

공기윤활 구면틸팅패드베어링에 대한 연구

김성국[†] · 김경웅

한국과학기술원 기계공학과

A Study on Air-Lubricated Spherical Tilting Pad Bearings

Seong-Kook[†] Kim and Kyung-Woong Kim

Department of Mechanical Engineering, KAIST

Abstract – A theoretical analysis has been undertaken to show the influence of bearing geometry on the steady state characteristics of air lubricated spherical tilting pad bearings. The geometry variations considered are the number of pads, the eccentricity ratio, the direction of load, and the preloading. Dynamic characteristic equations are derived with pad assembly method.

Key words – spherical tilting pad journal bearings, friction force, load capacity, dynamic characteristic equations.

1. 서 론

공기윤활구면틸팅패드베어링은 틸팅패드베어링과 구면베어링을 결합시킨 형태이다. 베어링의 특성상 구면의 형상과 미소한 유막두께를 가짐으로 인해 가공의 어려움이 있었지만, 최근의 기계가공기술의 발전으로 정밀한 구면형상을 가지는 공기윤활구면틸팅패드베어링의 제작도 가능하게 되었다. 틸팅패드베어링은 고속회전기계와 같이 고속안정성이 요구되는 기계에 적합하며, 구면베어링은 저널베어링과 드러스트베어링이 결합된 형태로 양방향의 하중 지지가 가능함으로 인해 별도의 드러스트베어링이 필요치 않아 설치 공간이 상대적으로 줄어들며, 미스얼라인먼트(misalignment)에 민감하지 않은 장점을 가지고 있다.

본 연구에서는 새로운 형태의 베어링인 공기윤활구면틸팅패드베어링을 제안하고 베어링의 기하학적 변화에 따른 정적특성을 알아보며 동특성을 구하기 위한 기본방정식을 유도하였다.

2. 기본방정식

2-1. 기본방정식

구면틸팅패드베어링의 레이놀즈방정식은 다음과 같다

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h^3 p \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi h^3 p \frac{\partial p}{\partial \phi} \right) = 6\mu R^2 \sin^2 \phi \left(\omega \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial}{\partial t} \right) (ph) \quad (1)$$

이를 무차원화하면

$$\frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(H^3 P \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi H^3 P \frac{\partial P}{\partial \phi} \right) = \Lambda \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + 2j \gamma \frac{\partial}{\partial \tau} \right) (PH) \quad (2)$$

사용된 무차원 변수는 다음과 같다.

$$P = \frac{p}{p_a}, \quad H = \frac{h}{c_p}, \quad \Lambda = \frac{6\mu\omega R^2}{p_a c_p^2}, \quad \tau = jvt, \quad \gamma = \frac{v}{\omega} \quad (3)$$

구면틸팅패드베어링의 유막두께식은

[†]주저자 · 책임저자 : excelkim@samsung.co.kr

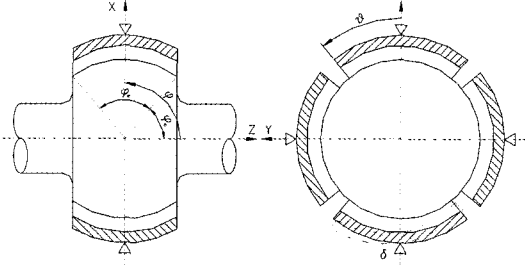


Fig. 1. Coordinates of spherical tilting pad bearing.

$$H = \frac{h}{c_p} = 1 - \epsilon_p \sin \phi \cos(\theta - \theta_o) - m \sin \phi \cos(\theta - \theta_p) - \bar{\delta} \sin \phi \sin(\theta - \theta_p) - \epsilon_z \cos \phi \quad (4)$$

여기서 ϵ_p , m , $\bar{\delta}$, ϵ_z , θ_o , θ_p 는 각각 축편심양, 패드의 예압양, 패드의 틸팅각, 축방향으로의 변위, 축의 편심각, 패드의 피벗위치이다. 레이놀즈방정식 (2)으로부터 구하여진 유막압력으로부터 각 패드의 모멘트가 균형을 이루는 틸팅각 $\bar{\delta}$ 를 구한다. 식 (5)는 모멘트계산에 필요한 식이다.

