한국음향학회지 제20권 제4호 pp. 71~80 (2001)

2개의 해저층으로 구성된 천해 음파전달에 관한 모델 연구

A Study on Shallow Water Propagation Model with 2-layered Sediment

김 영 선*, 김 성 부**
(Young-Sun Kim*, Sung-Boo Kim**)

*국방과학연구소, **부경대학교 물리학과

(접수일자: 2000년 6월 20일; 수정일자: 2000년 9월 18일; 채택일자: 2001년 3월 29일)

2개 층으로 구성된 페커리스 (Pekeris) 모델에 해저퇴적층의 영향을 고려하기 위해 1개의 퇴적층을 증가시킨 2개의 해저층으로 구성된 3층의 유체모델을 가정하고 원통형 좌표계에서 그린 (Green)함수와 경계조건, 좀머펠트 (Sommerfeld) 방사조건 등을 적용하여 해를 구했다. 모드는 불연속 (discrete)모드와 가상 (virtual)모드로 구분하여 구했으며 유도된 불연속모드 산출 관계식은 Tolstoy와 Clay의 정규 (normal)모드 생성방정식과 일치함을 확인하였다. 또한, 환경조건을 페커리스 모델의 조건과 유사하도록 조절하여 시뮬레이션을 수행한 결과, 동일한 결과를 보임을 통해 유도된 수식이 조건에 따라서는 페커리스 모델로 환원됨을 확인하였다. 따라서 본 모델이 근거리 음장내의 가상모드에 대한 퇴적층의 영향 연구에 사용될 수 있다고 판단된다.

핵심용어: 가상모드, 파수, 퇴적층, 근거리 음장
투고분야: 수중음향 분야 (5.1)

In order to consider the sediment layer's effect to total acoustic field, we composed a 3 layered fluid model of 2 sediment layers by adding an additional layer to the Pekeris model and found solutions by using Green's function, boundary conditions and Sommerfeld radiation condition. The modes were divided into discrete modes and virtual modes, and confirmed that the characteristic equation to find discrete modes was same as that of Tolstoy and Clay for normal modes. Also, we confirmed that under similar conditions the 3 layered model showed same results as that of Pekeris model. We believe this 3 layered model can be used to study the sediment's effect on the virtual mode of near field.

Keywords: *Virtual mode, Wavenumber, Sediment layer, Near field*
ASK subject classification: *Underwater acoustics (5.1)*

I. 서 론

1948년 페커리스에 의해 제안된 페커리스모델은 수층과 해저층을 2개의 등속 유체층으로 가정한 음파전달 이론으로써 비록 실제 해양환경에 비해 단순하지만 천해에서의 음파전달 현상을 비교적 잘 설명해 주었고, 수층내의 음장해석을 정규모드 (normal mode) 이론을 이용하여 해석적으로 풀이함으로써 이후에 개발되는 많은 수의 음장해석모델의 표준이 되어 왔다[1]. 1958년 Tolstoy는 1개의 수층과 2개의 퇴적층으로 구성된 천해에서의 음파전달 현상을 정규모드 이론 및 실험을 통해 설명하였다[2]. 그러나 2층뿐인 페커리스모델은 수층내의 표층 도파관이나 혹은 퇴적층의 두께 등이 음장에 미치는 영향을

책임저자: 김영선 (yskim@sunam.kreonet.re.kr)
645-600 경남 진해시 현동 19
국방과학연구소 2체계본부 1부 6팀
(전화: 055-540-6167; 팩스: 055-540-3737)

정확히 설명할 수 없으며, 불연속모드만을 대상으로 하는 Tolstoy의 3층모델은 전단파 (shear wave)와 가상모드에 의한 영향을 설명할 수가 없었다.

퇴적층과 해저기층내에 생기는 전단파가 수층내의 음파전달에 많은 영향을 미치는 주된 요인은 1970년대 후반부터 Hawker에 의해 제안되었던 임계각 이내에서의 Stoneley파[3]와 Vidmar가 주장한 전단파 공명 (shear waves resonance)[4]임이 밝혀졌다. 그러나 천해에서의 이들 영향은 퇴적층의 두께, 종파음속, 전단파음속 등에 제한되어지는데 주로 얇은 퇴적층과 저주파에서 우세하게 나타나며, 이러한 범위를 벗어난 비교적 두꺼운 퇴적층과 일정 주파수 이상에서는 전단파의 영향을 무시한 유체-전달손실모델과 별다른 차이를 보이지 않게 된다[5]. 뿐만 아니라 퇴적층의 두께가 두꺼울 경우, 퇴적층내의 감쇠계수와 암반 등으로 구성된 해저기층 (substrate)으로의 누설파 (leaky waves)로 인해 종파 (compressional waves)의 해저기층에 대한 영향을 무시할 수 있게 된다[6].

한편, 1973년 Labianca에 의해 제기된 표층 도파관내의 가상모드 존재는 이후 Tindle, Bartberger, Williams, Stickler 등에 의해 다양한 접근방법을 통한 연구결과가 발표되었다[7-10]. 1975년 Stickler는 다층 음속구조 환경 하의 가상모드를 포함한 음장산출모델을 발표함으로써 해양의 음파전달환경을 좀더 현실에 가깝게 적용 가능토록 하였으나, 실수값의 파수에서만 모드가 존재하는 것으로 가정함으로써 매질에 의한 감쇠가 없는 원통형 분산손실만의 이상적인 모델이 되었으며, 음장의 산출과정이 복잡하여 산출된 수식의 물리적인 의미를 분석하기가 쉽지가 않은 단점이 있다[11-13]. 또한, 1980년 발표된 논문[14]에서는 비교적 세밀하게 가상모드를 유도하였으나 2층의 페커리스모델을 대상으로 하였다. 이렇듯 가상모드는 불연속모드에 비해 해를 구하기가 복잡하고 음원으로부터 제한된(근거리) 거리에서만 영향을 미치기 때문에 상대적으로 관심을 끌지 못하였으며, 그 동안 사용되어 왔던 많은 모델에서 가상모드의 영향을 포함시키지 않은 것은 이러한 이유 때문이었다. 그러나 천해에서의 음파전달에 대한 관심이 높아져 가고 특히, 해양조건에 따라서는 수심의 60배 이상까지도 이 모드의 영향이 개발되는 많은 모델에서는 이 모드를 포함시키고 있다[11,16,17].

