

SVD를 이용한 다중 채널상에서의 음재생을 위한 역변환 필터의 구현

An Implementation of Inverse Filter Using SVD for Multi-channel Sound Reproduction

이 상 권*, 노 경 래*
(Sang Kwon Lee*, Kyoung Rae Noh*)

*인하대학교 기계공학과

(접수일자: 2001년 2월 8일; 수정일자: 2001년 6월 16일; 채택일자: 2001년 9월 18일)

본 연구에서는 SVD (Singular Value Decomposition)를 이용하여 다중입력과 다중출력을 가지는 시스템에서의 입력을 알아내기 위해 역변환 필터를 구현하였다. SISO (Single-Input and Single-Output)시스템의 입력과 출력의 관계에 대한 행렬공식화 작업을 확장하여 MIMO (Multi-Input and Multi-Output)시스템에 적용하였다. 그리고 시간영역과 주파수영역에서 최소위상 (Minimum phase)시스템과 비최소위상 (Non-minimum phase)시스템에 대한 그 역변환에 대해 알아보았으며 비최소 위상요소에 대한 효과적인 역변환을 위해 SVD를 도입하였다. 먼저 전체시스템 행렬의 특이값 (singular value)을 계산하고 시스템의 위상에 대해 알아본다. 전체시스템이 비최소 위상인 경우 하나 이상의 매우 작은 특이값을 가지며 이는 시스템의 최소 위상/비최소 위상에 대한 정보를 가짐을 알 수 있다. 이를 이용하여 전체시스템에 대한 근사적인 역변환 필터를 구할 수 있으며 보다 근사적인 역변환 필터를 얻기 위하여 특이벡터를 이용하여 근사적인 역변환 필터를 얻었다. 수치적 예는 이러한 역변환 필터 행렬의 이용에 대한 잠재성을 보여준다.

핵심용어: 음성재생, 역변환 필터, SVD (Singular Value Decomposition), 특이값, 특이벡터

투고분야: 음향 신호처리 분야 (1.1)

This paper describes an implementation of inverse filter using SVD in order to recover the input in multi-channel system. The matrix formulation in SISO system is extended to MIMO system. In time and frequency domain we investigate the inversion of minimum phase system and non-minimum phase system. To execute an effective inversion of non-minimum phase system, SVD is introduced. First of all we compute singular values of system matrix and then investigate the phase property of system. In case of overall system is non-minimum phase, system matrix has one (or more) very small singular value (s). The very small singular value (s) carries information about phase properties of system. Using this property, approximate inverse filter of overall system is founded. The numerical simulation shows potentials in use of the inverse filter.

Keywords: Sound reproduction, Inverse filter, SVD (Singular Value Decomposition), Singular value, Singular vector

ASK subject classification: Acoustic signal processing (1.1)

I. 서론

수년간 음원과 그 위치 파악에 관해 괄목할만한 연구 결과들이 계속해서 나오고 있다. 음원 파악에 관한 문제는 매우 복잡한 과제이며 또한 음재생에 관한 문제라 말할 수 있다. 일반적으로 음원에 대한 파악은 음원의 특성과 음질, 예로 확성기 (loudspeaker)의 설계를 개선하는데 목적을 두고 있으며 역변환 기술은 가정된 음원 모델에 기초를 두고 발전되어 왔다. 즉, 음원의 분포는 단일음원 (monopoles), 이중음원 (dipoles) 그리고 4중음원 (quadrupoles)처럼 원 음원의 갯수로 이산화시킨 다음 방사장은 한정된 점에서 측정하고 음원과 연관이 있는 전달함수는 적절한 Green함수를 이용하여 정의된다. 모델화된 음원의 점과 음원을 측정하는 점 사이의 전달함수와 출력의 개수는 선형대수방정식으로 공식화할 수 있다. 그러므로 이러한 음원 파악은 시스템행렬의 역변환 문제가 된다. 따라서 시스템행렬이 특이행렬 (singular matrix) 이거나 또는 비최소 위상 시스템에 있어서는 매우 작은 특이값을 하나 이상 가진다. 이 특이값 (singular value)은 비최소위상시스템의 불량조건에 대한 정보를 갖고 있으며 이 특이값의 조정으로 역변환 문제를 해결할 수 있다. 본 연구에서는 특이값 외에 특이벡터를 이용함으로 비최소위상시스템에서 음원을 더욱 정확히 구할 수 있는 역변환 방법을 제시한다.

II. 이론

2.1. 다중 음원 음장에 대한 입·출력 관계

역변환 기술에 의한 음원의 재생은 광학과 전자기학으로 설명이 되는 역변환 문제에서 비롯된다. 음향에서 역변환문제는 비제차 (non-homogeneous) 파동방정식의 음원 부분에서 유추할 수 있다.