$$M = \iint P \sin^2 \phi R^3 \sin(\theta - \theta_p) d\phi d\theta \quad (5)$$

2.2. 정특성

X, Y, Z 방향의 하중과 마찰력을 구할 수 있으며 이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{f_x}{p_o R^2} = \iint P \sin^2 \phi \cos \theta d\phi d\theta \\ F_y &= \frac{f_y}{p_o R^2} = \iint P \sin^2 \phi \sin \theta d\phi d\theta \\ F_z &= \frac{f_z}{p_o R^2} = \iint P \sin \phi \cos \phi d\phi d\theta \end{aligned} \quad (6)$$

$$F_f = \frac{f c_p}{\mu U R^2} = \iint \left[\frac{3H}{\Lambda \sin \phi} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\sin \phi}{H} \right] d\phi d\theta \quad (7)$$

2.3. 동특성

구면틸팅패드베어링의 동특성은 패드조립법(pad assembly method)를 이용하여 구하게된다. Fig. 2와 같이 단일 패드의 좌표계를 ξ, η, δ, χ 이라고 하면 각 방향의 미소변위에 의한 압력과 유막두께 식은 다음과 같다.

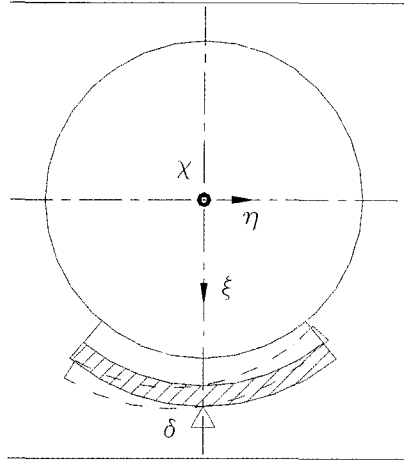


Fig. 2. Coordinates of single tilting pad bearing.

$$\begin{aligned} P &= P_s + P_1 e^{j\chi} + P_2 e^{j\eta} + P_3 e^{j\delta} + P_4 e^{j\chi} \\ H &= H_s + \Delta \xi \sin \phi \cos(\theta - \theta_p) e^{j\chi} \\ &+ \Delta \eta \sin \phi \sin(\theta - \theta_p) e^{j\eta} + \Delta \delta \sin \phi \sin(\theta - \theta_p) e^{j\delta} \\ &+ \Delta \chi \cos \phi e^{j\chi} \end{aligned} \quad (8)$$

식 (8)에서 P_s, P_1, P_2, P_3, P_4 는 각각 정상상태, ξ, η, δ, χ 방향의 미소변위로 인해 변화하는 유막압력이고, H_s 는 정상상태의 유막두께가 된다. 식 (8)을 식 (2)에 대입을 하고 정리하면 동특성을 구하기 위한 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(H_s^2 \frac{\partial P_s P_i}{\partial \theta} + 3 H_s^2 H_i P_s \frac{\partial P_s}{\partial \theta} \right) \\ &+ \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi H_s^2 \frac{\partial P_s P_i}{\partial \phi} + 3 \sin \phi H_s^2 H_i P_s \frac{\partial P_s}{\partial \phi} \right) \\ &= \Lambda \frac{\partial (P_s H_i + P_i H_s)}{\partial \theta} + 2j \Lambda \gamma (P_s H_i + P_i H_s) \end{aligned} \quad (9)$$

$$P_i = P_{re} + j P_{im}, \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

H_i 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H_1 &= \sin \phi \cos(\theta - \theta_p), \quad H_2 = \sin \phi \sin(\theta - \theta_p), \\ H_3 &= \sin \phi \sin(\theta - \theta_p), \quad H_4 = \cos \phi \end{aligned} \quad (10)$$

