

층이 있는 반무한체의 접촉하중에 의한 응력을 푸리에 적분을 이용한 해석

안유민[†] · 박상신*

한양대학교 기계공학과
*영남대학교 기계공학부

Stress Analysis of a Layered Semi-infinite Solid Subjected to Contact Loading Using a Fourier Integral

Yoomin Ahn[†] and Sang-Shin Park*

Department of Mechanical Engineering, Hanyang University
*School of Mechanical Engineering, Yeungnam University

Abstract – The problem of interest is formulating elastic contact problem of a layered semi-infinite solid in terms of Fourier integral. The plane strain problem is considered for a solid composed of homogeneous isotropic two layers with different mechanical properties. General solutions for the subsurface stress and deformation field of frictionless elastic bodies under normal loading using of Fourier transformation technique are obtained. The numerical results for the stress distribution of coated solid for some particular cases are given.

Key words – layered semi-infinite solid, elastic contact stress, fourier integral.

1. 서 론

층이 있는 고체에 대한 접촉응력을 해석하는 문제는 트라이볼로지나 재료역학적 측면에서 관심 있게 연구되고 있는 과제 중에 하나이다. 특히 금속 모재에 세라믹이 코팅된 소재에 대한 마찰 및 마멸학적인 이해를 높이기 위해서 다양한 연구가 이루어지고 있다. 실험적 연구로서는 코팅층에 구 형상의 압자를 접촉시켜 코팅층과 모재에서의 변형 형상과 결합부의 파괴 유무 등을 관찰하였다[1-2]. 해석적 연구들로서는 대부분 수학적 해석법보다는 유한요소법에 의한 수치해법을 이용하고 있다. 탄성학적 혹은 탄성 및 소성역학적 수치해법에 의해 구 형상의 압자가 코팅층 표면에 접촉됨에 따라 코팅층과 모재 내에 형성되는 응력분포 및 변형률을 구하였다[1-5].

탄성역학적 해를 근사적으로 구하는 방법 중에 푸리에

에 급수 및 적분을 이용하는 방법이 있다[6]. 이 논문에서는 푸리에 적분법을 층이 있는 고체의 평면변형을 탄성 접촉역학 문제에 적용해 보고자 한다. 마찰이 없는 고체 표면에 헤르츠 접촉하중과 같은 임의의 수직 하중이 가해질 경우에 접촉 표면 아래 표면층과 모재 내에 형성되는 응력 및 변위를 푸리에 적분 형태로 구해보고자 한다. 해석결과를 대표적인 코팅재료에 적용하여 코팅층과 모재층의 기계적 물성치 및 코팅층 두께 변화 등에 따른 재료 내의 접촉응력 분포와 예상되는 변형거동을 고찰해 보고자 한다.

2. 이론 해석

Fig. 1에 도시된 것과 같이 층이 있는 반무한체의 평면변형을 경우를 고려하고자 한다. 반무한체는 표면층과 모재의 두 개의 층으로 구성되어 있으며 각 층을 이루고 있는 소재의 기계적 물성치는 서로 다르다. 각 층의 매질들은 등방성이며 재료 내에서의 기계적 특성

[†]주저자(책임저자): ahnym@hanyang.ac.kr

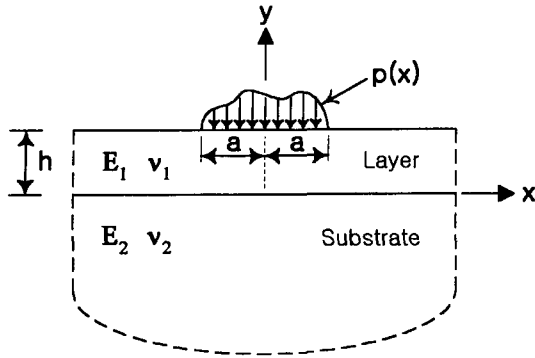


Fig. 1. Notation for a layered semi-infinite solid.

