상기의 방법만으로 제어기 설계를 위한 모델을 얻기 위해서는 상당한 어려움이 따른다. 본 연구에서는

문현[3]의 방법과 실험을 통하여 이러한 어려움을 극복하고 있다. 즉 플랜트의 모델링과정에서 수식 모델이 가지는 불확실성을 적극적으로 반영함으로서 가능한 정확한 불확실성의 영역을 확보함으로서 제어기 설계에 있어서 정확도를 기하고자 한다.

한편, 이러한 플랜트의 불확실성을 이용한 강인한 제어기의 설계이론으로서 H_∞ 제어이론이 상당한 성과를 올리고 있다. 그러나 H_∞ 이론은, 외란에서 평가신호까지의 전달함수행렬의 최대특이값(maximum singular value)을 기초로 하는 이론이므로 설계된 제어기가 보수적¹⁾으로 될 가능성이 높다. 최근 H_∞ 설계법에 H_2 특성을 도입함으로서 위에서 언급한 보수성의 감소를 어느 정도 해결할 수 있게 되었다. 그렇지만 이 방법 역시 최대특이값을 중심으로 전개되고 있으므로 제어기의 보수성을 피할 수는 없다. 그러나 본 연구에서 제어대상으로 하고 있는 유연 빔은, 그의 모델링 과정에서 플랜트가 가지는 불확실성의 구조를 미리 알 수 있으므로 이것을 적극적으로 활용함으로서 제어기의 보수성을 상당히 감소시킬 수 있다. 다시 말하면, 혼합 H_2/H_∞ 이론에 의하여 얻어진 제어시스템에 다시 μ 설계이론을 적용함으로서 상기의 보수성을 상당부분 제거하여 있게 된다. 본 연구의 목적은 두 가지로 요약할 수 있다. 첫째, 유연성을 가지는 플랜트에 대한 모델링과정에서, 문현[3]의 방법과 실험을 동시에 병행함으로서 설계를 위한 기준모델과 강인한 제어기 설계를 위하여 필요한 불확실성의 영역을 구하는 간단한 방법을 제안한다. 둘째, 혼합 H_2/H_∞ 와 μ 이론의 적용을 위한 일반화플랜트를 제시하고, 이 결과로서 얻어진 제어기의 유효성을 시뮬레이션과 실험을 통하여 확인한다.

II. 유연 빔의 모델링

본 연구에서는 제어기의 설계를 위한 모델링을 다음과 같이 두 단계, 즉 수학적 및 실험적 단계로 나누어서 실행한다.

(a) 수학적 모델

1) 보수적이란 영어의 conservativeness를 번역한 것으로서 현재의 제어기보다 더 성능이 좋은 제어기가 존재할 수도 있는 가능성의 있음을 의미하는 것으로 해석된다.

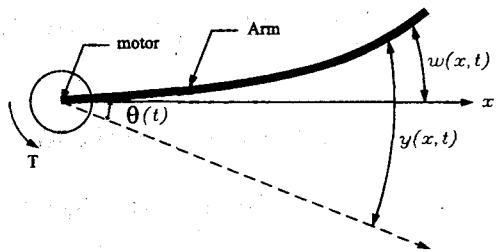


그림 1 유연 빔의 모델

Fig.1 The Model of Flexible beam

먼저 유연 빔은 균일한 밀도를 가지고 있으며 비틀림 현상에 의한 빔의 움직임은 없는 것으로 가정한다. 또한 빔의 길이는 그것의 폭보다 훨씬 크기 때문에 빔은 항상 수평적으로만 진동하는 것으로 본다. 그림1에서 T 는 입력 토크, $\theta(t)$ 는 모터의 회전각, $w(t, x)$ 는 거리 x 지점에 대한 탄성 변형, $y(x, t)$ 는 제어시스템의 출력으로서 빔의 끝단의 위치이다.