단일패드에 대한 운동방정식은 식 (11)과 같고 식(9)에서 구하여진 압력을 이용하여 강성과 감쇠계수를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} F_\xi &= K_{\xi\xi} \xi + K_{\xi\eta} \eta + K_{\xi\delta} \delta + K_{\xi\chi} \chi + j\gamma \\ &(B_{\xi\xi} \xi + B_{\xi\eta} \eta + B_{\xi\delta} \delta + B_{\xi\chi} \chi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_\eta &= K_{\eta\xi}\xi + K_{\eta\eta}\eta + K_{\eta\delta}\delta + K_{\eta\chi}\chi + j\gamma \\
 &(B_{\eta\xi}\xi + B_{\eta\eta}\eta + B_{\eta\delta}\delta + B_{\eta\chi}\chi) \\
 F_\chi &= K_{\chi\xi}\xi + K_{\chi\eta}\eta + K_{\chi\delta}\delta + K_{\chi\chi}\chi + j\gamma \\
 &(B_{\chi\xi}\xi + B_{\chi\eta}\eta + B_{\chi\delta}\delta + B_{\chi\chi}\chi) \\
 M &= K_{\delta\xi}\xi + K_{\delta\eta}\eta + K_{\delta\delta}\delta + K_{\delta\chi}\chi + j\gamma \\
 &(B_{\delta\xi}\xi + B_{\delta\eta}\eta + B_{\delta\delta}\delta + B_{\delta\chi}\chi)
 \end{aligned} \tag{11}$$

식(11)의 모멘트식에서 δ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \delta &= -p(K_{\delta\xi}\xi + K_{\delta\eta}\eta + K_{\delta\chi}\chi) - q\gamma(B_{\delta\xi}\xi + B_{\delta\eta}\eta + B_{\delta\chi}\chi) \\
 &+ j(q[K_{\delta\xi}\xi + K_{\delta\eta}\eta + K_{\delta\chi}\chi] - p\gamma[B_{\delta\xi}\xi + B_{\delta\eta}\eta + B_{\delta\chi}\chi])
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$p = \frac{K_{\delta\delta} - \gamma^2 I}{(K_{\delta\delta} - \gamma^2 I) + (\gamma B_{\delta\delta})^2}, \quad q = \frac{\gamma B_{\delta\delta}}{(K_{\delta\delta} - \gamma^2 I) + (\gamma B_{\delta\delta})^2} \tag{13}$$