은 균일하다고 가정한다. 층 두께가 h 인 표면층에 다음과 같은 수직하중 P 만 작용하며 마찰력은 없다.

$$\begin{aligned} P &= p(x) \quad (-a < x < a), \\ P &= 0 \quad (x < -a, a < x) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $p(x)$ 는 임의의 하중 분포 함수이다. 평면변형을 경우의 평형방정식들은 다음과 같으며,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)에서 응력성분 대신에 훅의 법칙과 변위와 변형률의 관계식을 이용하여 구해진 변위로 치환하면, x 축과 y 축 방향으로의 각각 변위인 u 와 v 에 관한 다음의 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] \frac{1}{1-2\nu} &= 0, \\ \nabla^2 v + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] \frac{1}{1-2\nu} &= 0, \quad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 ν 는 포와송 비이다. u 와 v 를 다음과 같은 형태로 가정하고,

$$\begin{aligned} u &= A(y)e^{ikx} \\ v &= B(y)e^{ikx}, \quad (-\infty < k < \infty) \end{aligned} \quad (4)$$

식 (3)에 대입하면, 식 (4)의 형태를 가진 u 와 v 가 식 (3)의 관계식들을 만족하기 위한 다음의 조건들을 얻을 수가 있다.

$$A(y) = A_1 e^{ky} + A_2 e^{-ky} + A_3 k y e^{ky} + A_4 k y e^{-ky},$$

$$\begin{aligned} B(y) &= i[-A_1 e^{ky} + A_2 e^{-ky} + A_3 \{(3-4\nu) - ky\} e^{ky} \\ &\quad + A_4 \{(3-4\nu) + ky\} e^{-ky}] \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 A_i 는 상수이다. 식 (4)와 식 (5)를 이용하면 표면층에서의 변위 u_1 과 v_1 는 다음과 같이 푸리에 적분 형태로 구할 수가 있다.

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} [A_1 e^{ky} + A_2 e^{-ky} + A_3 k y e^{ky} + A_4 k y e^{-ky}] e^{ikx} dk, \\ v_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} i[-A_1 e^{ky} + A_2 e^{-ky} + A_3 \{(3-4\nu_1) - ky\} e^{ky} \\ &\quad + A_4 \{(3-4\nu_1) + ky\} e^{-ky}] e^{ikx} dk \end{aligned} \quad (6)$$

접촉하중이 작용하는 표면으로부터 멀리 떨어질수록 반무한체 내에 형성되는 변위와 응력의 크기는 매우 작아져야 될 것이다 ($u, v \rightarrow 0$, as $y \rightarrow \infty$). 이와 같은 조건을 표면층 아래에 존재하는 모재에 적용하면, 모재에서의 변위 u_2 와 v_2 는 식 (6)에서 다음과 같이 변형시켜 구할 수가 있다.

$$\begin{aligned} u_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} [A_5 e^{kly} + A_6 k y e^{kly}] e^{ikx} dx, \\ v_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} i[-A_5 \text{sgn}(k) e^{kly} + A_6 \{(3-4\nu_2) - |k|y\} e^{kly}] e^{ikx} dk \end{aligned} \quad (7)$$

이와 같이 구해진 변위 u 와 v 을 변위와 변형률의 관계식과 훅의 법칙에 적용하면 수직 및 전단 응력들을 표면층(σ_1, τ_1)과 모재(σ_2, τ_2)에 대해서 다음과 같이 구할 수가 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{x,1} &= \frac{E_1}{1+\nu_1} \int_{-\infty}^{\infty} k i [A_1 e^{ky} + A_2 e^{-ky} + A_3 \{2\nu_1 + ky\} e^{ky} \\ &\quad - A_4 \{2\nu_1 - ky\} e^{-ky}] e^{ikx} dk, \\ \sigma_{y,1} &= \frac{-E_1}{1+\nu_1} \int_{-\infty}^{\infty} k i [A_1 e^{ky} + A_2 e^{-ky} - A_3 \{2-2\nu_1 - ky\} e^{ky} \\ &\quad + A_4 \{2-2\nu_1 + ky\} e^{-ky}] e^{ikx} dk, \\ \tau_{xy,1} &= \frac{E_1}{1+\nu_1} \int_{-\infty}^{\infty} k [A_1 e^{ky} - A_2 e^{-ky} - A_3 \{1-2\nu_1 - ky\} e^{ky} \\ &\quad - A_4 \{1-2\nu_1 + ky\} e^{-ky}] e^{ikx} dk, \\ \sigma_{x,2} &= \frac{E_2}{1+\nu_2} \int_{-\infty}^{\infty} k i [A_5 e^{kly} + A_6 \{2\nu_2 \text{sgn}(k) + ky\} e^{kly}] e^{ikx} dk \\ \sigma_{y,2} &= \frac{-E_2}{1+\nu_2} \int_{-\infty}^{\infty} k i [A_5 e^{kly} - A_6 \{(2-2\nu_2) \text{sgn}(k) - ky\} e^{kly}] e^{ikx} dk \end{aligned}$$