본 논문에서는 해저기층의 영향이 무시되는 조건하에서 퇴적층의 변화가 음파전달에 미치는 영향을 알아보기 위해 가상모드가 포함된 3층 음파전달모델을 개발하고, 시뮬레이션을 통해 그 결과를 분석하였다. 이러한 해양조건을 위해 해저기층의 표면에 생기는 Stoneley파의 고주파제한 (high frequency limit)[18]과 퇴적층내의 전단파로부터 발생하는 3차 이상의 전단파 공명주파수[4]를 넘도록 하고, 종파의 해저기층 영향을 줄이기 위해 퇴적층의 두께가 40m 이상인 천해를 대상으로, 사용주파수를 50hz 이상으로 제한하였다. 따라서 본 모델은 페커리스 모델의 단순성과 표층 도파관 및 퇴적층에 대한 해석이 가능한 적용성을 함께 갖는다. 또한, 산출된 수식의 물리적인 의미가 쉽게 파악될 수 있도록 하기 위해 파수 (wavenumber)차원에서 그린함수에 각 경계면에서의 조건과 좀머펠트 (Sommerfeld) 방사조건 등을 적용하여 해를 찾고, 해의 함수특성을 통해 불연속모드 및 가상모드를 구한 뒤, 이를 한켈변환 (hankel transformation)을 취하는 파수적분 (wave number integration)방법을 택했다. 가상모드의 음장은 EJP 분지절단 (branch cut)을 따라 DeSanto가 제안한 방법을 이용하였다[19]. Tolstoy와 Clay의 정규모드 생성조건과의 수식적 비교와 페커리스 모델의 가상모드를 포함한 전달손실 계산을 통한 시뮬레이션 비교로 구분하여 유도된 수식을 검증하였다. 페커리스모델의 가상모드 계산은 Tindle의 결과식을 이용하였다[2,8,20].

끝으로 전체음장 산출에 대한 가상모드의 영향분석은 가장 큰 파수의 가상모드가 불연속모드로 전환하기 직전과 직후의 음장비교로 하였다. 가상모드는 일반적으로 알려진 바와 같이 음원으로부터의 근거리 음장에 주로 영향을 미치며, 음원으로부터의 거리가 증가할수록 불연속모드의 음장에 비해 급격히 감소하지만 모드의 그레이징각 (grazing angle)에 따라서는 음원으로부터 수 km까지도 영향을 미칠 수 있음을 확인하였다.

II. 2개의 해저층으로 이루어진 3층 유체모델의 구성과 파동함수 유도

먼저 그림 1과 같이 수층 및 2개의 해저층으로 구성된 3층의 유체층을 가정한다.

제1층의 깊이 z_s에 S 크기의 조화음원 (harmonic source)이 위치해 있다고 하고 원통형 좌표계를 사용할 때 임의의 점(r, z)에서 변위포텐셜 (displacement potential) $\phi(r, z)$는 다음과 같은 수식을 만족한다.

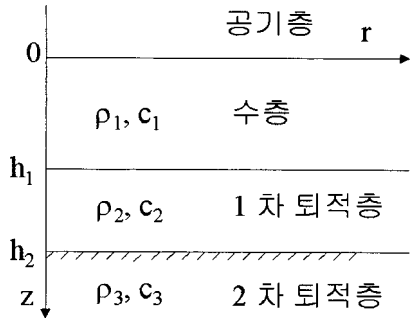


그림 1. 2개의 해저층으로 구성된 3층 유체층
Fig. 1. 3 Layered fluid structure with 2 layered sediment.

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2(z)\right]\phi(r,\ z) = S\ \delta(r)\delta(z-z_s) \tag{1}$$

이를 한켈변환하면 다음과 같이 변수분리된 방정식이 얻어지며

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}+(k^2-k_r^2)\right]\phi(k_r,z) = S\frac{\delta(z-z_s)}{2\pi} \tag{2}$$

변위포텐셜 $\phi(k_r,z)$를 다음과 같이 둠으로써 변수분리된 위의 식을 그린함수의 일반적인 방정식 형태로 바꾸어 해를 구한다.

$$\phi(k_r,z) = -S\ G(k_r,z,z_s) \tag{3}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}+(k^2-k_r^2)\right]G(k_r,z,z_s) = -\frac{\delta(z-z_s)}{(2\pi)} \tag{4}$$

$r=1$에서 단위크기의 음압을 갖도록 규격화할 경우 음압 $p(z,r)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p(z,r) &= \rho\omega^2\phi(z,r) \\ &= \rho\omega^2\frac{4\pi}{\rho_s\omega^2}\frac{1}{2}\int_{C_-}H_0^{(1)}(k_r,r)\phi(k_r,z)k_r dk_r \\ &= \pi^2 i\frac{\rho}{\rho_s}\sum_{n=0}H_0^{(1)}(k_{rn},r)Res[G(k_{rn},z)]k_{rn} \end{aligned} \tag{5}$$

여기에서 $r=1$에서 단위 음압을 갖기 위한 음원의 조건 $S=\frac{4\pi}{\rho_s\omega^2}$의 적용과 역 한켈변환 (inverse hankel transformation) 등의 과정을 거쳤다. 위의 식에서 $Res[G(k_{rn},z)]$은 파수평면상에서 그린함수 $G(k_r,z)$이 극값을 갖는 파수 k_{rn}에서의 유수 (residue)를, ρ_s는 음원의 위치에서의 밀도를 의미한다. 따라서 음압을 계산하기 위해서는 먼저 식 (4)를 만족시키는 변위포텐셜을 구해야 하며, 음속 및 밀도가 서로 다른 3개 층으로 구성되어 있으므로 각 층별 변위포텐셜함수가 필요하다.

2.1. 층별 변위포텐셜함수 유도

변위포텐셜을 다음과 같이 그린함수 방정식 (4)의 일반해와 특수해의 선형 합으로 둔다[14].

$$G_i(k_r,z,z_s) = g_i(k_r,z,z_s) + H_i(k_r,z) \tag{6}$$

식 (4)에 각 층의 경계면에서 음압과 변위포텐셜 미분값의 경계면에 대한 수직성분이 갖는 연속조건, 음원의 위치에서의 변위포텐셜의 불연속성, 좀머펠트의 방사조건 등을 적용하여 연립방정식을 풀면 다음과 같은 변위포텐셜함수를 얻을 수 있다[12].

가. 수층

$$\begin{aligned} G_1(k_r,z,z_s) &= -\frac{e^{ik_{z1}|z-z_s|}}{4\pi ik_{z1}} \\ &+ \frac{2i}{4\pi Mk_{z1}}(\rho_2 k_{z1}\cos[k_{z1}(h_1-z_s)]M_2 \\ &- i\rho_1 k_{z2}\sin[k_{z1}(h_1-z_s)]M_1)e^{ik_{z1}z} \\ &+ \frac{2i}{4\pi Mk_{z1}}i\sin(k_{z1}z_s)e^{ik_{z1}(h_1-z)} \\ &\cdot(\rho_2 k_{z1}M_2-\rho_1 k_{z2}M_1) \end{aligned} \tag{7}$$

$$k_{z1} = (k_1^2-k_r^2)^{1/2},\quad k_1 = \omega/c_1$$

나. 제1퇴적층

$$\begin{aligned} &G_2(k_r,z,z_s) \\ &= \frac{\rho_1\sin(k_z z_s)}{2\pi M}[(\rho_2 k_{z3}+\rho_3 k_{z2})e^{-ik_{z2}(h_2-z)} \\ &+ (\rho_3 k_{z2}-\rho_2 k_{z3})e^{ik_{z2}(h_2-z)}] \end{aligned} \tag{8}$$

$$k_{z2} = (k_2^2-k_r^2)^{1/2},\quad k_2 = \omega/c_2$$

다. 제2퇴적층

$$\begin{aligned} &G_3(k_r,z,z_s) \\ &= \frac{4\rho_1\rho_2 k_{z1}k_{z2}}{4\pi Mk_{z1}}\sin(k_{z1}z_s)e^{ik_{z3}(z-h_2)} \end{aligned} \tag{9}$$

$$k_{z3} = (k_3^2-k_r^2)^{1/2},\quad k_3 = \omega/c_3$$

여기에서 사용된 상수 M1, M2, M은 다음과 같다.