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) p(\mathbf{r}, t) = -q(\mathbf{r}', t) \quad (1)$$

여기서 $p(\mathbf{r}, t)$ 는 음원 부피밖의 \mathbf{r} 점에서 방사장의 측정으로 얻어지며 $p(\mathbf{r}', t)$ 는 원음의 체적속도이다. 조화 음원이라는 특별한 경우에는 비제차 Helmholtz 방정식 (2)을 만족시킨다[1].

$$(\nabla^2 + k^2)p(\mathbf{r}) = -q(\mathbf{r}') \quad (2)$$

여기서 $k = \omega/c$ 이며, 주파수 ω 에서 파동수 (wave number)이다. 비제차 Helmholtz 방정식의 해는 다음과 같이 표현된다[2].

$$p(\mathbf{r}) = \int_V q(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') dV + \int_S [G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} p(\mathbf{r}') - p(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')] \cdot \mathbf{n} dS \quad (3)$$

여기서 $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ 은 음장의 임의점 \mathbf{r} 에 \mathbf{r}' 의 음원에 대한 Green 함수이며, V 는 경계면 S 에 의해 둘러싸인 매체의 부피이다. 그리고 \mathbf{n} 은 부피 V 에 대해 바깥으로의 단위 수직벡터이다. 비경계 매체 즉, 자유장의 경우의 대해 생각해 보면, 만약 매체가 비경계가 된다면 방정식의 우측부분의 표면적분은 영이 된다. 즉, 이러한 경우의 해는 방사 조건이라 한다.

$$p(\mathbf{r}) = \int_V q(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') dV \quad (4)$$

자유장 (free-field)에서 단일 (monopole) 음원에 대한 음압은 (p) 다음과 같다.

$$p(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r}') j\omega p_0 G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') \quad (5)$$

이 방정식으로부터 음압 (p)와 음의 강도 (q)의 비는 주파수에 의존하는 것을 알 수 있다. 즉, 주파수가 증가함에 따라 방사효율 (radiation efficiency)이 증가한다. 여기서 음의 강도 (q)는 체적속도 (volume velocity)이므로 음의 강도에 대한 시간미분은 음의 체적가속도 (volume acceleration)이다. 즉, $j\omega q$ 와 동일하다. 그리고 비경계 매체에서는 Green함수, $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ 는 자유장 Green함수, $g(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ 가 되며 다음과 같다.

$$g(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{e^{jk|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (6)$$

복수개의 단일음 (monopole)과 복수개의 수신점 (receiver)에 대한 음장표현은 다음과 같다.

$$P = Z \cdot Q \quad (7)$$

여기서 P , Q 는 각각 수신점 및 음원강도의 열벡터이고 Z 는 임피던스 행렬 (impedance matrix)이며 즉, 전달함수 (transfer function)를 나타낸다. Green함수, $g(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ 는 \mathbf{r}' 에서 단일 (monopole) 음원에 의한 점 \mathbf{r} 에서 음압과 관련된다. 따라서 Z 의 요소는 다음과 같이 계산된다.

$$Z_{ij} = j\omega p_0 g(r_i r_j^*) \quad (8)$$

음의 체적 가속도 (a)를 변수로 사용함으로써 낮은 주파수에서 수치적 문제를 발생시키는 주파수 의존성이 제거되며 체적가속도와 수정된 임피던스는 다음과 같이 정리된다[8].

$$a = kwq, H = (1/j\omega) \cdot Z \quad (9)$$

여기서 a는 음의 체적가속도이며 H는 수정된 임피던스 행렬이다. 수정된 임피던스 행렬의 각각의 요소는 다음과 같다.

$$H_{ij}(\omega) = \rho_0 g(r_i r_j^*) = \frac{\rho_0}{4\pi r_{ij}} e^{-j\omega r_{ij}/c} = \frac{A}{r_{ij}} e^{-j\omega r_{ij}/c} \quad (10)$$

여기서 A는 일정한 상수이고 c는 음속, r_{ij} 는 음원 (r^*)과 수음점 (r)사이의 거리를 나타낸다. 그리고 $\exp(-j\omega r_{ij}/c)$ 항은 시간지연 r_{ij}/c 에 대응하는 유사전달함수이며 이것은 주파수에 대해 독립적이다. n개의 음원과 m개의 수음점을 가지는 다중 (MIMO)시스템상에서 전달함수는 각각의 필터의 전달함수로 이루어지는 행렬이 된다. 따라서 주파수 영역에서의 형태는 다음과 같다.

$$H(\omega) = A \begin{bmatrix} \frac{e^{-j\omega r_{11}/c}}{r_{11}} & \frac{e^{-j\omega r_{12}/c}}{r_{12}} & \dots & \frac{e^{-j\omega r_{1n}/c}}{r_{1n}} \\ \frac{e^{-j\omega r_{21}/c}}{r_{21}} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{e^{-j\omega r_{m1}/c}}{r_{m1}} & \dots & \dots & \frac{e^{-j\omega r_{mn}/c}}{r_{mn}} \end{bmatrix} \quad (11)$$

시간영역에서 이상적인 2-음원과 2-수음점에 대한 음향 전파에 대해 생각해보자. 그림 1에서 2개의 음원 (q_1, q_2), 2개의 수음점 (p_1, p_2)라 하면 각 수음점에 대해 음압은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \frac{A}{r_{11}} q_1(t - \Delta_{11}) + \frac{A}{r_{12}} q_2(t - \Delta_{12}) \\ p_2(t) &= \frac{A}{r_{21}} q_1(t - \Delta_{21}) + \frac{A}{r_{22}} q_2(t - \Delta_{22}) \end{aligned} \quad (12)$$

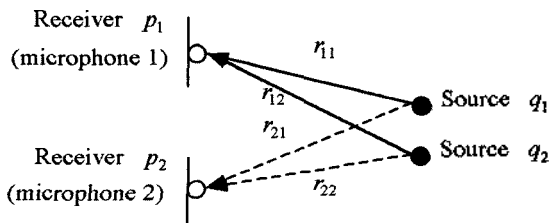


그림 1. 음원과 수음점의 기하학적 배열
Fig. 1. Geometrical arrangement of sources and receivers.