식(13)을 식(11)에 대입을 하고 정리하면 식 (14)와 (15)와 같이 단일패드에서의 강성과 감쇠계수를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 K_{\xi\xi} &= K_{\xi\xi} - [p(K_{\xi\delta}K_{\delta\xi} - \gamma^2 B_{\xi\delta}B_{\delta\xi}) + q\gamma(K_{\xi\delta}B_{\delta\xi} + K_{\delta\xi}B_{\xi\delta})] \\
 K_{\xi\eta} &= K_{\xi\eta} - [p(K_{\xi\delta}K_{\delta\eta} - \gamma^2 B_{\xi\delta}B_{\delta\eta}) + q\gamma(K_{\xi\delta}B_{\delta\eta} + K_{\delta\eta}B_{\xi\delta})] \\
 K_{\xi\chi} &= K_{\xi\chi} - [p(K_{\xi\delta}K_{\delta\chi} - \gamma^2 B_{\xi\delta}B_{\delta\chi}) + q\gamma(K_{\xi\delta}B_{\delta\chi} + K_{\delta\chi}B_{\xi\delta})] \\
 K_{\eta\xi} &= K_{\eta\xi} - [p(K_{\eta\delta}K_{\delta\xi} - \gamma^2 B_{\eta\delta}B_{\delta\xi}) + q\gamma(K_{\eta\delta}B_{\delta\xi} + K_{\delta\xi}B_{\eta\delta})] \\
 K_{\eta\eta} &= K_{\eta\eta} - [p(K_{\eta\delta}K_{\delta\eta} - \gamma^2 B_{\eta\delta}B_{\delta\eta}) + q\gamma(K_{\eta\delta}B_{\delta\eta} + K_{\delta\eta}B_{\eta\delta})] \\
 K_{\eta\chi} &= K_{\eta\chi} - [p(K_{\eta\delta}K_{\delta\chi} - \gamma^2 B_{\eta\delta}B_{\delta\chi}) + q\gamma(K_{\eta\delta}B_{\delta\chi} + K_{\delta\chi}B_{\eta\delta})] \\
 K_{\chi\xi} &= K_{\chi\xi} - [p(K_{\chi\delta}K_{\delta\xi} - \gamma^2 B_{\chi\delta}B_{\delta\xi}) + q\gamma(K_{\chi\delta}B_{\delta\xi} + K_{\delta\xi}B_{\chi\delta})] \\
 K_{\chi\eta} &= K_{\chi\eta} - [p(K_{\chi\delta}K_{\delta\eta} - \gamma^2 B_{\chi\delta}B_{\delta\eta}) + q\gamma(K_{\chi\delta}B_{\delta\eta} + K_{\delta\eta}B_{\chi\delta})] \\
 K_{\chi\chi} &= K_{\chi\chi} - [p(K_{\chi\delta}K_{\delta\chi} - \gamma^2 B_{\chi\delta}B_{\delta\chi}) + q\gamma(K_{\chi\delta}B_{\delta\chi} + K_{\delta\chi}B_{\chi\delta})]
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 B_{\xi\xi} &= B_{\xi\xi} - [p(K_{\xi\delta}B_{\delta\xi} + K_{\delta\xi}B_{\xi\delta}) + q\gamma(B_{\xi\delta}B_{\delta\xi} - K_{\xi\delta}K_{\delta\xi} / \gamma^2)] \\
 B_{\xi\eta} &= B_{\xi\eta} - [p(K_{\xi\delta}B_{\delta\eta} + K_{\delta\eta}B_{\xi\delta}) + q\gamma(B_{\xi\delta}B_{\delta\eta} - K_{\xi\delta}K_{\delta\eta} / \gamma^2)] \\
 B_{\xi\chi} &= B_{\xi\chi} - [p(K_{\xi\delta}B_{\delta\chi} + K_{\delta\chi}B_{\xi\delta}) + q\gamma(B_{\xi\delta}B_{\delta\chi} - K_{\xi\delta}K_{\delta\chi} / \gamma^2)] \\
 B_{\eta\xi} &= B_{\eta\xi} - [p(K_{\eta\delta}B_{\delta\xi} + K_{\delta\xi}B_{\eta\delta}) + q\gamma(B_{\eta\delta}B_{\delta\xi} - K_{\eta\delta}K_{\delta\xi} / \gamma^2)] \\
 B_{\eta\eta} &= B_{\eta\eta} - [p(K_{\eta\delta}B_{\delta\eta} + K_{\delta\eta}B_{\eta\delta}) + q\gamma(B_{\eta\delta}B_{\delta\eta} - K_{\eta\delta}K_{\delta\eta} / \gamma^2)] \\
 B_{\eta\chi} &= B_{\eta\chi} - [p(K_{\eta\delta}B_{\delta\chi} + K_{\delta\chi}B_{\eta\delta}) + q\gamma(B_{\eta\delta}B_{\delta\chi} - K_{\eta\delta}K_{\delta\chi} / \gamma^2)] \\
 B_{\chi\xi} &= B_{\chi\xi} - [p(K_{\chi\delta}B_{\delta\xi} + K_{\delta\xi}B_{\chi\delta}) + q\gamma(B_{\chi\delta}B_{\delta\xi} - K_{\chi\delta}K_{\delta\xi} / \gamma^2)] \\
 B_{\chi\eta} &= B_{\chi\eta} - [p(K_{\chi\delta}B_{\delta\eta} + K_{\delta\eta}B_{\chi\delta}) + q\gamma(B_{\chi\delta}B_{\delta\eta} - K_{\chi\delta}K_{\delta\eta} / \gamma^2)] \\
 B_{\chi\chi} &= B_{\chi\chi} - [p(K_{\chi\delta}B_{\delta\chi} + K_{\delta\chi}B_{\chi\delta}) + q\gamma(B_{\chi\delta}B_{\delta\chi} - K_{\chi\delta}K_{\delta\chi} / \gamma^2)]
 \end{aligned} \tag{15}$$

단일패드에서 구하여진 강성과 감쇠계수를 좌표변환을 통하여 XYZ 좌표계로 나타내면 다음과 같이 각각 9개의 강성과 감쇠계수가 얻어진다.

$$K_{xx} = K_{\xi\xi} \cos^2 \theta_p + K_{\eta\eta} \sin^2 \theta_p - (K_{\eta\xi} + K_{\xi\eta}) \cos \theta_p \sin \theta_p$$