다음에 빔의 동적인 움직임을 나타내기 위하여 분산파라메터법을 적용하면 다음의 방정식을 얻을 수 있다^{[4],[5]}.

$$I_a \ddot{q}_o + D_m \dot{q}_o = K_a T \quad (1)$$

$$\ddot{q}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = (1/I_a) a_i T \quad (2)$$

이때 $q_i(t)$ 는 빔의 진동성분 중, 시간에 대한 변화율로서 $q_o(t)$ 는 $\theta(t)$ 이다. 또 D_m 은 모터축의 감쇄, K_a 는 모터정수, ζ_i , ω_i 는 i 번째 모드의 감쇄율 및 고유진동수를 각각 나타내고 있으며, a_i 는 적절한 수식계산을 이용하여 얻어지는 정수이다. 위 관계식을 이용하여 유연 빔을 가정된 모드법(assumed-mode-method)^[6]을 이용하면 빔 끝단의 탄성변형은

$$w(x, t) = \sum_{i=0}^n q_i(t) \phi_i(x) \quad (3)$$

으로 표시된다. 여기서 $\phi_i(x)$ 는 빔의 i 번째 모드의 흐의 정도를 나타내는 고유함수로서 다음 식으로 정의된다.

$$\begin{aligned} \phi_i(x) = & c_i \left\{ \frac{(\sin k_i x - \sinh k_i x)}{(\sinh k_i L + \sinh k_i L)} \right. \\ & - \frac{(\cosh k_i L + \cosh k_i L)}{(\cosh k_i x - \cosh k_i x)} \left. \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 L 은 빔 전체의 길이, c_i 는 일정한 값을

갖는 임의의 정수이며 k_i 는 다음 식에 대한 해로 나누어진다.
서 주어진다.

$$\cos(k_i L) \cdot \cosh(k_i L) = -1 \quad (5)$$

이 결과로서 뼈의 정확한 위치는, 뼈의 끝에서 발생하는 탄성변형 $w(x, t)$ 과 강체변형 $\theta(t) \cdot x$ 의 합으로서 다음 식과 같이 표현 가능하다.

$$y(x, t) = w(x, t) + \theta(t) \cdot x \quad (6)$$

상기 관계식(1),(2)에서 고정모드(즉 $i=0$)와 n 번째까지의 모드만을 취하여 이것을 상태방정식으로 표현하면 아래 식이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_o \\ \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_o & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_o \\ \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_o \\ \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$
(7)

여기서

$$\mathbf{x}_o = \begin{bmatrix} q_o \\ \dot{q}_o \end{bmatrix}, \mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{D_m}{I_a} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_o = \frac{K_a}{I_a} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
(8a)

이다. $i=1, 2, \dots, n$ 의 각 모드에 대해서는

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} q_i \\ \dot{q}_i \end{bmatrix}, \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\zeta_i \omega_i \end{bmatrix}, \mathbf{B}_i = \frac{1}{I_a} \begin{bmatrix} 0 \\ a_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [L \ 0 \ \phi_1(L) \ 0 \ \cdots \ \phi_n(L) \ 0]$$
(8b)

으로 주어진다. 위의 관계식의 타당성 검토를 위하여 식(7)에 적절한 실제 파라메터값을 대입한 뒤 스텝함수를 인가하였을 경우 뼈의 진동응답을 그림2에 표시하였다. 이 그림으로부터 뼈의 고유 진동수는 대략 $\omega_o = 8.7$ [rad/sec](고정모드)임을 확인할 수 있다.

(b) 실험을 통한 모델링

수학적인 해석과정을 통하여 얻은 모델에는 상당한 오차가 포함되어 있을 것이다. 왜냐하면 $n+1$ 차이상의 모드를 무시하였으며, 또한 물리파라메터(예를 들어 관성모멘트 등)도 그의 정확한 값을 알기가 어려운 것이 많다. 이런 관점에서 좀 더 실제에 가까운 모델을 구하고 또 장인한 제어기의 설계 시에 중요한 역할을 하는 불확실성의 영역에 대한 정보를 얻기 위하여 본 연구에서는 문현[3]의 결과를 이용하였다. 이 방법은 비교적 간단한 작업으로 제어기의 정도를 향상시킬 수 있다는 점이다. 모델링과정은 다음의 세 단계로

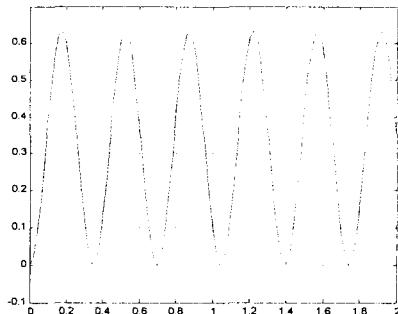


그림 2 뼈의 진동특성(스텝응답)

Step1: 플랜트의 주파수영역을 몇 개로 분리하여 실험을 통하여 입출력 데이터를 얻는다.

Step2: 얻은 데이터로부터 기준모델을 계산한다.

Step3: 불확실성영역을 계산한다.