$$\tau_{xy,2} = \frac{E_2}{1+\nu_2} \int_{-\infty}^{\infty} k[A_5 \operatorname{sgn}(k)e^{ky} - A_6\{1-2\nu_2-|k|y\}e^{ky}]e^{ikx} dk \quad (8)$$

여기서 E 는 탄성계수이며 하첨자 1과 2는 각각 표면층과 모재를 나타낸다. 식 (6),(7)과 식 (8)은 각각 변위와 응력에 관한 일반해가 된다. 특정한 하중조건에 대한 변위와 응력에 관한 해를 구하기 위해서는 상수 $A_i, (i=1\sim 6)$ 의 값을 구하여야 한다. 상수의 개수가 6개이므로 6개의 경계조건이 필요하다. 표면층의 자유 표면($y=h$)에서는 다음의 경계조건이 성립한다.

$$\begin{aligned} \sigma_{y,1}(x, h) &= -p(x), \\ \tau_{xy,1}(x, h) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

그리고 표면층과 모재 사이의 경계면($y=0$)에서의 결합이 이상적으로 유지된다면 다음과 같이 변위와 응력 성분들의 연속성이 만족되어야 한다.

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= u_2(x, 0), \\ v_1(x, 0) &= v_2(x, 0), \\ \sigma_{y,1}(x, 0) &= \sigma_{y,2}(x, 0), \\ \tau_{xy,1}(x, 0) &= \tau_{xy,2}(x, 0), \end{aligned} \quad (10)$$

이상과 같은 6개의 경계조건을 이용하면 6개의 미지수 A_i 를 구할 수가 있다. 식 (6),(7)과 식 (8)을 식 (9)와 식 (10)에 대입하고 푸리에 역변환을 취하면 다음과 같은 형태를 가진 A_i 의 해가 얻어지게 된다.

$$A_i = \frac{(F_{i1}e^{hk} + F_{i2}e^{-hk}) \int_{-a}^a p(s)e^{-iks} ds}{2\pi i (F_{i3}e^{2hk} + F_{i4} + F_{i5}e^{-2hk})k}, (i=1\sim 6) \quad (11)$$

여기서 $F_j (j=1\sim 5)$ 는 y 와 k 의 함수로서 해당되는 소재 층의 기계적 물성치(E, ν)와 표면층 두께(h)에 따라 그 크기가 결정된다.

3. 결과 및 고찰

푸리에 적분 형태로 표현된 응력 및 변위를 다음과 같은 헤르츠 접촉하중의 경우에 대해서 구하여 보았다.

$$p(x) = p_0 \sqrt{1 - (x/a)^2}, (-a < x < a) \quad (12)$$

코팅된 절삭공구를 해석 대상으로 하였다. 초경합금(WC) 모재상에 내마멸성이 높은 TiC를 수 μm 두께로 피복한 코팅팁이 절삭공구로서 실용화되어 산업현장에서 사용되고 있다. 코팅팁은 단단하고 취성인 모재위에 경도가 높은 취성 소재가 코팅된 경우와 할 수

Table 1. Mechanical properties of selected materials

Material	Young's modulus (GPa)	Poisson's ratio	Yield Strength (MPa)	Bending Fracture Strength (MPa)
TiC	410	0.24	5900	860
WC	520	0.24	4100	700
Steel	200	0.30	200	-

있다. 그리고 비교 분석을 위해서 대표적 코팅재료의 형태인 연성이 좋은 Steel을 모재로 하는 경우에 대해서도 해석하여 보았다. 해석에 사용된 소재들의 물성치는 Table 1과 같다.