$$M = 2\rho_2 k_{z1} M_2 \cos(k_{z1} h_1) + 2i\rho_1 k_{z2} M_1 \sin(k_{z1} h_1) \quad (10)$$

$$M_1 = -[\rho_2 k_{z3} \cos(k_{z2} h_{21}) - i\rho_3 k_{z2} \sin(k_{z2} h_{21})] \quad (11)$$

$$M_2 = -[\rho_3 k_{z2} \cos(k_{z2} h_{21}) - i\rho_2 k_{z3} \sin(k_{z2} h_{21})] \quad (12)$$

$h_{21} = h_2 - h_1$: 제1 퇴적층의 두께

2.2. 불연속모드 산출과정

위의 각 층별 변위포텐셜함수의 분모 중 상수 M, 즉 식 (10)이 0이 되는 조건을 만족시키는, 경계면과 평행한 방향의 파수 k_{rn}에서 변위포텐셜함수는 최대값을 가지며, 음압도 최대가 되기 때문에 이러한 점에 모드가 존재하며, 이들은 그림 2에서 보인 것처럼 각 층의 파수를 기준으로, 파수평면상의 가장 큰 값의 파수 (수층의 파수 k_1, 혹은 퇴적층의 파수 k_2)와 가장 적은 값의 파수 (제2 퇴적층의 파수 k_3) 사이의 값을 가질 경우에는 불연속모드로, 가장 적은 값의 파수 k_3와 0 사이의 값을 가질 경우에는 가상모드 (virtual mode)로 구분한다.

또한, 불연속모드는 각 층의 파수 k_i와 경계면에 수직한 방향의 파수 k_{zi}간의 관계식

$$k_{z1} = (k_1^2 - k_r^2)^{1/2}, \quad k_{z2} = (k_2^2 - k_r^2)^{1/2}$$

$$k_{z3} = (k_3^2 - k_r^2)^{1/2}$$

으로부터 경계면에 평행한 방향의 파수 k_r의 크기에 따라서

$$k'_{z1} = (k_r^2 - k_1^2)^{1/2} = ik_{z1}, \quad k_{z1} : \text{실수}$$

$$k'_{z2} = (k_r^2 - k_2^2)^{1/2} = ik_{z2}, \quad k_{z2} : \text{실수}$$

$$k'_{z3} = (k_r^2 - k_3^2)^{1/2} = ik_{z3}, \quad k_{z3} : \text{실수}$$

등과 같은 새로운 변수를 가정하고 이들을 M = 0에 대입하여 정리하면 각 파수의 영역에 따라 다음과 같은 관계식을 얻게 된다.

가. $k_3 < k_2 < k_1$ 일 때

각 층의 음속간 관계가 c3 > c2 > c1인 경우로서 파수 k_r의 크기에 따라 다음과 같이 나눈다.

첫째 $k_2 < k_r < k_1$ 범위에서

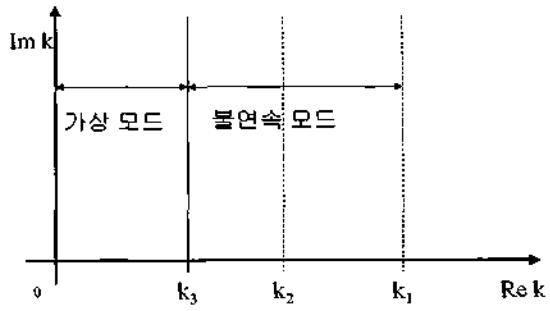


그림 2. 파수평면상의 모드생성영역
Fig. 2. Modes regions on the complex wavenumber plane.

$$\cot(k_{z1} h_1) = -\frac{\rho_1 k_{z3}' + \frac{\rho_1 \rho_3 k_{z2}'}{\rho_2} \tanh(k'_{z2} h_{21})}{\rho_3 k_{z1} + \frac{\rho_2 k_{z1} k_{z3}'}{k_{z2}'} \tanh(k'_{z2} h_{21})} \quad (13)$$

둘째 $k_3 < k_r < k_2$ 범위에서

$$\cot(k_{z1} h_1) = -\frac{\rho_1 k_{z3}' - \frac{\rho_1 \rho_3 k_{z2}}{\rho_2} \tan(k_{z2} h_{21})}{\rho_3 k_{z1} + \frac{\rho_2 k_{z1} k_{z3}'}{k_{z2}} \tan(k_{z2} h_{21})} \quad (14)$$

나. $k_3 < k_1 < k_2$ 일 때

음속간 관계가 $c_3 > c_1 > c_2$ 일 때, 즉 제1 퇴적층의 음속이 수층의 음속보다 낮은 경우, 또는 표층 도파관이 형성된 경우가 이에 해당하며, 위의 경우와 마찬가지로 파수 k_r의 크기에 따라 다음과 같이 나눈다.

첫째 $k_1 < k_r < k_2$ 범위에서

$$\cot(k_{z2} h_{21}) = -\frac{\rho_2 k'_{z3} - \frac{\rho_1 \rho_3 k_{z2}^2}{\rho_2 k_{z1}} \tanh(k'_{z1} h_1)}{\rho_3 k_{z2} + \frac{\rho_1 k_{z2} k'_{z3}}{k'_{z1}} \tanh(k'_{z1} h_1)} \quad (15)$$

둘째 $k_3 < k_r < k_1$ 범위에서

$$\cot(k_{z2} h_{21}) = -\frac{\rho_2 k'_{z3} - \frac{\rho_1 \rho_3 k_{z2}^2}{\rho_2 k_{z1}} \tan(k_{z1} h_1)}{\rho_3 k_{z2} + \frac{\rho_1 k_{z2} k'_{z3}}{k_{z1}} \tan(k_{z1} h_1)} \quad (16)$$