아래 그림3은 상기의 과정을 세 차례 반복하여 얻은 결과이다. 이때 불확실성을 나타내는 가중함수는 다음과 같이 계산된다.

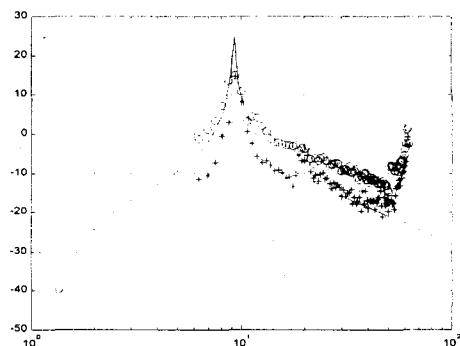


그림 3 뼈의 주파수 특성

Fig.3 Frequency Response of Flexible beam

$$\left| \frac{\tilde{G}(j\omega)}{G_{nom}(j\omega)} - 1 \right| \leq |W_m(j\omega)| \quad (9)$$

여기서 $G_{nom}(j\omega)$ 는 기준모델의 주파수응답 특성이며, $\tilde{G}(j\omega)$ 는 상기의 과정을 통하여 실험적으로 얻어진 주파수특성 곡선이다. 식(7)을 이용하여 얻어진 가중함수 $W_m(s)$ 는

$$W_m(s) = \frac{72.3s^3 + 239.1s^2 + 196.8s + 0.196}{s^3 + 94.1s^2 + 280.47s + 220.72}$$

으로 주어지며 이 관계를 그림4에 도시하였다.

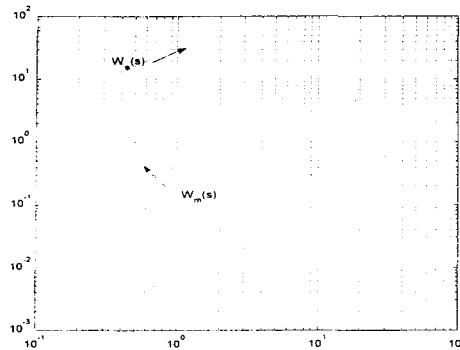


그림 4 불확실성의 영역 표현
Fig.4 Uncertainty Weight Am(s)

III. 제어기 설계

제어의 목적은 플랜트가 가지는 불확실성에도 불구하고 범의 선단을 오차 없이(즉 추종특성) 신속하게 원하는 위치에 가져가는 것이다. 이를 위해 먼저 H_2/H_∞ 이론을 적용하기 위한 일반화플랜트를 제안하고 여기에 불확실성의 구조를 이용한 μ 이론을 적용함으로서 제어기가 가지는 보수성을 감소시킨다.

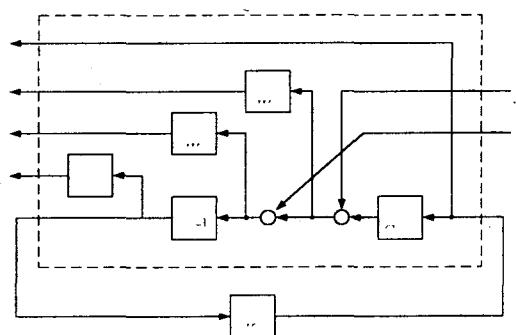


그림5 제안한 H_2/H_∞ 제어와 μ 이론의 적용을 위한 일반화플랜트

Fig.5 The proposed generalized plant for H_2/H_∞ and μ -theory

두 가지의 제어목적은, H_∞ 이론(피드백 특성)과 H_2 이론(과도특성)을 동시에 적용함으로서 달성을 할 수 있으며, 이는 혼합 H_2/H_∞ 이론으로 불려지고 있다^[7]. 그림5는 혼합 H_2/H_∞ 이론의 적용을 위하여 본 연구에서 제안하는 일반화플랜트이다. 이 그림

에서 α_R^{-1} 은 내부모델의 원리에 의해 추가된 일종의 적분기로서 전체 시스템의 강인한 성능향상을 추구하며, $W_m(s)$ 는 2장에서 구한 기준모델이 가지는 불확실성의 영역에 관련된 가중함수, $W_s(s)$ 는 폐루프시스템의 감도와 관련된 함수이다. 그림 5의 각 신호들이 가지는 의미는 다음과 같다.