수치해법을 이용한 적분을 수행하여 각각의 응력 및 변위를 구하였다. 계산 과정에서 모든 응력들은 수직 하중 분포의 최대값인 p_0 에 대한 비로 무차원화하여 구하였으며, 변위 u 와 v 도 각각 접촉 부위 반쪽 길이 a 와 코팅층 두께 h 에 대한 비로 무차원화하였다. Fig. 2는 접촉 중심($x/a=0$) 아래 방향과 접촉 경계점($x/a=1$) 아래 방향으로의 응력분포를 나타내고 있다. Fig. 2(a)에서, 응력 σ_x 의 경우에 코팅층과 모재 사이의 접합면

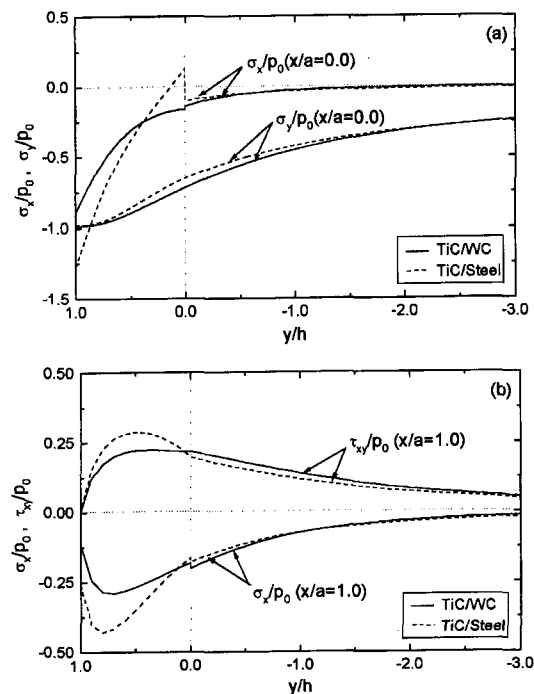


Fig. 2. Variation of the stresses as a function of depth ($h/a=1.0$).

에서 불연속이다. 특히 Steel이 모재인 경우 접촉 중심 아래 접합면에서 그 차이가 매우 크며, 코팅층에서는 인장응력이 모재에서는 압축응력이 형성되고 있다. 그리고 코팅층 내에서도 접촉 표면에서는 압축응력이지만 접합면 쪽에서는 인장응력으로 변화되고 있다. 이와 같은 응력분포에서는 코팅층에 굽힘모멘트가 형성되며 접합면이 박리 될 수 있다. WC가 모재인 경우에는 인장응력이 발생하지 않으며 접촉표면과 접합면 사이의 응력 변화 정도나 접합면 응력에서의 불연속 정도도 작은 편이다. 두 모재 소재에 대해서 응력 σ_x 인 경우에는 불연속도 없이 응력 변화가 작으며 압축 응력만 형성된다. Fig. 2(b)에서, 접촉 경계점 아래에서는 접촉 중심 아래의 경우에 비해 응력 σ_x 의 전체적 크기 및 변화 정도가 작으며 불연속 양도 작다. Steel 모재의 경우에도 압축응력만 형성되며, WC가 모재인 경우가 역시 응력 변화가 작다. 접촉 중심 아래에서는 발생되지 않던 전단응력 τ_{xy} 가 접촉 경계점 아래에서는 수직응력에 비교할 만한 크기를 가지고 있다. 이와 같은 전단응력에 의해 코팅층 내의 크랙이 커질 수 있으며, 접합면에서는 접합면과 평행한 미소 크랙이 발생될 수 있다. 접합면에서의 전단응력의 크기가 접합력에

에 영향을 미치는 중요한 인자라고 할 수 있다. WC가 모재일 때에 코팅층 내의 전단응력의 크기가 보다 작게 형성되고 있다.