$$\begin{aligned}
 K_{xy} &= K_{\xi\eta} \cos^2 \theta_p + K_{\eta\xi} \sin^2 \theta_p + (K_{\xi\xi} - K_{\eta\eta}) \cos \theta_p \sin \theta_p \\
 K_{xz} &= K_{\xi\chi} \cos \theta_p - K_{\eta\chi} \sin \theta_p \\
 K_{yx} &= K_{\eta\xi} \cos^2 \theta_p - K_{\xi\eta} \sin^2 \theta_p + (K_{\xi\xi} - K_{\eta\eta}) \cos \theta_p \sin \theta_p \\
 K_{yy} &= K_{\eta\eta} \cos^2 \theta_p + K_{\xi\xi} \sin^2 \theta_p + (K_{\eta\xi} + K_{\xi\eta}) \cos \theta_p \sin \theta_p \\
 K_{yz} &= K_{\eta\chi} \cos \theta_p + K_{\xi\chi} \sin \theta_p \\
 K_{zz} &= K_{\chi\xi} \cos \theta_p - K_{\chi\eta} \sin \theta_p \\
 K_{zy} &= K_{\chi\eta} \cos \theta_p + K_{\chi\xi} \sin \theta_p \\
 K_{zz} &= K_{\chi\chi}
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 B_{xx} &= B_{\xi\xi} \cos^2 \theta_p + B_{\eta\eta} \sin^2 \theta_p - (B_{\eta\xi} + B_{\xi\eta}) \cos \theta_p \sin \theta_p \\
 B_{xy} &= B_{\xi\eta} \cos^2 \theta_p + B_{\eta\xi} \sin^2 \theta_p + (B_{\xi\xi} - B_{\eta\eta}) \cos \theta_p \sin \theta_p \\
 B_{xz} &= B_{\xi\chi} \cos \theta_p - B_{\eta\chi} \sin \theta_p \\
 B_{yx} &= B_{\eta\xi} \cos^2 \theta_p - B_{\xi\eta} \sin^2 \theta_p + (B_{\xi\xi} - B_{\eta\eta}) \cos \theta_p \sin \theta_p \\
 B_{yy} &= B_{\eta\eta} \cos^2 \theta_p + B_{\xi\xi} \sin^2 \theta_p + (B_{\eta\xi} + B_{\xi\eta}) \cos \theta_p \sin \theta_p \\
 B_{yz} &= B_{\eta\chi} \cos \theta_p + B_{\xi\chi} \sin \theta_p \\
 B_{zz} &= B_{\chi\xi} \cos \theta_p - B_{\chi\eta} \sin \theta_p \\
 B_{zy} &= B_{\chi\eta} \cos \theta_p + B_{\chi\xi} \sin \theta_p \\
 B_{zz} &= B_{\chi\chi}
 \end{aligned} \tag{17}$$

3. 해 석

베어링패드의 격자는 40×12으로 나누었다. 틸팅각은 Newton-Rapson법을 사용하여 계산하였으며 해석 대상의 베어링은 패드수가 3패드, 4패드, 5패드, 6패드의 틸팅베어링이고 $\phi_s = 45^\circ$, $\phi_e = 90^\circ$ 인 구면틸팅패드 베어링이다. 편심양과 예압양을 달리하여 계산을 하였으며 하중방향이 패드사이인 경우(LBP)와 패드위(LOP)인 경우에 대하여 해석을 하였다. 해석순서는 다음과 같다.

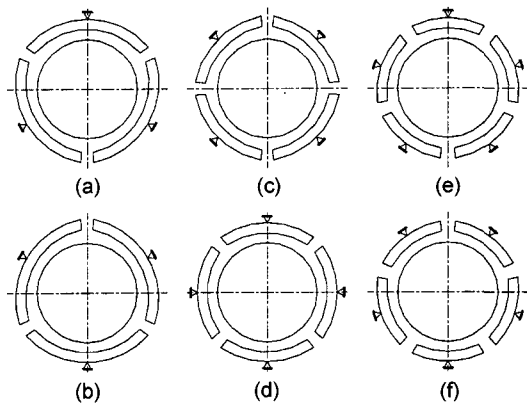


Fig. 3. Bearing types (a,c,e - Load between Pads) (b, d, f - Load on Pads).