z_μ, w_μ : μ 이론과 관련된 출력과 입력

$z_{\infty 1}$: 폐루프의 강인한 안정성(robust stability)과 관련한 가상적인 출력

$z_{\infty 2}$: 폐루프의 기준성능(nominal performance)과 관련된 가상적인 출력

z_2 : H_2 norm의 최소화와 관련된 가상적인 출력

그림5의 일반화플랜트에 의한 제어기설계는 다음 두 조건을 만족하는 제어기 $K_o(s)$ 를 계산하는 것이다. 즉

(S1) $K_o(s)$ 는 일반화플랜트 $\tilde{P}(s)$ 의 안정화

(S2) $\|T_\infty(s)\| = \| \frac{T_{z_{\infty 1} w}(s)}{T_{z_{\infty 2} w}(s)} \|_\infty < \gamma$ (10)

$T_{z_{\infty 1} w}$ 과 $T_{z_{\infty 2} w}$ 는 각각 w 에서 $z_{\infty 1}$ 과 $z_{\infty 2}$ 까지의 전달함수를 의미하며, 그림5에서 μ 이론과 관련된 입출력을 무시하면

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} 0 & W_m G \\ W_s & W_s G \\ \rho \alpha_R^{-1} & \rho \alpha_R^{-1} G \\ \alpha_R^{-1} & \alpha_R^{-1} G \end{bmatrix} \quad (11)$$

로 됨을 알 수 있다. 식(10)을 만족하는 제어기는 선형행렬부등식의 조건을 이용하면 비교적 쉽게 해를 구할 수 있다.

다음, 식(7),(8)로 주어진 수식모델에서 $n=2$ 이상인 고차모드를 기준모델 $G_{nom}(s)$ 에 대한 덧셈형 불확실성으로 간주하고(그림6 참조), 여기에 μ 이론을 적용하여 제어기설계에 반영함으로서 제어기가 가지는 보수성의 완화를 시도한다. 이를 위해 그림5의 일반화플랜트를

$$\begin{bmatrix} z_\mu \\ z_{mix} \\ \dots \\ y \end{bmatrix} = \bar{P}(s) \begin{bmatrix} w_\mu \\ w \\ \dots \\ u \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$z_{mix} := [z_{\infty 1}, z_{\infty 2}, z_2]^T$$

와 같이 분류하여 $M(s) = LFT\{\bar{P}(s), K_o(s)\}$ 로 두고

$\mu_{\Delta}\{M(j\omega)\} < 1 : \Delta = \text{diag}[\Delta_{\mu}, \Delta_S]$ (13)

를 만족하는 제어기를 계산하는 것이다. 여기서 Δ_S 는 μ 이론의 적용을 위한 1행 3열의 크기를 가지는 가공의 불록이다^[8]. 기존의 혼합 H_2/H_{∞} 이론에 의한 제어기 $K_o(s)$ 에 대하여 식(13)이 만족된다면 설계는 종료하지만, 만약 그렇지 못하다면 μ 이론에 사용되는 일반적인 반복계산법이 요구된다. 즉 식(13)을 만족시키기 위한 스케일링 행렬 $D_i(s), D_i^{-1}(s)$ 를 계산하여 이것을 식(12)의 일반화플랜트 $\bar{P}(s)$ 의 왼쪽과 오른쪽에 곱한 뒤, 여기에 다시 혼합 H_2/H_{∞} 이론을 적용하여 제어기 $K_i(s)$ 를 구하여 식(13)을 확인하는 과정의 반복이 필요하다^[8].

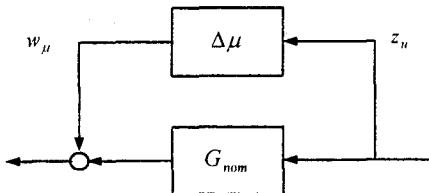


그림 6 덧셈형 불확실성의 정의
Fig.6 Additive Uncertainty

IV. 시뮬레이션 및 실험결과

본 연구에 사용된 뼈은 길이 1.2m, 폭 0.2cm의 알루미늄재질로 이루어져 있으며 수평으로 자유롭게 움직이며, 수직운동은 하지 않는 것으로 간주한다. 또한 수식모델의 전개과정에서 뼈의 비틀림에 의한 운동은 무시하며, 이것은 결과적으로 수식모델이 가지는 불확실성 영역으로 간주되어 제어기 설계 시에 이용된다. 유연한 뼈의 한쪽 끝은 DD(Direct Drive)모터와 함께 단단한 축 위에 고정되어 있으며, 다른 한쪽은 자유롭게 움직이며 끝 부분에 LED가 부착되어 있다. 축 위에 장착된 PSD(Position Sensor Detective)카메라가 LED의 움직임을 감지하여 현재의 축의 위치를 검출한다. 그림1에 개략적인 전체 시스템을 표시하였다. 설계된 제어기의 실장을 위해 IBM호환 PC와 12 채널의 AD/DA 보드를 이용하였으며, DD모터에 부착되어 있는 엔코드의 해상도는 0.0879도이다.