Fig. 3은 코팅층과 모재와의 접합면을 따라 형성되는 응력들의 분포를 보여주고 있다. 응력 σ_x 는 코팅층($\sigma_{x,1}$)과 모재($\sigma_{x,2}$)에서 각각 다른 크기를 가지게 된다. Fig. 3(a)에서, WC가 모재일 때가 Steel이 모재인 경우에 비해 두 응력 사이의 크기 차이가 작으며 압축 응력만 형성된다. Steel이 모재인 경우 최대 인장력은 접촉 중심 아래의 코팅층 접합면에서 발생된다. 이 응력에 의해 접합면에 수직인 미소 크랙이 발생될 수 있다. 두 모재 경우 모두에서 접촉 경계점 인근 바깥 지점아래 접촉면에서 최대 압축응력이 형성되고 있다. Fig. 3(b)에서 보면, 응력 σ_y 는 일반적으로 접촉 중심 아래에서 최대 압축응력이 되고 접촉 부위에서 멀어질수록 그 크기가 작아진다. 접합면을 박리시킬 수 있는 전단응력의 최대점은 접촉 경계점 부근 아래에서 발생된다. 접촉 부위 아래와 접합면을 따라 형성되는 변위들의 분포는 Fig. 4와 같다. WC가 모재인 경우가 Steel이 모재인 경우에 비해 전체적으로 그 크기가 작으며 코팅층과 모재에서의 크기 변화도 작은 편이다.

코팅층의 내구성에 영향을 미치는 인자들로서는 코

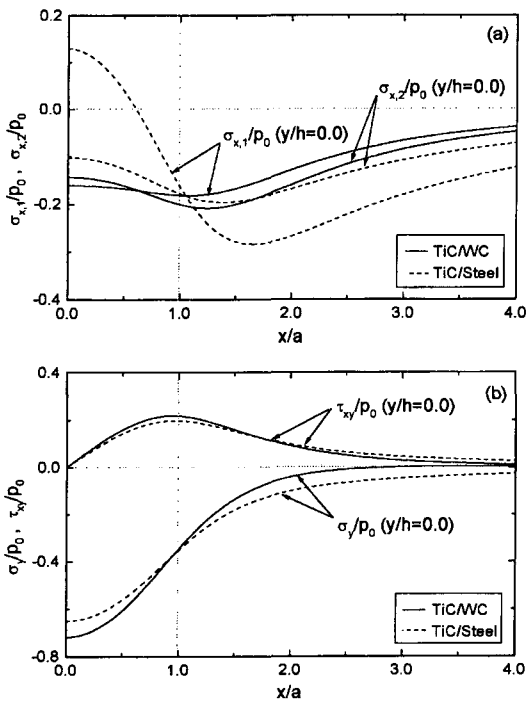


Fig. 3. Variation of the stresses at the layer-substrate interface ($h/a=1.0$).

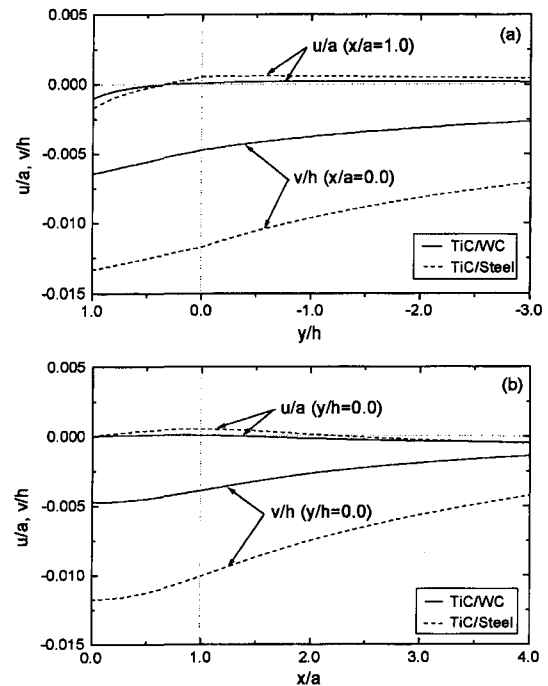


Fig. 4. Elastic displacement distributions ($h/a=1.0$).