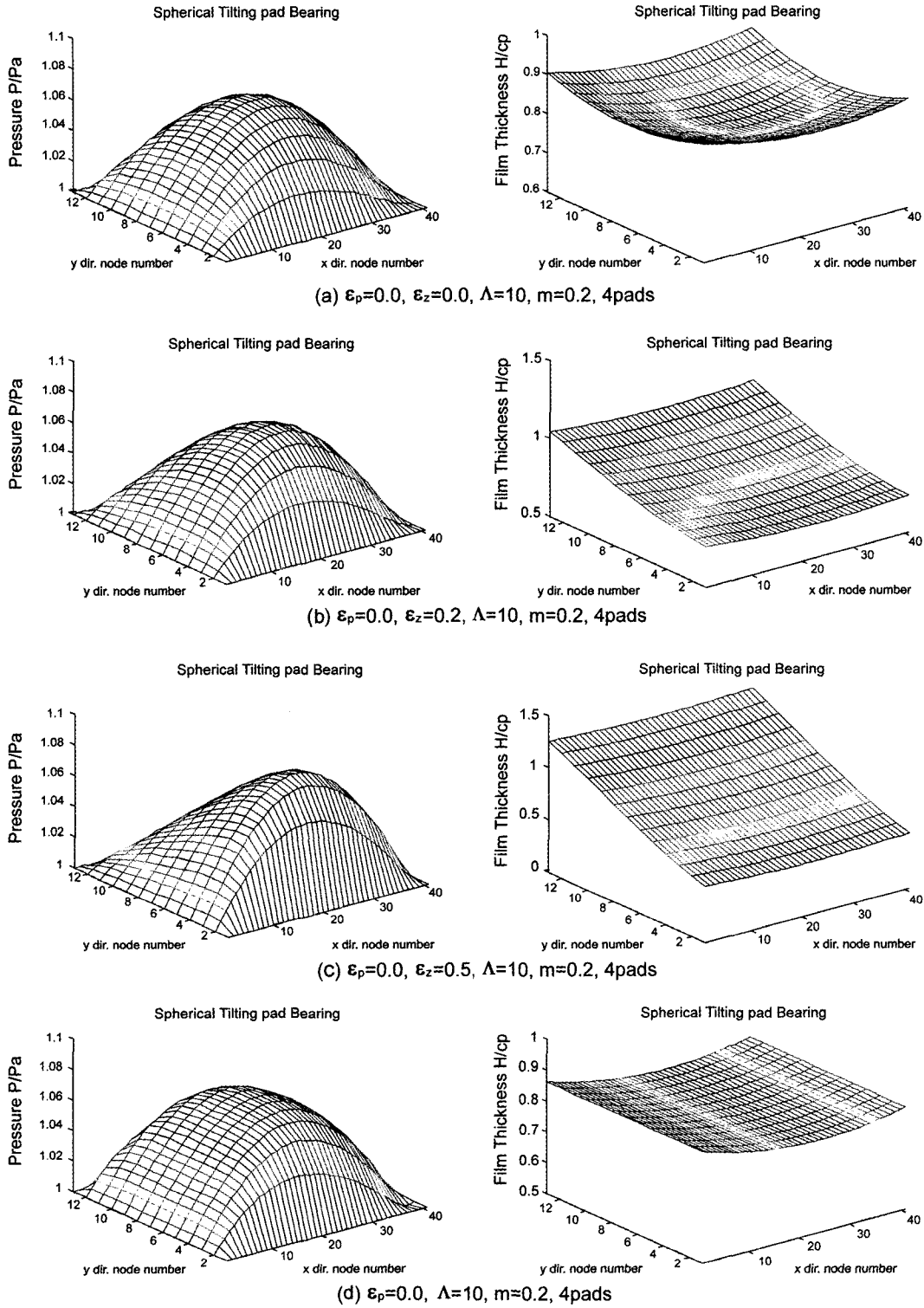


Fig. 4. Pressure and film thickness.

- ① 필요한 데이터를 입력한다.
 - ② 레이놀즈방정식 (2)를 푼다.
 - ③ 압력 수렴조건과 모멘트균형을 이루는 틸팅각을 만족할 때까지 ②→③을 반복한다.
 - ④ 부하능력과 마찰력을 계산한다.
- 압력의 수렴조건은 다음의 조건을 따른다.

$$\sum_{i=0}^{N_y} \sum_{j=0}^{N_x} |P_{ij}^n - P_{ij}^{n-1}| / \sum_{i=0}^{N_y} \sum_{j=0}^{N_x} |P_{ij}^n| \leq 10^{-6} \quad (18)$$

Fig. 3에서 (a),(c),(e)는 LBP, (b),(d),(f)는 LOP의 경우이다.