여기서 $\Delta_{ij} = r_{ij}/c$ 은 음향전파에 의한 시간지연이다. 그리고 적당한 샘플링 비율을 f_s , ($\Delta = 1/f_s$)라 정하고 이 산신호로 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} p_1(n) &= \frac{A}{r_{11}} q_1(n - n_{11}) + \frac{A}{r_{12}} q_2(n - n_{12}) \\ p_2(n) &= \frac{A}{r_{21}} q_1(n - n_{21}) + \frac{A}{r_{22}} q_2(n - n_{22}) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{여기서, } n_{ij} = \text{round}\left(\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}\right) = \text{round}\left(\frac{r_{ij}}{c\Delta}\right) = \text{round}\left(\frac{f_s}{c} \cdot r_{ij}\right)$$

각 음원과 수음점에 관계되는 임펄스 응답함수는 n_{ij} 에서 영이 아닌 수를 하나만 가지는 N개의 배열로 이루어진다. 예로 p_1 과 q_1 와 관계되는 임펄스 응답은 다음과 같다.

$$h_{11}(n) = \left[0, 0, \frac{A}{r_{11}}, \dots, 0\right], \quad (0 \leq n \leq N-1) \quad (14)$$

단일입출력 (SISO)시스템에 대해 시간영역에서 생각해 보면 $p_1(n)$ 과 $q_1(n)$ 에 대해 임펄스 배열을 행렬형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p_1(n) &= \sum_{i=0}^{N-1} h_{11}(i) q_1(n-i) \quad \text{또는} \quad p_1 = H_{11} q_1 \\ \begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_1(1) \\ p_1(2) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A/r_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A/r_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A/r_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A/r_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_1(1) \\ q_1(2) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

단일 (SISO)시스템에서 임펄스 배열로 이루어진 행렬형태를 다중 (MIMO)시스템으로 확장하여 생각해 보면 시간영역에서 전달함수는 다음과 같은 블록 (Block)행렬 형태와 같다.

$$\begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_1(1) \\ \vdots \\ p_2(0) \\ p_2(1) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_1(1) \\ \vdots \\ q_2(0) \\ q_2(1) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (16)$$

여기서 각각의 H_{ij} 는 (Lower Triangular Matrices) 형태이다. 이러한 행렬의 역변환은 z-영역에서 좀 더 쉽게 고려해 볼 수 있다. 수음점 ($p_1, p_1(n)$)에서 받은 신호의 z-변환은 다음과 같다.

$$P_1(z) = \frac{A}{r_{11}} z^{-n_{11}} Q_1(z) + \frac{A}{r_{12}} z^{-n_{12}} Q_2(z) \quad (17)$$

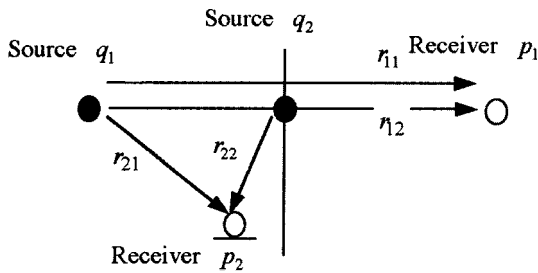


그림 2. $|H(z)|=0$ 일때 음원과 수음점의 기하학적 배열
Fig. 2. Geometrical arrangement between sources and receivers at $|H(z)|=0$ (Singular case).

그리고 2-입력 2-출력 시스템에 대해 이러한 행렬형태로 표현하면

$$\begin{bmatrix} P_1(z) \\ P_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \cdot \frac{z^{-n_{11}}}{r_{11}} & A \cdot \frac{z^{-n_{12}}}{r_{12}} \\ A \cdot \frac{z^{-n_{21}}}{r_{21}} & A \cdot \frac{z^{-n_{22}}}{r_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1(z) \\ Q_2(z) \end{bmatrix} \quad (18)$$

or $P = H \cdot Q$

여기서 $H(z)$ 는 전달함수 행렬이다. 여기서 정확한 역변환의 생성문제는 각 음원과 수음점사이의 거리 ($r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}$)와 관련이 있음을 알 수 있다. 전달함수, $H(z)$ 의 행렬값 (Determinant)이 0이 될 때

$$\det(H(z)) = \frac{A}{r_{11}r_{22}} z^{-(n_{11}+n_{22})} - \frac{A}{r_{12}r_{21}} z^{-(n_{21}+n_{12})} = 0 \quad (19)$$

($1 \leq i, j \leq 2$)

이러한 전달함수 행렬은 특이행렬이 되고 역변환 행렬을 가지지 못한다. 그리고 $H(z)$ 의 행렬식의 근은 역변환 필터의 극점 (Poles)이 되고 전달함수, $H(z)$ 의 영점 (Zeros)이 된다. 전달함수의 영점이 z -평면상의 단위원 밖에 있으면 이 시스템은 불안정하게 되며 비최소위상 시스템이 됨을 알 수 있다. 이러한 경우는 그림 2의 경우와 같으며 여기서 $r_{11}=10, r_{12}=5, r_{21}=5, r_{22}=2$ 이 된다. 이 때 전체 시스템행렬은 특이행렬 ($|H(z)|=0$)이 되며 행렬식의 근 ($z \approx \pm 1.12$)은 전달함수의 영점이며 단위원 밖에 존재하며 비최소 위상 시스템이 된다. 따라서 음원추정 즉, 음원위치, 강도를 추정할 수 없게 된다.