III. 가상모드 계산

식 (5)에서 보인 것처럼 음압을 계산하기 위해서는 복소평면상에서 적분을 해야 하며, 불연속모드와는 달리 파수 k_r의 실수부 크기가 전술한 바와 같이 제2 퇴적층의 파수 k_3보다 적은 $0 < \mathrm{Re}(k_r) < k_3$ 범위내에 있는 가상모드의 파수 k_r은 작기는 하지만 허수값을 갖기 때문에 경계면에 수직한 방향의 파수 $k_{zi} = (k_i^2 - k_r^2)^{1/2}$은 2개의 시트 (sheet)로 구성되는 복소평면상의 값을 가지며, 시트 (sheet)간에는 k_i을 기점으로 하는 분지절단 (Branch cut)이라 불리는 경계가 존재할 수 있기 때문에 2개의 시트 (sheet)로 구성된 평면상에서 적분을 수행하기 위해서는 분지절단을 고려한 적분경로를 택하지 않을 수 없다. 현재 가정하고 있는 3층모델에서는 k_1, k_2, k_3 등이 분지점이 될 수 있다. 그림 3에서 보인 것처럼 각 점을 분지점으로 하는 분지절단을 가정하고, 분지절단 상하의 적분경로, 즉 L_{41}, L_{42}에서의 변위포텐셜을 구해보면 L_{11}, L_{12}와 L_{21}, L_{22}에서는 동일한 값을 보이며, 방향이 서로 다르므로 k_1과 k_2을 분기점으로 하는 적분값은 상호 상쇄되어 분지절단 적분에 기여하지 못하나 L_{31}, L_{32}의 경우 변위포텐셜은 0 이 아닌 서로 다른 값을 가지기 때문에 그림 3에서와 같이 k_3을 분기점으로 하는 분지절단을 가정하고, 선적분을 이용하여 모드를 산출한다. 즉 $k_3 < k_r < k_1$ (혹은 k_2) 범위의 파수 k_r은 실수값의 불연속모드를 가지며 $0 < Re(k_r) < k_3$ 범위에서는 가상모드를 갖는다[19,21,22]. 이는 수심이 깊은 환경에서 k_2 와 k_3 2점을 분기점으로 하는 분지절단적분을 가정한 Macpherson과 Frisk의 견해와는 다른 결과를 보이고 있다[22].

3.1. 가상모드의 변위포텐셜 선적분 계산

k_3를 분기점으로 하는 분지절단과 이를 경계로 존재

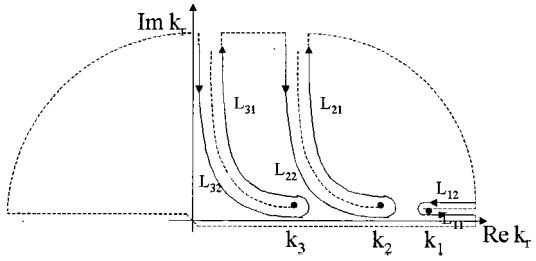


그림 3. 복소평면상의 EJP 분지절단
Fig. 3. EJP branch cuts on a complex wavenumber plane.

하는 2개의 복소수 시트 (sheet)상에서 파수 k_r에 대한 선적분을 수행하기 위해 본 논문에서는 EJP 분지절단을 선택하였으며 선적분에 대한 구체적인 방법은 DeSanto가 제안한 방법을 따랐다[19]. 즉 그림 3에서 보인 바와 같이 복소평면상의 가상모드의 음압은 다음 식 (17)과 같이 되며 이는 식 (18)에서 처럼 $i\infty$에서 분지 점 (branch point) k_3까지 선적분의 차이로 표현할 수 있다.

$$P_{z3} = 2\pi \frac{\rho}{\rho_s} \int_{C_-} H_0^{(1)}(k_r r) G k_r dk_r \tag{17}$$

$$= 2\pi \frac{\rho}{\rho_s} \int_{i\infty}^{k_3} H_0^{(1)}(k_r r) \triangle_3 G k_r dk_r \tag{18}$$

위의 식 (18)에서 $\triangle_3 G$는 분지절단 위아래 경로 L_{41}와 L_{42}에서 k_{z3}가 2π 만큼의 위상차이를 가지며, 적분경로의 방향이 반대이기 때문에 변위포텐셜 차를 의미하며, 각 층의 변위포텐셜 차는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\triangle_3 G = G_0 - G_{2\pi} \ \left(= \frac{\triangle_3 g}{MM^*}\right) \tag{19}$$

여기에서 분모의 MM^*가 최소일 때 변위포텐셜 차 $\triangle_3 G$가 상대적인 극 (local maximum)값을 갖기 때문에 $MM^* = D(k_r)$로 놓고, $D(k_r)$가 상대적으로 최소인 곳의 파수 k_{rm}를 중심으로 $D(k_r)$을 전개하면 분지절단적분에 의한 음압은 다음과 같다.

$$P_{z3} \sim 2\pi \frac{\rho}{\rho_s} \sum_m R_{3m} k_{z3m} \cdot \int_0^\infty \frac{H_0^{(1)}(r\,[k_3^2 - k_{z3}^2]^{1/2})}{1 + (k_{z3} - k_{z3m})^2 \alpha_{3m}} dk_{z3} \tag{20}$$

가상모드는 파수 k_r이 복소평면상에서 0에서부터 분지점 k_3까지 양의 실수축 및 허수축 근접한 곳에 존재하기 때문에 DeSanto가 제안한 바와 같이 실수축상의 가상모드와 허수축에 근접한 곳의 가상모드로 구분하여 계산하면 다음과 같다[19].

가. 가상모드가 실수축상에 있는 경우,

$0 < Re(k_{rm}) < k_3$인 경우로서 $\varepsilon = k_{z3} - k_{z3m}$으로 두고 한켈 (Hankel)함수의 근사식을 사용하면

$$P_{z3} = 2\pi \frac{\rho}{\rho_s} \left(\frac{-2i}{\pi r}\right)^{1/2} \cdot \sum_m R_{3m} k_{z3m} k_{rm}^{-1/2} \exp(irk_{rm}) I_{3m} \tag{21}$$

이 된다. 여기에서 I_{3m}은 식 (20)의 적분항으로써 다음과 같이 얻어진다.

$$I_{3m} = \int_{-k_{z3m}}^{\infty} \frac{\exp(-iL_{3m}\varepsilon)}{1+\varepsilon^2 \alpha_{3m}} d\varepsilon$$
$$\sim \pi \alpha_{3m}^{-1/2} \exp(-rk_{z3m}/k_{rm}\alpha_m^{1/2}) \quad (22)$$

나. 가상모드가 허수축 근접한 곳에 있는 경우

$k_{rm} = Re(k_{rm}) + i|Im(k_{rm})|$ 에서 $Re(k_{rm}) \to 0$, $0 < |Im(k_{rm})| < \infty$인 경우로서 $\varepsilon = k_{z3} - k_{z3m}$으로 두고 한켈 (Hankel)함수의 근사식을 사용하면

$$P_{z3} \sim 2\pi \frac{\rho}{\rho_s} \left(\frac{-2}{\pi r^3}\right)^{1/2}$$
$$\cdot \sum_m R_{3m} |k_{rm}|^{1/2} \exp\left(-r\frac{k_{z3m}k_3 - k_3^2}{|k_{rm}|}\right)$$
$$\sim 2\pi \frac{\rho}{\rho_s} \left(\frac{-2i}{\pi r}\right)^{1/2}$$
$$\cdot \sum_m R_{3m} k_{z3m} k_{rm}^{-1/2} \exp(irk_{rm}) I_{3m} \quad (23)$$

$$I_{3m} = \int_{k_3 - k_{z3m}}^{\infty} \frac{\exp(-|L_{3m}|\varepsilon)}{1+\varepsilon^2 \alpha_{3m}} d\varepsilon$$
$$\sim \frac{|k_{rm}|}{rk_{z3m}} \exp\left[\frac{-rk_{z3m}(k_3 - k_{z3m})}{|k_{rm}|}\right] \quad (24)$$