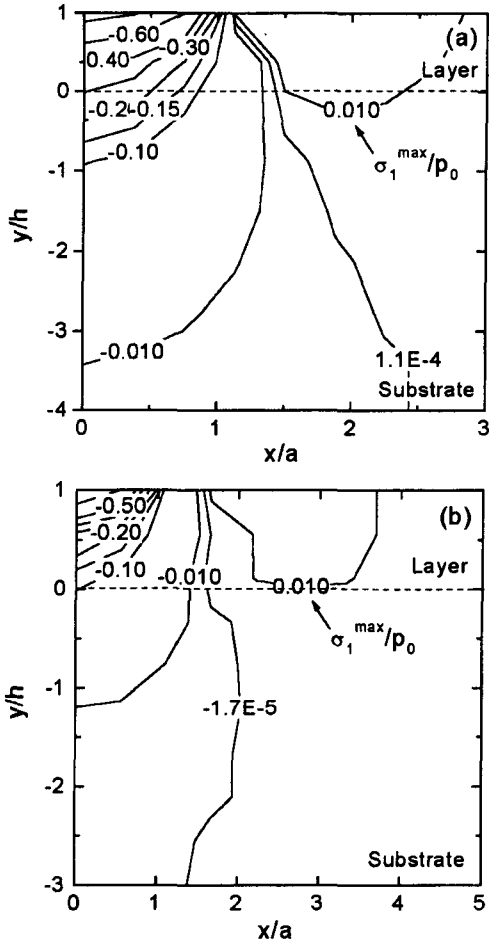


Fig. 5. Maximum principal stress contours for TiC/WC system. (a) $h/a=0.6$, (b) $h/a=1.25$.

팅층 내의 미소 크랙 발생과 접합면의 바리, 그리고 소성변형 등이 있다. 이와 같은 인자들의 발생 유무를 예측하기 위해서 최대 주응력 (σ^{max}) 과 최대 전단응력 (τ^{max}) 의 등고선도를 코팅층 두께가 다른 두 경우에 대해서 구하여 보았다. Fig. 5는 WC가 모재일 때에 최대 주응력의 분포를 보여주고 있다. 크랙 발생의 주 원인으로 여겨지는 인장응력이 접촉 경계점 바로 바깥 부위에서 발생되고 있다. 큰 하중이 작용할 때에는 이 지점에서 크랙이 발생될 수 있다고 예측되며 코팅되지 않은 취성소재 경우에 Cone 크랙이 발생하는 지점과 거의 일치한다. 코팅층 두께가 얇은 경우(Fig. 5(a))에는 인장응력 분포가 모재까지 형성되지만 코팅층 두께가 두꺼운 경우(Fig. 5(b))에는 코팅층에서만 인장응력이 형성되어 모재 내의 크랙 발생이 억제되리라 여겨

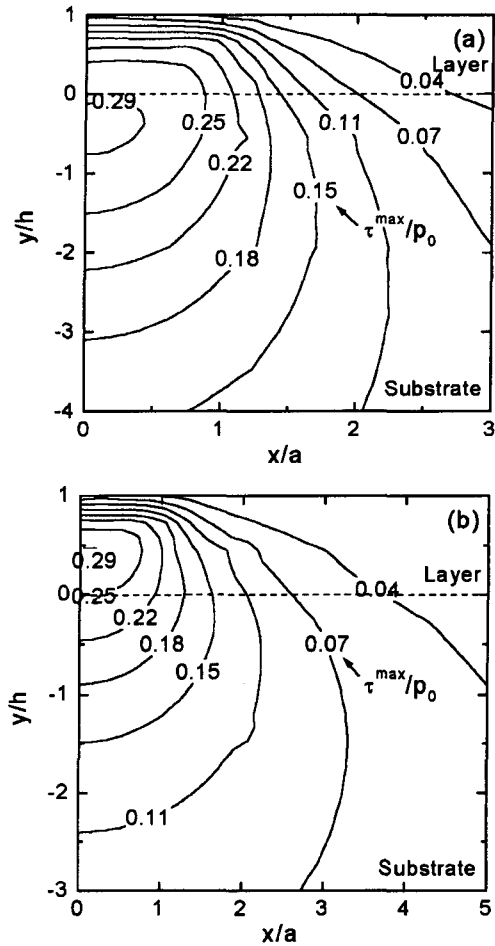


Fig. 6. Maximum shear stress contours for TiC/WC system. (a) $h/a=0.6$, (b) $h/a=1.25$.