시스템행렬의 최소 특이값은 z -영역에서 전달함수의 영점에서 최소 특이값을 가짐을 알 수 있다. 즉, 전달함수의 영점에서 시스템행렬의 최소 특이값이 존재함을 보인다. 비최소위상에 대한 역변환 문제는 다음의 SVD (Singular Value Decomposition) 방법을 이용한다.

2.2. 비최소 위상을 가진 시스템의 역변환에 관한 문제

시스템행렬 즉, 전달함수 $H(z)$ 의 z -영역에서 영점이 단위원 안에 존재하는 최소위상 시스템에서의 역변환은 그 역행렬이 항상 존재하며 안정적이다. 하지만 z -영역에서 영점이 단위원 밖에 존재하는 비최소 위상시스템에서의 시스템행렬은 근사특이 (near-singular)행렬 또는 특이행렬이므로 그 정확한 역변환을 구하기는 힘들다. 따라서 비최소 위상 시스템에 대한 근사적 역변환을 구하기 위해 SVD (Singular Value Decomposition)를 이용한다. SVD는 수치적 해석에 있어서 매우 중요한 도구 중의 하나이다. 행렬 $H = (m \times n)$ 에 대한 SVD는 직교 (unitary)행렬과의 곱으로 정의된다[4].

$$H = USV^T \quad (20)$$

여기서 행렬 $U \in \mathbb{R}^{m \times m}, S \in \mathbb{R}^{m \times n}, V^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 이며 $U^T U = I, V^T V = I$ 인 직교행렬이다. 행렬 S 는 대각선 항 s_i 를 제외한 모든 항이 0인 대각 (diagonal)행렬이다. 즉, $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_r > 0, s_{r+1} = \dots = s_p = 0$ 이며 여기서 $\text{dat}(A) = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot \dots \cdot s_r, p = \min(m, n), r = \text{rank}(A)$ 이다.

그림 3의 최소 위상 시스템에서 그림 3(b)와 같이 특이값의 분포는 점차적으로 감소하며 그림 3(c)와 같이 비최소 위상 시스템에서 단위원 밖으로 나가는 영점으로 인하여 매우 작은 특이값을 발생시킨다. 그리고 매우 작은 특이값의 개수는 그림 3(d)에서 z -영역에서 단위원밖의 영점의 개수와 동일하며[5] 최소한 하나 이상의 매우 작은 특이값을 가진다. 이같은 시스템의 최소/ 비최소 위상에

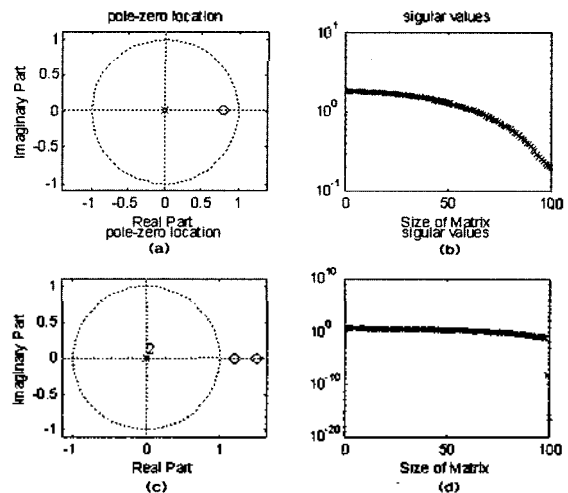


그림 3. 최소위상시스템과 비최소위상시스템의 특이값 분포
Fig. 3. Distribution of singular values of the minimum phase system and non-minimum phase system.

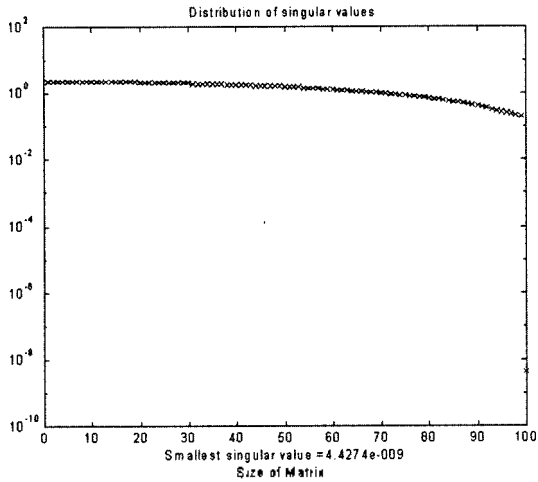


그림 4. 시스템행렬의 특이값 분포
Fig. 4. Distribution of singular values of system matrix.

대한 정보를 가지며 시스템의 불량조건 (ill-conditioning)을 판별할 수 있다. 특이행렬이 아닌 정방 (square) 행렬에 대해 조건 (conditioning)을 판단하는데 상태수 (condition number), $k(H)$ 가 사용되며 이것은 다음과 같이 정의된다[4].

$$k(H) = \|H\| \|H^{-1}\| \quad (21)$$

여기서 $\|H\|$ 는 행렬 정규 (norm)이다. 상태수는 $P=H \cdot q$ 의 역변환 문제에서 해의 민감도 (sensitivity)를 측정하는 기준이다. 어떠한 p-정규 (p-norms)에 대해서도 항상 상태수는 1보다 크거나 같다. 즉 $k(H) \geq 1$. 만약 상태수가 매우 크다면 이때 시스템 행렬, (H)는 불량조건 (ill-conditioned) 행렬이다. 그리고 시스템 행렬이 한 정규에 대해서 불량조건이면 모든 다른 정규들에 대해서 역시 불량조건이다. 2-정규 (2-norm)를 사용하면 상태수는 최대 특이값과 최소 특이값의 비로서 나타내어질 수 있다.