이 된다. 이상과 같은 식 유도과정에서 사용된 각 상수 및 변수는 다음과 같다.

$$L_{3m} = rk_{z3m}/k_{rm}$$
$$k_{rm} = (k_3^2 - k_{z3m}^2)^{1/2}$$
$$\alpha_{3m} = [2D(k_{rm})]^{-1} \frac{d^2D}{dk_{z3}^2}\Big|_{k_{rm}}$$
$$R_{3m} = \Delta_3 g|_m D(k_{rm})^{-1} = \Delta_3 G|_{k_{rm}} \quad (25)$$

3.2. 분지절단상의 변위포텐셜 차 ($R_3 = \Delta_3 G$)

전술한 바와 같이 첫 번째 시트 (sheet)와 두 번째 시트 (sheet)상에서 파수 k_{z3}의 위상차이로 인해 분지절단 주위의 적분경로상의 선적분은 변위포텐셜 차 R_3에 대한 선적분으로 바뀐다. 각 층에서의 변위포텐셜 차는 층마다 다른 함수를 갖는 변위포텐셜로 인해 다음과 같이 3가지로 표현된다.

가. 수층

$$\Delta_3 G_1 = \frac{16i\rho_1\rho_2^2\rho_3 k_{z1} k_{z2}^2 |k_{z3}|}{4\pi D k_{z1}}$$
$$\cdot \sin(k_1 z)\sin(k_{z1} z_s) \quad (26)$$

나. 제1퇴적층

$$\Delta_3 G_2 = \frac{4i\rho_1\rho_2\rho_3 k_{z2}|k_{z3}|}{\pi D} \sin(k_{z1} z_s)$$
$$\cdot \{\rho_2 k_{z1} \sin[k_{z2}(z - h_1)]\cos(k_{z1} h_1)$$
$$+ \rho_1 k_{z2}^2 \cos[k_{z2}(z - h_1)]\sin(k_{z1} h_1)\} \quad (27)$$

다. 제2퇴적층

$$\Delta_3 G_3 = -4i \frac{4\rho_1\rho_2 k_{z1} k_{z2}}{4\pi k_{z1} D} \sin(k_{z1} z_S)$$
$$\cdot \{\rho_2 k_{z1} M2_0^* \cos(k_{z1} h_1)\sin[|k_{z3}|(z - h_2)]$$
$$+ \rho_1 k_{z2} M1_0^* \sin(k_{z1} h_1)\cos[|k_{z3}|(z - h_2)]\} \quad (28)$$

이상 각 층별 변위포텐셜 차이에서 사용된 상수 D, $M1_0$, $M2_0$등은 $k_{z3} = |k_{z3}|$일 때의 $D(= MM^*)$, M_1, M_2 등을 각각 나타낸다.

3.3. 특성함수 $D(= MM^*)$ 계산

각 층에서의 변위포텐셜 차 ($R_3 = \Delta_3 G$)는 분모에 D항을 포함하고 있으며 전술한 바와 같이 $D \sim 0$인 파수에서 변위포텐셜 차는 상대적으로 최대값을 갖는다. 따라서 가상모드의 위치 및 선적분을 구하는 데 필요한 특성함수는 식 (11), (12)을 식 (10)에 대입하여 다음과 같이 구한다. 즉

$$D = MM^* = 4\rho_2^2 k_{z1}^2 M2_0 M2_0^* \cos^2(k_{z1} h_1)$$
$$+ 4\rho_1^2 k_{z2}^2 M1_0 M1_0^* \sin^2(k_{z1} h_1)$$
$$+ 4i\rho_1\rho_2 k_{z1} k_{z2}(M2_0 M1_0^* - M1_0 M2_0^*)$$
$$\cdot \cos(k_{z1} h_1)\sin(k_{z1} h_1)$$
$$= 4\rho_2 k_{z2}^2 \cos^2(k_{z2} h_{21})[\rho_3^2 k_{z1}^2 \cos^2(k_{z1} h_1)$$
$$+ \rho_1^2 |k_{z3}| 2\sin^2(k_{z1} h_1)]$$
$$+ 4\sin^2(k_{z2} h_{21})[\rho_2^4 k_{z1}^2 |k_{z3}|^2 \cos^2(k_{z1} h_1)$$
$$+ \rho_1^2 \rho_3^2 k_{z2}^4 \sin^2(k_{z1} h_1)]$$
$$- 4\rho_1\rho_2 k_{z1} k_{z2}(\rho_3^2 |k_{z2}|^2 - \rho_2^2 |k_{z3}|^2)$$
$$\cdot \sin(2k_{z2} h_{21})\cos(k_{z1} h_1)\sin(k_{z1} h_1)$$
$$(29)$$

IV. 산출된 수식의 검증

수식 검증은 모드산출관계식 검증과 전달손실 산출을 통한 음장비교 등 2가지로 구분하였다.

4.1. 불연속모드 k_{rm} 산출관계식 검증

음속간의 관계를 파수의 관계로 변환하여 $k_3 < k_2 < k_1$ 라 할 때 Tolstoy와 Clay에 의하면 정규 모드 생성조건은 다음과 같다[2,20].

첫째 $k_2 < k_r < k_1$ 범위에서

$$\cot(\gamma_1 h_1) = -\frac{g_2\rho_1 + \frac{g_2^2\rho_1\rho_3}{g_3\rho_2}\tanh(g_2 h_2)}{\frac{\gamma_1 g_2\rho_2\rho_3}{g_3\rho_2} + \gamma_1\rho_2\tanh(g_2 h_2)} \quad (30)$$

둘째 $k_3 < k_r < k_2$ 범위에서

$$\cot(\gamma_1 h_1) = -\frac{\gamma_2\rho_1 - \frac{\gamma_2^2\rho_1\rho_3}{g_3\rho_2}\tan(\gamma_2 h_2)}{\frac{\gamma_1\gamma_2\rho_2\rho_3}{g_3\rho_2} + \gamma_1\rho_2\tan(\gamma_2 h_2)} \quad (31)$$

여기에서 $g_2 \rightarrow k'_{z2}$, $g_3 \rightarrow k'_{z3}$, $g_2 \rightarrow k'_{z2}$, $g_3 \rightarrow k'_{z3}$, $h_2 \rightarrow h_2 - h_1$ 등과 같이 각 상수를 변환시키면 식 (13), (14)가 식 (30), (31)과 같음을 알 수 있으며 동일한 방법으로 식 (15), (16)의 검증이 가능하다. 따라서 본 논문에 사용된 불연속모드 생성조건은 Tolstoy와 Clay에 의해 산출된 정규모드 생성조건과 일치함을 알 수 있다.