4. 해석결과 및 고찰

Fig. 4(a, b, c)는 베어링수가 10이고 예압이 0.2인 4 패드틸팅패드베어링의 유막두께와 압력으로 Fig. 4(d)의 원통형 틸팅패드베어링과 비교해보면 축방향 편심이 커질수록 슬라이드모양의 유막두께를 가지며, 압력

은 편심이 되는 방향으로 최대 압력이 발생하는 위치가 이동함을 알 수 있다. 부하능력은 유막두께가 원통형의 틸팅패드베어링에 비해 크므로 인해 원통형보다는 상대적으로 떨어지지만 Z방향 편심이 있는 경우 양 방향으로 부하지지능력이 생김을 알 수 있다.

Fig. 5(a)는 편심이 없고 예압이 0.5인 4 패드베어링의 중심에서의 유막두께와 압력으로 베어링수가 증가하여도 유막두께와 압력의 변화가 점차 줄어드는 것을 알 수 있다. 이는 Fig. 5(b)의 원통형 틸팅패드베어링에서의 결과와 동일한 경향이다.

Fig. 6은 축의 편심이 없는 경우 예압양을 달리하면서 패드수에 따른 마찰력의 변화를 구한 것이다. 패드의 예압이 커질수록 마찰력도 커지는데 구면틸팅패드베어링에 있어 마찰력은 패드 수보다는 유막두께의 영향이 크음을 알 수 있다.

Fig. 7은 베어링수와 축방향편심을 변화시켜가면서 마찰력과 축방향의 부하능력을 계산한 것이다. 축방향 변위가 커질수록 마찰력이 증가함을 볼 수 있는데 이

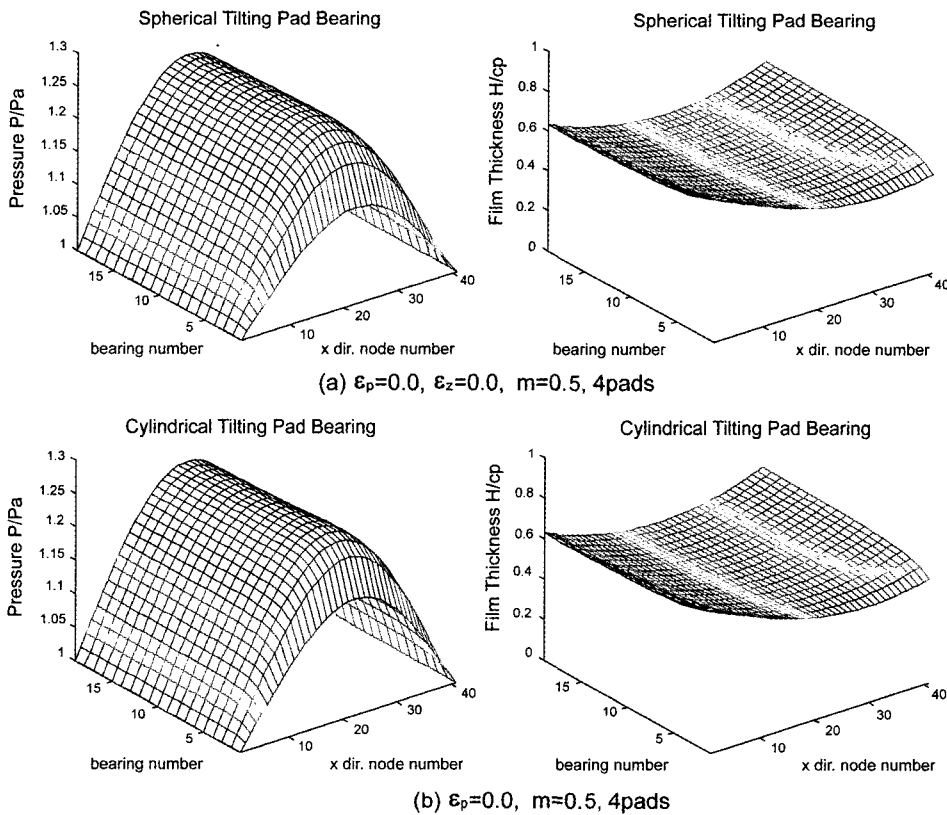


Fig. 5. Maximum pressure and film thickness.