진다. 소성변형을 일으키는 최대 전단응력의 분포를 Fig. 6에서 살펴보면 응력의 최대가 접촉 중심 아래 지점에서 발생하며 코팅층 두께가 얇아질수록 그 발생 지점이 모재 쪽으로 내려가고 있다. 따라서 코팅층이 충분히 크지 못한 경우에는 모재에서 소성변형이 발생될 수 있다.

Fig. 7에서 모재가 Steel일 때를 보면 최대 주응력이 접촉 경계점 바로 바깥 지점에서 역시 인장응력이 된다. 그리고 코팅층의 두께가 두꺼운 경우(Fig. 7(b))에는 접촉 중심 아래 접합면 근처에서도 인장응력이 형성되고 있다. 따라서 접촉 표면에서만 아니라 접합면 근처에서도 크랙이 발생될 수 있다. Fig. 8에서 보면 최대 전단응력의 최대가 접촉 중심 아래 접합면 부근에서 발생된다. Steel 모재의 항복강도가 TiC 코팅재

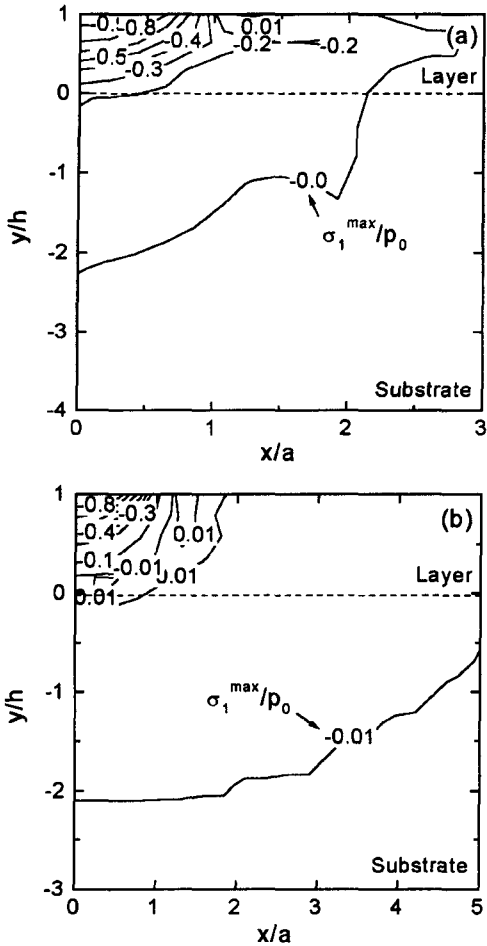


Fig. 7. Maximum principal stress contours for TiC/Steel system. (a) $h/a=0.6$, (b) $h/a=1.25$.