4.2. 전달손실 산출을 통한 음장 비교검증

먼저 수층과 제1 퇴적층의 밀도 및 음속을 유사하게 선택하여 페커리스모델 및 크라켄씨모델의 계산결과와 본 논문의 3층모델의 계산결과를 그림 4와 같이 비교하였다. 페커리스모델에서의 계산은 Tindlel의 이론 식을 이용하였으며, 비교를 용이하게 하기 위해 +3.5dB를 임의로 조절하였다[8]. 그림 4에서 점선은 페커리스모델의 결과를, 굵은 실선은 3층모델의 결과를, 그리고 가는 실선은 크라켄씨모델의 결과를 각각 나타내며, 비교결과 3가지 모델이 동일한 결과를 보임을 알 수 있다. 사용된 각 층의 물리량은 다음과 같다. 단, 페커리스모델에서는 2번째 층(제1 퇴적층)을 생략하였다. ρ_1=100kg/m^3, c_1=1510m/s, ρ_2=1000kg/m^3, c_2=1511m/s, ρ_3=1990kg/m^3, c_3=1742m/s, h_1=69.5m, h_2=70m, f=50.3hz

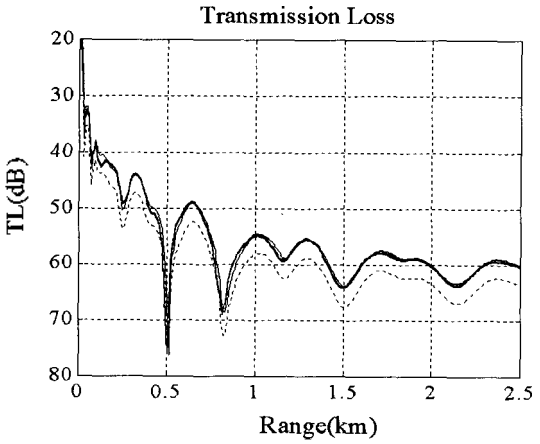


그림 4. 기존의 모델들 (페커리스, 크라켄씨)과의 비교
Fig. 4. Comparison with the other models (Pekeris, KrakenC model).

V. 가상모드의 특성

5.1. 수식을 통한 가상모드의 성격분석

가. 그레이징각에 따른 가상모드의 크기

가상모드가 생성되기 위해서는 그레이징각이 임계각 이상이어야 하므로 임계각과 경계면에 대하여 수직각 사이의 그레이징각에 대해서만 살펴보면 파수와 모드의 그레이징각 간의 관계는 다음과 같다.

$$k_{rm} = k_3\cos(\theta_{3m}) \quad (32)$$

$$k_{z3m} = (k_3^2 - k_{rm}^2)^{1/2} = k_3\sin(\theta_{3m}) \quad (33)$$

먼저 경계면에 대하여 직각에 가까이 입사할 경우, 즉 $\theta_{1m} \sim \theta_{3m} \sim \pi/2$인 모드는 $k_{rm} \sim 0$, $I_{3m} \sim 0$, $k_{z3m} \sim k_3$이 되기 때문에 식 (21), (23)의 가상모드 진폭이 극히 적어진다.

또한, 임계각 $\theta_{1c} = \cos^{-1}(\frac{c_1}{c_3})$에 가까이 입사할 경우 $\theta_{3m} \sim 0$이 되므로 $k_{rm} \sim k_3$, $k_{z3m} \sim 0$이 되어 $I_{3m} \sim \exp(\frac{-rk_{z3m}}{|k_{rm}|}) \sim 1$ 이 되기 때문에 가상모드의 진폭은 식 (25)의 R_{3m}에 의해 결정된다. 그림 5는 가상모드의 위치와 진폭 R_{3m}의 값 중 1/D 간의 관계를 그린 것으로서 가상모드의 파수 k_{rm}이 k_3에서부터 멀어져 0에 가까울수록 진폭이 적고, k_3에 가까울수록 진폭이 급격하게 증가함을 알 수 있다.

따라서 전체음장에 대한 가상모드의 영향은 파수가 k_3에 근접할수록 다시 말하면, 임계각 θ_{1c}에 근접할수록 증가함을 알 수 있다

나. 거리에 따른 가상모드의 변화

앞의 식 (21), (22)에서 보인 것처럼 파수가 실수축상에 있는

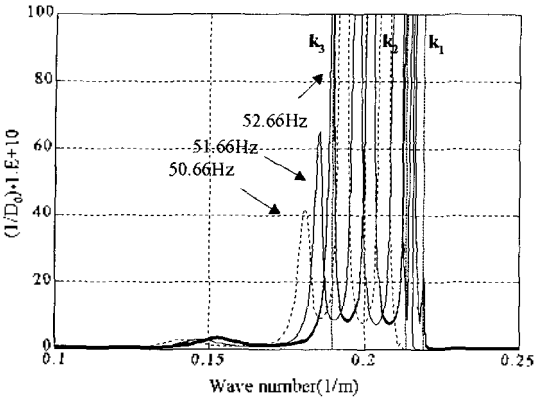


그림 5. 주파수에 따른 가상모드의 최대파수 위치 및 진폭(1/D) 변화
Fig. 5. The variation of max. wavenumber position and amplitude(1/D) of virtual mode vs frequency.

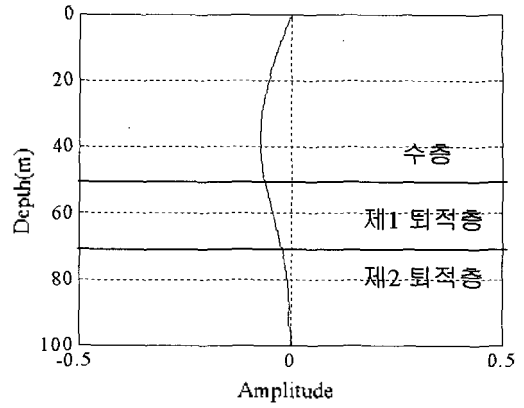
가상모드의 진폭은 불연속모드의 진폭에 $\exp(-rk_{z3m}/k_{rm})$ 이라는 거리함수가 첨가되며, 허수축에 근접한 가상모드는 실수축상의 그것에 비해 $1/r$만큼의 추가적인 감쇠를 받기 때문에 불연속모드에 비해 거리 증가에 따른 감쇠가 크다. 따라서 가상모드가 전체음장에 주는 영향을 살펴보기 위하여 실수축상에 파수를 갖는 가상모드를 대상으로 진폭이 $\exp(-1)$로 되는 거리를 r_0라고 하고 식 (32), (33) 을 대입한 후 스넬 법칙 (Snell's law)을 적용하여 그레이징각과 r_0간의 관계는 다음과 같음을 알 수 있다.