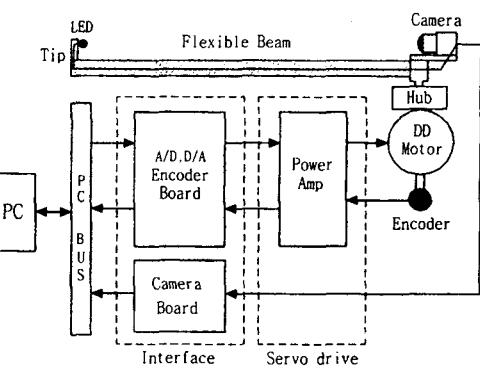


그림 7 실험을 위한 전체 시스템의 구성
Fig.7 The Sketch of experimental devices

Parameter	Value
Length	1.2m
Width	0.00195m
Height	0.0254m
Beam stiffness	7.3 Nm
Hub inertia	0.02923 Kg/m ²
Link inertia	0.0962 Kg/m ²

표 1 물리파라메터 값

(A) 시뮬레이션 결과

상기의 방법에 의한 시뮬레이션 결과를 그림8에 나타냈다. 그림에서 알 수 있는 바와 같이, H_{∞} 이나 μ 설계법을 단독으로 사용한 경우에 비하여 과도응답특성이 상당히 양호하며, 또한 그림에 표시하지는 않았지만, 플랜트의 변동에 대한 추종특성(즉 장인성)도 양호한 것을 볼 수 있다.

(B) 실험결과

실험에 사용된 각 파라메터를 표1에 표시하였다. 기준모델은 고정모드와 일차모드만을 가지는 것으로 하고 나머지 고차모드는 플랜트의 불확실성으로 간주하였다.

실험에 의한 뼈에 대한 입력, 탄성변형 및 뼈 선단의 위치를 그림9에 표시하였다. 동시에 비교를 위하여 μ 이론만을 이용한 설계결과를 그림10에 나타내었다. 기대했던 대로 본 연구에서 제안하는 방법에 의한 결과가 더 좋은 과도응답특성을 보여주고 있음을 확인할 수 있다. μ 이론에 의한 제

어기도 폐루프시스템의 강인성의 면에서는 좋은 결과를 보여주고 있으나, 과도특성, 예를 들면 정정시간 등의 면에서 주어진 설계사양을 만족시키지 못하고 있음을 알 수 있다.

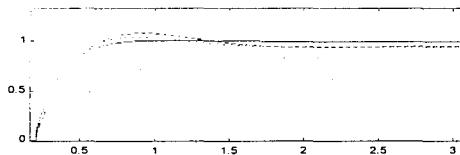
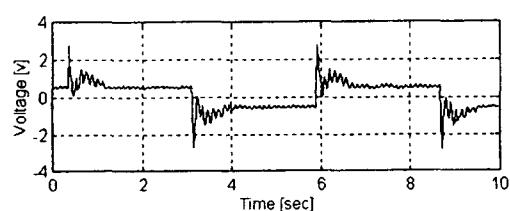
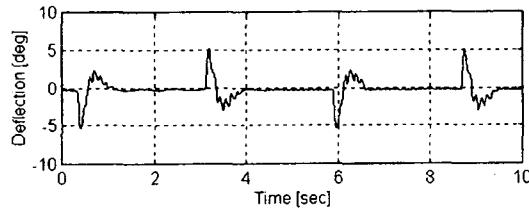


그림 8 시뮬레이션 결과

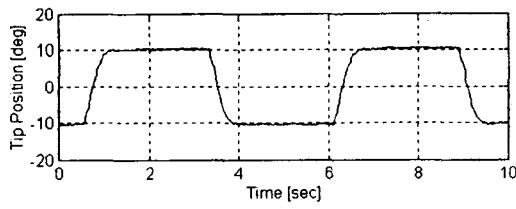
Fig.8 Simulation results of the closed loop



(a)



(b)