$$k(H) = \frac{s_{\max}(H)}{s_{\min}(H)} \quad (22)$$

직교 (unitary) 행렬에서 상태수, $k(H)$ 는 1이며 이는 완전조건화 (perfectly conditioned)되었다고 한다. 시스템행렬에 대해 상태수는 특이값의 영향을 받음을 알 수 있으며 그림 3에서 비최소 위상 시스템에서 최소 특이값이 0이 아닌 매우 작은 값이면 즉, 근사특이 (near-singular)하면 행렬이 불량조건화됨을 알 수 있다. 따라서 매우 작은 특이값을 다른 뭉쳐진 특이값에 가까운 양

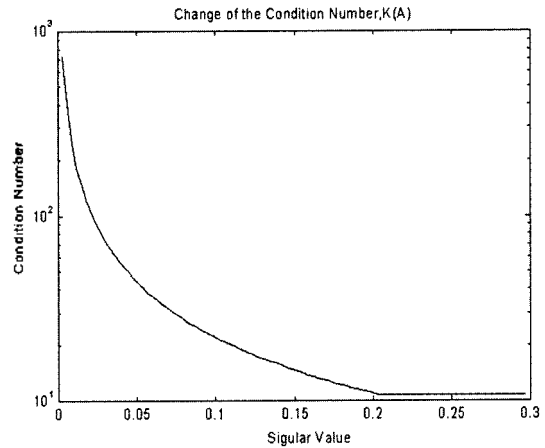


그림 5. 매우 작은 특이값의 변화에 따른 상태수의 변화
Fig. 5. Change of condition number with respect to change of smallest singular values.

의 수로 대체함으로 불량조건을 해결할 수 있다.

예로 전달함수가 $H(z) = 1 - 1.2z^{-1}$ 인 단위원 밖에 영점이 하나 존재하는 비최소 위상 시스템에 대해서 시간영역의 시스템행렬의 특이값의 분포에서 매우 작은 특이값은 하나가 있음을 그림 4에서 알 수 있다.

매우 작은 특이값을 적절한 양의 값으로 대체시킴으로써 시스템행렬의 조건의 변화를 알아보면 그림 5와 같다. 매우 작은 특이값이 0에 가까울수록 시스템행렬은 특이행렬에 가까워지므로 상태수가 매우 높으며 이 특이값을 점차적으로 증가시킬 때 시스템행렬의 상태수가 급격히 떨어지며 어느 정도 되었을 때는 변화가 거의 없음을 알 수 있다. 이러한 성질을 이용하여 근사적인 역행렬을 구할 수 있다.

기하학적 (Geometric) 관점에서 SVD를 살펴보기 위해 예로 2×2 행렬에 대해 그림 6, 7에 나타내었다[6]. 그림 6은 최소위상 시스템에 대해 즉, 매우 작은 특이값이 존재하지 않을 때이며 그림 7은 비최소 위상 시스템에 즉, 매우 작은 특이값이 존재할 때에 대해 나타낸 것이다. 여기서 보듯이 매우 작은 특이값에 의해서 역변환 과정에서 필요로 하는 직교성분 (orthogonal basis), u_2 에 대한 출력, y 의 투영 (projection)이 소멸되게 된다. 따라서 매우 작은 특이값에 의해 시스템이 불량조건화된다. 이러한 문제를 해결하기 위해 매우 작은 특이값을 그림 5에서 보는 상태수를 작게 만드는 적당한 양의 값으로 대체시킨다. 이러한 일련의 과정은 SVD를 이용 ($H = USV^T$)하여 시스템행렬을 특이값을 계산한 다음 특이값을 대각선 항으로 가지는 행렬 s 에서 불량조건을 유발시키는 작

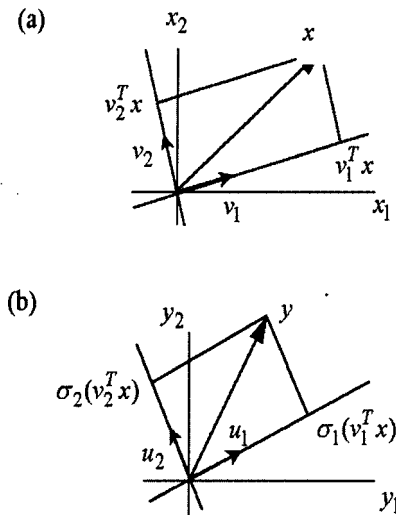


그림 6. 최소위상 시스템의 SVD의 표현
 Fig. 6. Illustration of SVD of the minimum phase system (full rank 2×2 matrix).

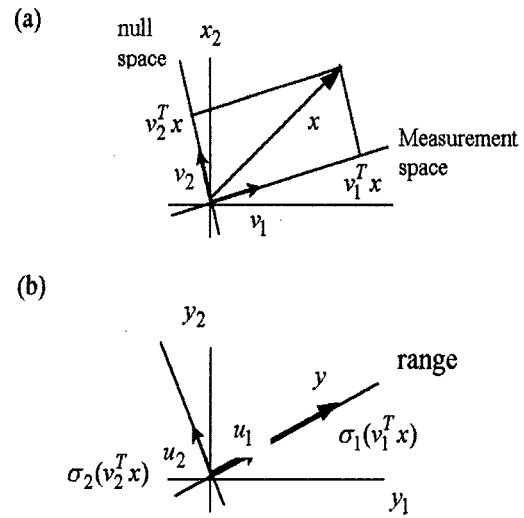


그림 7. 비최소위상 시스템의 SVD의 표현
 Fig. 7. Illustration of SVD of the non-minimum phase system ($\sigma_2 = 0$, 2×2 matrix).