$$
\begin{aligned}
r_0 &= \frac{k_{rm}}{k_{z3m}} \\
&= \frac{\cos(\theta_{3m})}{\sin(\theta_{3m})} = \frac{\cos(\theta_{1m})}{\sqrt{(c_1/c_3)^2 - \cos^2(\theta_{1m})}} \\
&= \frac{\cos(\theta_{1m})}{\sqrt{\cos^2(\theta_{1c}) - \cos^2(\theta_{1m})}} \qquad (34)
\end{aligned}
$$

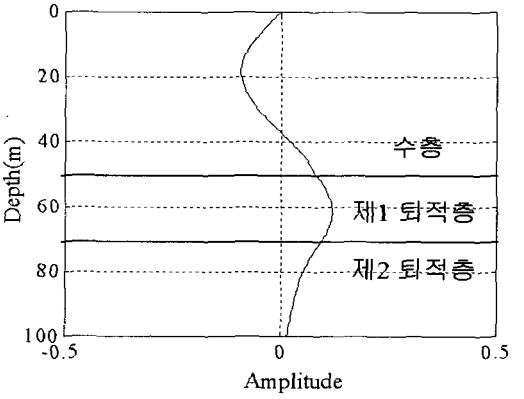
위의 식으로부터 가상모드의 거리에 따른 감쇠는 음속의 비와 모드의 그레이징각 θ_{1m}에 따라 결정됨을 알 수 있다. 또한, 모드의 그레이징각이 임계각 θ_{1c}에 근접할 경우, 식 (34)의 분모가 0에 근접하므로 $r_0 \sim \infty$이 되어 한켈 (Hankel)함수 이외에는 거리에 따른 감쇠가 없는 이상적인 조건하에서는 음원으로부터 먼 거리까지도 불연속모드처럼 전달 가능함을 알 수 있다.

5.2. 시뮬레이션을 통한 가상모드의 특성분석

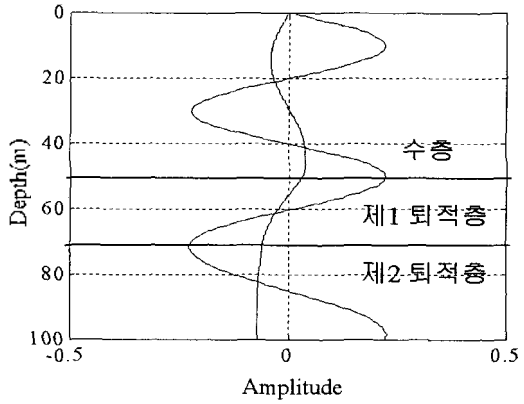
전술한 바와 같이 각 모드는 파수평면상에서 불연속모드와 가상모드로 구분되며 불연속모드는 수층과 제1 퇴적층의 음속에 의한 파수 크기에 따라서 다시 2개의 영역으로 구분될 수 있다. 그림 6은 $k_3 < k_2 < k_1$의 경우, 파수의 영역별로 각 모드의 수심에 따른 음압분포를 그린 것으로서, 그림 6a, b는 수층 및 제1 퇴적층내의 불연속모드를, 6c는 가상모드를 각각 나타낸다.



a. $k_2 < Re(k_{rm}) < k_1$ (불연속모드)



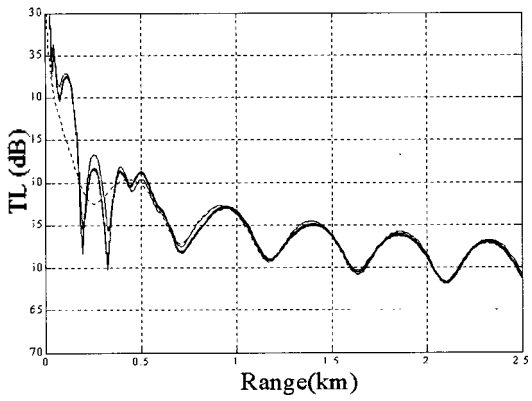
b. $k_3 < Re(k_{rm}) < k_2$ (불연속모드)



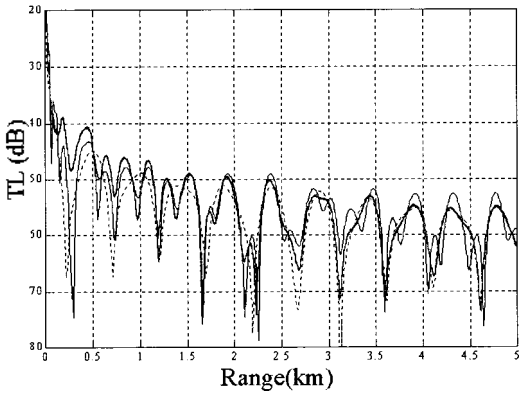
c. $0 < Re(k_{rm}) < k_3$ (가상모드)

그림 6. 영역별 모드의 수심에 따른 음압분포 (f=50.3hz)
Fig. 6. Depth distribution of acoustic pressure for the modes in each wavenumber region (f=50.3hz).

그림 7은 전항 "1.의 나. 거리에 따른 가상모드의 변화"에서 언급한 바와 같이 모드의 그레이징각이 임계각 θ_{1c}



a. 불연속모드가 2개인 경우 (f = 52.665hz)



b. 불연속모드가 3개인 경우 (f = 76.2hz)

그림 7. 최대파수의 가상모드가 불연속모드로 전환되기 전후의 전달손실비교

Fig. 7. Comparison of the transmission loss before the transfer of the max. wavenumber virtual mode to a discrete mode with that after.

에 근접한 경우 가상모드가 전체음장에 영향을 미치는 범위를 보기 위한 것으로서 그레이징각이 임계각 가까이 접근하는 효과를 얻기 위해 주파수를 증가시켰는데, 이때 주파수 증가에 따라 함께 증가하는 파수가 k_3보다 크면 가상모드가 불연속모드로 전환되기도 한다. 그림 7a에서 점선은 불연속모드로 전환되기 직전 (52.665hz)의 불연속모드만을, 굵은 실선은 가상모드를 포함한 전체모드를, 그리고 가는 실선은 불연속모드로 전환된 직후 (53hz)의 전체모드를 대상으로 한 것이며, 그림 7b는 불연속모드의 개수를 증가시킬 경우의 가상모드의 영향을 보기 위하여 주파수를 76.2hz, 77.2hz 등으로 증가시킨 상태에서 위와 동일한 비교를 한 것이다.