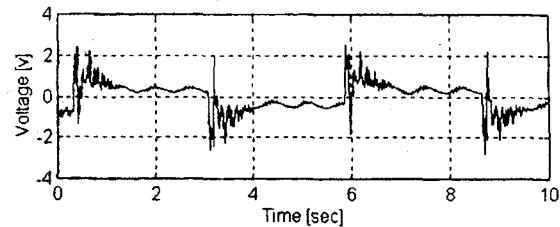


(c)

그림9. 실험결과(혼합 H_2/H_∞ 과 μ 이론에 의한 제어기)

(a)입력전압,(b)변형,(c)선단의 위치

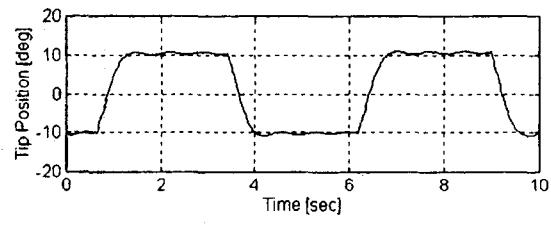
Fig.9 The Results of Experiments



(a)



(b)



(c)

그림10. μ 제어기에 의한 실험결과

(a)입력전압, (b)변형, (c) 선단의 위치

Fig.10 The results of Experiments

V. 결론

유연 뼈의 위치제어를 위한 강인한 제어기의 설계법을 제안하고, 이것을 실험을 통하여 확인하였다. 모델링 과정을 해석적인 방법과 이를 실험을 통하여 확인하는 과정을 취함으로서 강인한 제어기의 설계를 위한 불확실성의 영역에 대한 정확한 정보를 얻을 수 있었다. 한편 제어기의 설계이론으로서는 정상특성과 과도응답특성의 개선을 동시에 만족시키기 위하여 혼합 H_2/H_∞ 을 적용하였다. 여기에 기지인 플랜트의 불확실성을 적극적으로 활용할 수 있는 μ 이론에 의한 제어기법을 추가함으로서 혼합 H_2/H_∞ 가 가지는 보수성을 완화시켜 제어성능을 향상시킬 수 있음을 보였다.

접수일자 : 2000. 11. 15 수정완료 : 2001. 1. 8

VI. 참고문헌

- [1] R.I. Milford & S.F. Asokanathan, "Experimental On-Line Frequency Domain Identification and Adaptive Control of a Flexible Slewing Beam," Trans. of the ASME, Vol.118 pp. 58-65 (1996)
- [2] A. Tchernychev, A. Sideris & Jie Yu, "Constrained H_∞ Control of an Experimental Flexible Link," Trans. of the ASME, Vol.119, June, pp.206-211 (1997)
- [3] Y.W. Choe, "Frequency Domain Modeling for a Simple Plant," Journal of Electrical Eng. & Information Science, Vol.5, no.1, pp. 16-22 (2000)
- [4] H. Krishnan Vidyasagar, "Control of single-link flexible beam using Hankel norm-based reduced-order model," IEE Proc. Control Theory and Appl., vol.145, no.2 March , pp.151-158 (1998)
- [5] E. Rijanto, H. Tanaka, A. Moran & M. Hayase, "H ∞ Control of Flexible Arm Considering Motor Dynamics and Optimum Sensor Location," Proc. of Int. Power Electronic Conference, pp.1440-1445 (1995)
- [6] L. Meirovitch, Analytical Methods in Vibrations, MacMillan Series in Applied Mechanics, The MacMillan Company, 1967
- [7] C. Scherer & M. Chilali, "Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization," IEEE Trans. Auto. Contr., Vol. AC-42, no.2 pp. 896-911 (1997)
- [8] A. Packard and J.C. Doyle, "The Complex structured singular value," Automatica, Vol.29, pp. 71-109, (1993)
- [9] 최 연욱, "혼합 H_2/H_∞ 과 μ -설계이론을 이용한 3관성 벤치마크 문제의 해법," 대한전자공학회 투고 중.



최연욱(Yeon-Wook Choe)

正會員

1978년 한양대학교

전자공학과(공학사)

1980년 한양대학교 대학원

전자공학과(공학석사)

1990년 일본 京都大學校

전기공학과(공학박사)

1990년-현재 부경대학교 전기제어계측공학부
부교수1996년-1997년 Univ. of South Australia
방문교수관심분야 : 로버스터 제어, 디지털 제어,
시스템 동정관련, 제어응용 등