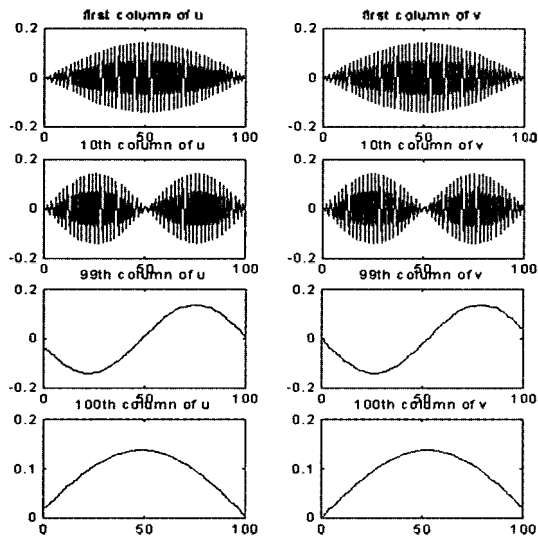


그림 8. 최소위상 시스템의 좌/우 특이벡터
 Fig. 8. Left and right singular vectors of minimum phase system.

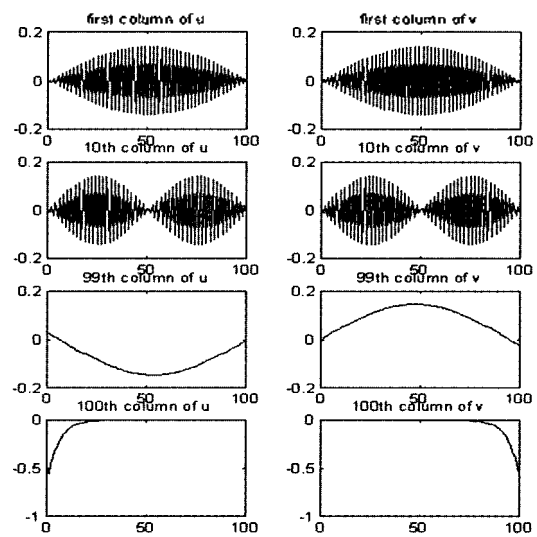


그림 9. 비최소위상 시스템의 좌/우 특이벡터
 Fig. 9. Left and right singular vectors of non-minimum phase system.

은 특이값을 분리하고 적당한 양의 값으로 대체시켜 특이값으로 구성된 대각선 행렬 \hat{S} 을 만든다. $\hat{H} = U\hat{S}V^T$ 을 이용하여 시스템행렬 \hat{H} 을 계산한다. 새롭게 구해진 시스템행렬 \hat{H} 은 불량조건이 되지 않으며 근사적인 역변환 과정에 용이하다.

$$\hat{x} = \hat{H}^{-1}y \quad (23)$$

또한 매우 작은 특이값을 임의의 양의 값으로 대체시킴과 동시에 그림 6, 7에서 보여준 기하학적 SVD에서 입력과 관련된 직교 성분인 특이벡터 (singular vector), V 를

변환시킴으로써 좀더 근사적인 역행렬을 구할 수 있다. 최소위상 시스템 ($1 - 0.8z^{-1}$)과 비최소위상 시스템 ($1 - 1.2z^{-1}$)에서 시스템행렬 (100×100)의 특이벡터 형태를 살펴보면 그림 8, 9와 같다.

일반적으로 특이벡터 u, v 는 서로 대칭한 형태를 가지며 [7] 그림 9에서 보듯이 비최소위상 시스템에서 매우 작은 특이값에 대응하는 특이벡터 (100번째 열)는 다른 특이벡터와는 달리 다른 형태를 가짐을 알 수 있다. 이러한 특이벡터를 z -변환하여 영점과 극점을 도시하면 매우 작은 특이값에 대응하는 특이벡터를 제외한 나머지 대칭적 형태를 가지고 직교 (unitary) 벡터이므로 영점은 대부분

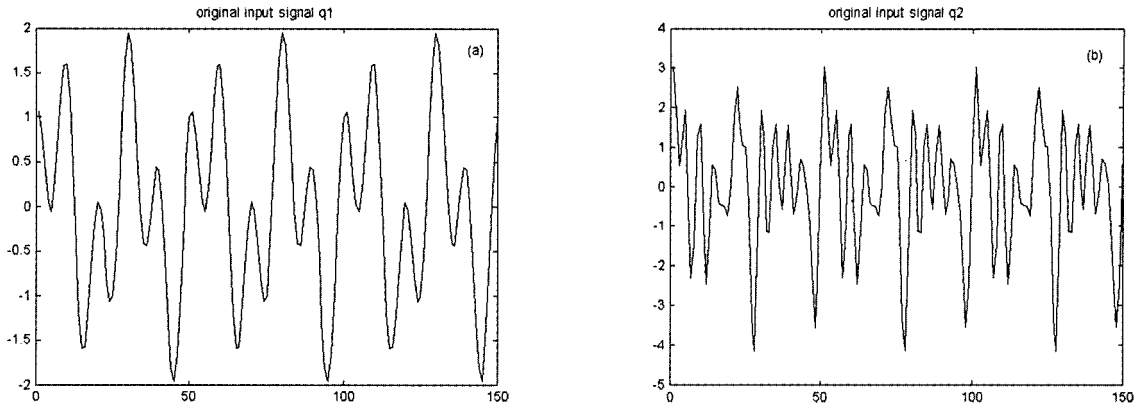


그림 10. 원 입력신호 q_1, q_2
 Fig. 10. Original input signal q_1 and q_2 .