비교결과 불연속모드로 전환되기 직전 불연속모드만의 전달손실 (점선)은 가상모드를 포함한 전달손실 (굵은 실선)과 근거리에서 차이를 보이나 거리가 증가함에 따라 가상모드를 포함한 곡선 (굵은 실선)에 수렴하고 있다. 일반적으로 불연속모드의 개수가 증가할수록 전체음장에 미치는 가상모드의 영향이 감소하나 그림 7b의 경우에는 불연속모드의 진폭이 작은 수심에 송수신센서가 놓여 있었기 때문에 그림 7a와는 달리 가상모드의 영향이 2.5km에서도 보이고 있다. 따라서 해양환경 뿐 아니라 송수신센서 설치위치에 따라 가상모드의 영향권이 변화하는 것을 알 수 있다. 여기에서 사용된 각 층의 물리량은 다음과 같다. ρ_1=1000kg/m^3, c_1=1510m/s, ρ_2=1653kg/m^3, c_2 =1548m/s, ρ_3=1990kg/m^3, c_3=1742m/s, h_1=50m, h_2=70m.

VI. 결 론

2개의 퇴적층으로 구성된 3층모델의 불연속모드 생성조건은 파라메터 변환을 할 경우 Tolstoy와 Clay의 정규모드 생성조건과 일치하였으며 시뮬레이션을 수행한 결과 크라켄씨 및 페커리스모델의 결과와도 일치함을 보였다. 따라서 본 논문에서 제시된 3층 유체 (Fluid-Fluid-Fluid)모델은 페커리스모델과 비교할 때 퇴적층 및 표층도파관의 영향을 고려할 수 있다고 판단된다. 특히 유도된 수식 및 시뮬레이션의 수행 결과로부터 가상모드와 불연속모드간의 상대적인 크기를 통해 다음과 같은 것을 알 수 있다.

첫째: 진폭에 $\exp(-rk_{z3m}/k_{rm})$항을 갖는 가상모드는 불연속모드보다 큰 손실을 보여 근거리에 주로 영향을 미치는 것은 사실이나 경우에 따라서는 음원으로부터 수 km 까지 영향을 미칠 수도 있다.

둘째: 최대파수에 해당하는 가상모드는 파수가 분지점 k_3를 넘어서는 순간 불연속모드로 전환되며, 전체음장에 미치는 가상모드의 영향은 급격히 줄어든다. 따라서 가상모드의 수는 허수축에 근접한 곳의 모드까지 포함할 경우 다수가 있을 수 있으나 파수값이 가장 큰 모드 주위의 소수만이 주로 영향을 미친다.

셋째: 3층모델에서는 분지절단 적분 시 제2 퇴적층의 파수 k_3를 분기점으로 하는 경로만이 음압 계산에 영향을 미친다.

이상은 3층모델의 불연속모드 및 가상모드 산출을 위해 구성된 3층 유체모델의 수식전개와 전체음장에 미치는 가상모드의 영향에 대해 논하였으며 향후 실제적인 전달환경 하에서의 가상모드 영향을 분석할 계획이다.

참 고 문 헌

1. C. S. Pekeris, "Theory of propagation of explosive sound in shallow water," Geol. Soc. Am., Mem., **27**, pp. 1-117, 1948.
2. I. Tolstoy,"Shallow water Test of the Theory of Layered Wave Guides," J. Acoust. Soc. Am. **30**(4), pp. 348-361, 1958.
3. K. E. Hawker, "Influence of Stoneley waves on plane-wave reflection coefficients : characteristics of bottom reflection loss," J. Acoust. Soc. Am. **64**(2), pp. 548-555, 1978.
4. P. J. Vidmar, "The effect of sediment rigidity on bottom reflection loss in typical deep sea sediments," J. Acoust. Soc. Am. **68**(2), pp. 634-638, 1980.
5. D. Tollefsen, "Thin-sediment shear-induced effects on low-frequency broadband acoustic propagation in a shallow continental sea," J. Acoust. Soc. Am. **104**(5), pp. 2718-2725, 1998.
6. F. Ingenito, R. H. Ferris, W. A. Kuperman, and S. N. Wolf, "Shallow water acoustics: Summary report (first phase)," NRL Rep. No. 8179, March, 1978.
7. F. M. Labianca, "Normal modes, virtual modes and alternative representations in the theory of surface-duct sound propagation," J. Acoust. Soc. Am. **53**(4), pp. 1137-1147, 1973.
8. C. T. Tindle, A. P. Stamp, and K. M. Guthrie, "Virtual mode and the surface boundary condition in underwater acoustic s," J. Sound Vib., **49**(2), pp. 231-240, 1976.
9. C. L. Bartberger, "Comparison of two normal-mode solutions based on different branch-cuts," J. Acoust. Soc. Am. **61**(6), pp. 1643, 1977.
10. A. O. Williams, "Pseudo resonances and virtual modes in underwater sound propagation," J. Acoust. Soc. Am. **64**(5), pp. 1487-1491, 1978.
11. D. C. Stickler, "Normal mode program with both the discrete and branch line contributions," J. Acoust. Soc. Am. **57**(4), pp. 856-861, 1975.
12. C. A. Boyles, "Acoustic Waveguides, John Wiley & Sons," , pp. 163-177, 1984.
13. J. A. DeSanto, Ocean Acoustics, Springer-Verlag, pp. 92-101, 1978.
14. D. C. Stickler, E. Ammicht, "Uniform asymptotic evaluation of the continuous spectrum contribution for the Pekeris model," J. Acoust. Soc. Am. **67**(6), pp. 2018-2024, 1980.
15. 김성부, 김상한, "천해에서 가상모드가 포함된 음파전달에 관한 모형실험," 한국음향학회지, **16**(8), pp. 68-73, 1997.
16. F. R. Dinapoli, "Fast field program for multi-layered media," NUSC Rep. No. 4103, Aug., 1971.
17. M. B. Porter, "The Kraken normal mode program," Naval Research Laboratory, AD-A252 409, May, 1992.
18. K. E. Hawker, "The existence of Stoneley waves as a loss mechanism in plane-wave reflection problems ," J. Acoust. Soc. Am. **65**(3), pp. 682-686, 1979.
19. J. A. DeSanto, Scalar Wave Theory, Springer-Verlag, 1991.
20. I. Tolstoy, C. S. Clay, Ocean Acoustics, McGraw-Hill, pp. 124-126, 1966.
21. F. B. Jensen, W. A. Kuperman, M. B. Porter, H. Schmidt, Computational Ocean Acoustics, American Institute of Physics, 1994.
22. M. K. Macpherson, G. V. Frisk, "The contribution of normal modes in the bottom to the acoustic field in the ocean," J. Acoust. Soc. Am. **68**(3), pp. 929-940, 1980.

※약어설명

EJP : Ewing, Jardetzky and Press

$Res[G(k_m, z)]$: (k_m, z)에서 G의 residue

저자 약력

● 김 영 선 (Young-Sun Kim)

1952년 9월 8일생
1980년 2월: 서강대학교 물리학과 졸업 (이학학사)
1982년 6월: 서강대학교 대학원 물리학과 졸업 (이학석사)
1981년 9월~현재: 국방과학 연구소 선임 연구원
※ 주관심분야: 수중음향

● 김 성 부 (Sung-Boo Kim)

현재: 부경대학교 물리학과 재직중
한국음향학회지 제15권2호 참조
※ 주관심분야: 수중음향