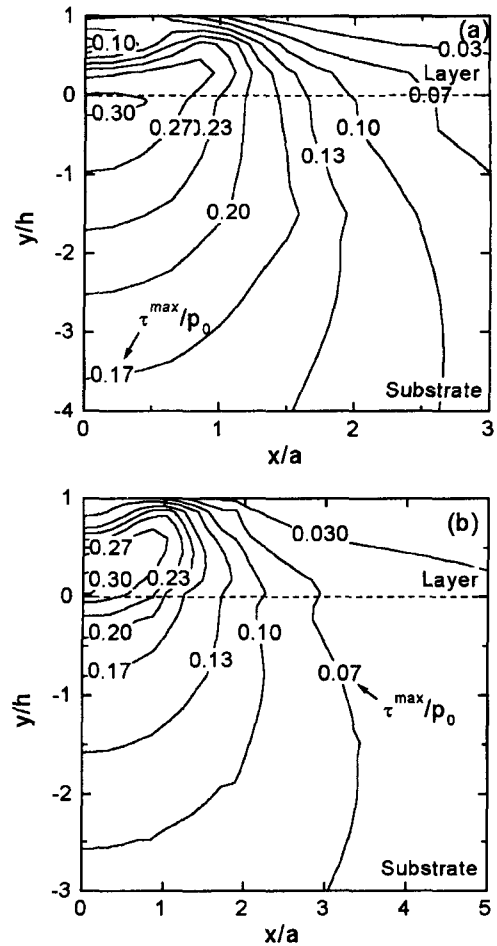


Fig. 8. Maximum shear stress contours for TiC/Steel system. (a) $h/a=0.6$, (b) $h/a=1.25$.

의 항복강도보다 매우 작으므로 소성변형이 주로 모재 측 접합면 부위에서 발생될 것이다. 코팅층의 두께가 두꺼울수록 전체적으로 모재에 형성되는 최대 주응력 및 전단응력의 크기가 감소되므로 두꺼운 코팅층이 바람직하다고 할 수 있다.

4. 결 론

평면변형률 조건에서 층이 진 반무한체 표면에 수직 하중이 작용할 때에 형성되는 변위들을 일반적인 푸리에 적분 형태로 근사화하였고, 그 결과를 변위와 변형률의 관계식과 후의 법칙에 적용하여 응력을 구하였다. 주어진 경계조건들을 이용하여 일반적 푸리에 적분 표현식의 상수들을 구하였다. 이렇게 구해진 해석

모델을 이용하여 WC와 Steel 모재 위에 TiC 코팅된 소재의 헤르츠 접촉하중 하의 접촉거동을 해석하였으며, 그 결과는 다음과 같다.

1. 모재가 Steel일 때보다 WC일 때에 응력들의 소재 내 크기 변화가 작은 편이다. 응력 중에서 σ_x 만 접합면에서 불연속이며 Steel이 모재일 때 코팅층 접합면에서 인장응력이 된다.
2. 모재가 Steel일 때에는 접촉 표면과 접합면에서 크랙이 발생할 수 있으며 모재가 WC일 때에는 접촉 표면에서만 발생할 수 있다.
3. Steel이 모재인 경우에는 소성변형이 모재 쪽 접합면 부근에서만 발생하지만 WC가 모재인 경우에는 두께가 충분히 두꺼운 경우에 코팅층에서도 소성변형이 발생할 수 있다.

감사의 글

이 논문은 2001년 한양대학교 교내연구비 지원으로 연구 되었으며, 이 논문의 이론적 해석에 관하여 많은 조언을 주신 Purdue University의 T.N. Farris 교수께 감사사를 드립니다.

참고문헌

1. Fischer-Cripps, A.C., Lawn, B.R. Pajares, A., and Wei, L., "Stress Analysis of Elastic-Plastic Contact Damage in Ceramic Coatings on Metal Substrates," *J. Am. Ceram. Soc.*, Vo.79, No.10, pp.2619-2625, 1996.
2. Lardner, T.J., Ritter, J.E., and Zhu, G.Q., "Spherical Indentation and Fracture of Glass Plates," *J. Am. Ceram. Soc.*, Vo.80, No.7, pp.1851-1862, 1997.
3. Komvopoulos, K., "Finite Element Analysis of a Layered Elastic Solid in Normal Contact With a Rigid Surface," *J. of Tribology; Trans. of ASME*, Vo.110, pp.477-485, 1988.
4. 김청균, 오병택, "유한요소법을 이용한 Coating Layer의 접촉응력 해석에 관한 연구," *윤활학회지*, Vo.13, No.4, pp.66-70, 1997.
5. Kral E.R. and Komvopoulos K., "Three-Dimensional Finite Element Analysis of Surface Deformation and Stresses in an Elastic-Plastic Layered Medium Subjected to Indentation and Sliding Contact Loading," *J. of Applied Mechanics; Trans. of ASME*, Vo.63, pp.365-375, 1996.
6. Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, 3rd ed., Chap. 3, pp.53, McGraw Hill, London, 1970.