단위원상에 존재하며 매우 작은 특이값에 대응하는 특이 벡터는 다른 형태를 지니게 된다. 이러한 시스템의 불량 조건을 발생시키는 매우 작은 특이값에 대응하는 특이 벡터를 다른 특이벡터와 유사한 형태로 대체시켜 특이행렬 \hat{V} 를 만들고 $\hat{H} = U\hat{S}\hat{V}^T$ 를 이용하여 좀 더 근사적인 시스템행렬 \hat{H} 을 구할 수 있다.

$$\hat{x} = \hat{H}^{-1}y \quad (24)$$

2.3. 수치해석 (Numerical Analysis)

비최소 위상 시스템에 대한 불량조건을 고려하기 위해 예로, 그림 2에서 보여준 2채널 시스템에 대해 알아보자. 먼저 각 채널의 입력 q_1, q_2 는 그림 10(a), (b)에서 보여준 신호와 같다. 그림 11에서 전체 시스템행렬의 특이값의 분포를 살펴보면, 시스템의 불량조건 문제를 유발시키는 매우 작은 특이값을 볼 수 있다. z -영역에서 특이값은 영점에서 최소 특이값이 존재하고 영점의 위치에 따라

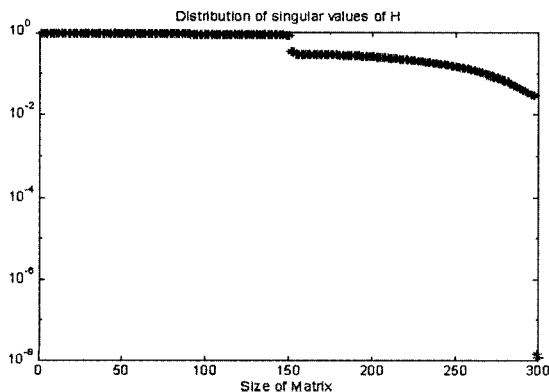


그림 11. 시스템행렬 H 의 특이값의 분포
 Fig. 11. Distribution of singular values of system matrix H .

시스템의 위상을 판단할 수 있으며 전체 시스템행렬의 매우 작은 특이값은 전달함수의 영점과 밀접한 관계를 가짐을 알 수 있다.

비최소 위상 시스템이라면 z -영역에서 영점은 단위원 밖에 존재하며 영점에 존재하는 매우 작은 특이값은 불량 조건을 유발시킨다. 따라서 비최소 위상 시스템에서 직접적인 역변환을 이용하여 입력을 파악하기란 매우 힘들다. 이런 문제를 해결하기 위해 매우 작은 특이값을 그림 5에서 보여주는 상태수가 불량조건을 유발시키지 않는 값이 되는 부근의 적절한 양의 값으로 대체시킴으로써 근사적인 역행렬을 구한다. 이를 이용하여 입력을 얻을 수 있다. 이 결과는 그림 12(a), (b)와 같다.

이러한 작은 특이값을 대체와 동시에 그림 6, 7에서 보듯이 특이행렬이 입력과 출력의 직교 성분이므로 입력에 관련된 특이행렬 V 을 변화시킴으로써 좀 더 근사적인 시스템행렬 (\hat{H})을 구하고 이 시스템행렬의 역변환을 이용하여 입력신호를 구할 수 있다. 그림 13(a), (b)에서 특이값과 특이벡터를 변화시켜 구한 근사적 시스템행렬 (\hat{H})의 역변환을 통해 입력을 구한 것을 보여준다.

여기서 특이값을 변화시켰을 때와 특이값과 특이벡터를 함께 변화시켜 얻은 시스템행렬의 역변환으로 얻은 입력1, 2와 원입력1, 2의 오차를 고려해보면 표 1에서 보는 바와 같다.

표 1. 원 입력신호와 얻은 입력신호의 오차
 Table 1. Error between recovered input and original input.

Method	입력1	입력2
$\hat{H} = U\hat{S}\hat{V}^T$ 사용	0.0343	0.0047
$\hat{H} = U\hat{S}\hat{V}^T$ 사용	0.0067	-7.4e-4

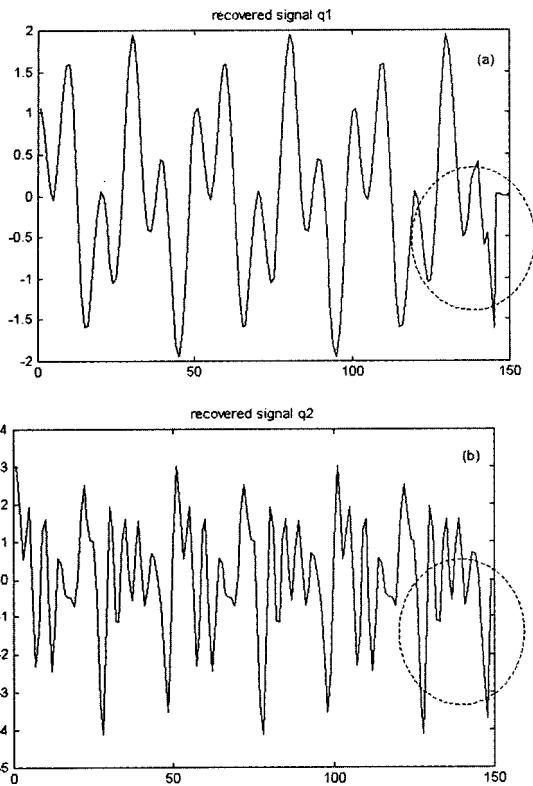


그림 12. 특이값을 대체한 행렬 \hat{H} 의 역변환을 이용하여 얻은 신호
 Fig. 12. Recovered signal using inversion of matrix \hat{H} with singular value substitution.

오차는 $|norm(\hat{q}) - norm(q)| / norm(q)$ 를 이용하여 계산하였다. 여기서 특이값을 변화시킬 때보다 특이값과 특이벡터를 함께 변화시킬 때 원 입력에 보다 근사적인 값을 얻을 수 있다.

III. 결론

본 연구는 비최소위상을 갖는 시스템의 역변환문제를 다루는 과정에서 발생하는 불량조건문제를 다루었고 이러한 문제는 시스템행렬이 가지는 매우 작은 특이값과 밀접한 관계가 있음을 알 수 있었다.

SVD를 이용하여 시스템행렬의 특이값과 특이벡터를 해석하였고 시스템이 가지는 매우 작은 특이값을 대체시켜 시스템의 근사적인 역변환 필터를 구하여 원 음원을 파악하였다. 또한 보다 근사적인 역변환 필터를 구하기 위하여 매우 작은 특이값과 이에 대응하는 특이벡터를 변화시켜 구한 역변환 필터를 이용하여 음원을 파악하였으며 이는 원 음원에 보다 가까운 값을 얻을 수 있음을 확인하였다.

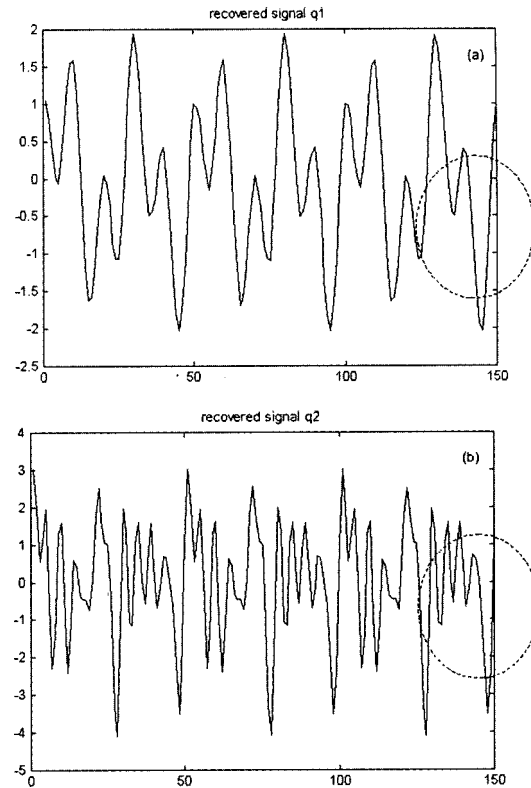


그림 13. 특이값과 특이벡터를 대체한 행렬 \hat{H} 의 역변환을 이용하여 얻은 신호
 Fig. 13. Recovered signal using inversion of matrix \hat{H} with singular value and singular vector substitution.

감사의 글

본 연구는 과학기술부의 원자력연구개발사업비의 지원으로 수행되었음.

참고 문헌

1. S. Hashemi and J. K. Hammond, "The Interpretation of Singular values in the Inversion of Minimum and Non-Minimum Phase Systems," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 10, No. 3, pp. 225-240, 1996.
2. A. D. Pierce, *Acoustics*, McGraw-Hill, New York, 1981.
3. P. A. Nelson and S. J. Elliott, "Active Control of Sound," Academic Press, London.
4. O Kirkeby and Philip A. Nelson, "Reproduction of Plane Wave Sound Fields," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 94, No. 5, Nov. 1993.
5. G. H. Golub and C. F. Van Loan, "Matrix Computation", The John Hopkins University Press, 1996.
6. C. van Schooneveld, "Inverse Problems: A Tutorial Survey," *Underwater Acoustic Data Processing*, pp. 393-411, 1989.
7. S. H. Wang and R. Zachery, "Singular Value Decomposition of System Input-Output Matrix and Its Symmetry Property," *Computers Elect. Engng*, Vol. 22, No. 3, pp. 231-234, 1996.

저자 약력

● 이 상 권 (Sang Kwon Lee)



1982년 2월: 부산대학교 기계공학과 (학사)
 1984년 2월: 부산대학교 기계공학과 (석사)
 1988년 2월: University of Southampton, (ISVR)
 (박사)
 1984년 3월~1984년 7월: LG전자 연구소
 1984년 8월~1985년 2월: 예비역 사관 4기
 1985년 3월~1994년 8월: 현대자동차 마북리 연구소
 1998년 3월~1999년 2월: 삼성자동차 중앙연구소
 (기흥 소재)

1999년 3월~ 현재: 인하대학교 기계공학과 교수

* 주관심분야: 음향 신호처리, 자동차 소음진동제어, 기계설비고장진단, 방음벽

● 노 경 래 (Kyoung Rae Noh)



2000년 2월: 인하대학교 기계공학부 기계공학전공
 (학사)

2000년 3월~ 현재: 인하대학교 기계공학과 (석사)

* 주관심분야: 역변환 문제, 음향신호처리, 소음진동
 제어