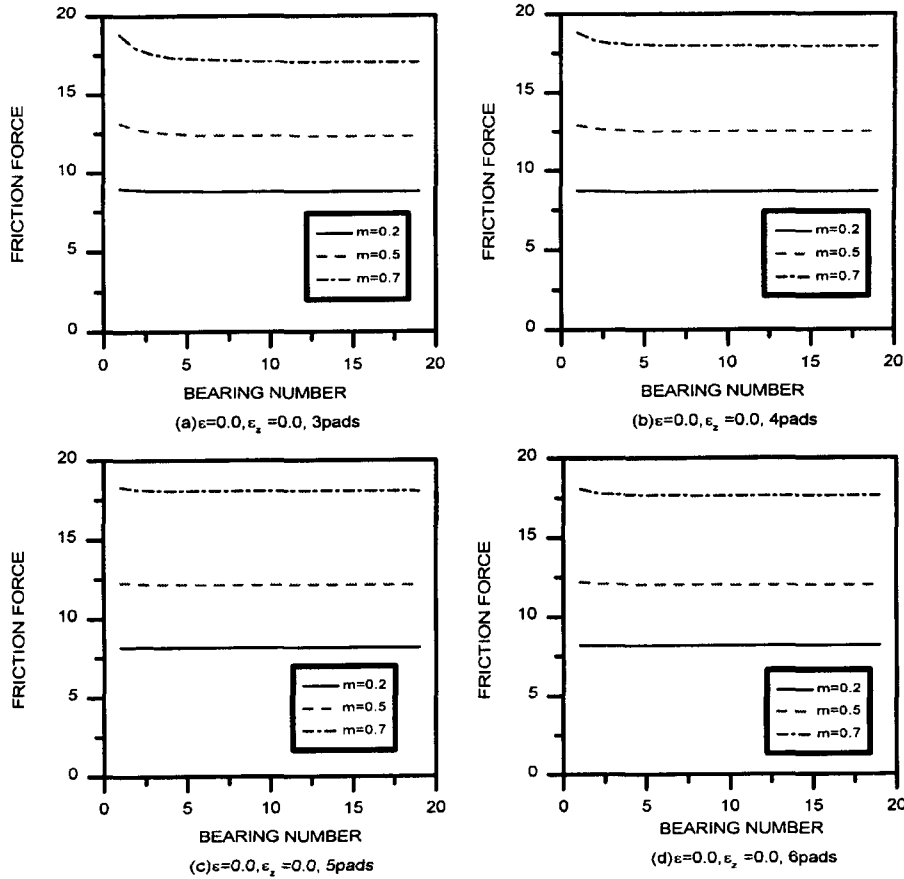


Fig. 6. Friction force versus bearing number.

는 최대압력발생영역의 유막두께가 작아짐으로 인해 마찰력이 증가하는 것이다. 또한 패드수가 많아질수록 축방향의 부하능력이 감소하는데 패드각의 크기가 작아짐으로 인해 발생압력도 작아지는데 그 원인이 있다. 또한 패드의 ϕ_c 각이 커질수록 동일한 패드각 θ 에 대하여 축방향의 부하능력은 증가하게 된다. 동일한 기하학적 조건에서 베어링수가 증가하여도 축방향부하능력은 일정값이상으로 증가하지 않는데 이는 베어링의 틸팅작용으로 인해 발생압력이 베어링수가 증가하여도 커지지 않기 때문이다.

Fig. 8은 축방향편심이 없고 예압이 0.5인 경우에 베어링수와 축의 편심양을 변화시키는 경우 LBP와 LOP에 대한 마찰력과 부하능력이다. 패드수가 3인 경우 LBP의 부하능력이 LOP의 부하능력보다 크지만 패드수가 4인 경우 반대로 LOP의 부하능력이 LBP인 경우보다 커짐을 알 수 있다. 이러한 경향은 패드수

가 3, 5인 경우와 4, 6인 경우 같은 경향을 보이고 있다. 이는 각 패드의 압력발생의 차이에도 원인이 있지만 패드의 피벗위치로 인한 영향이 더 큰 것으로 생각된다.

5. 결 론

1. 공기윤활구면틸팅패드베어링을 제안하였으며 동특성계수를 구하기 위한 식을 유도하였다.
2. 축방향편심이 있는 경우 최대 압력발생위치가 축 중심에서 벗어남을 확인하였으며 이로 인해 축방향의 부하능력이 발생함을 알 수 있다.
3. 부하능력은 기하학적 조건이 같은 경우 베어링수가 증가하여도 일정 값 이상으로 증가하지 않는다.
4. 하중방향(LOP, LBP)과 패드수에 따라 베어링의 정적능력에 큰 차이가 있다.

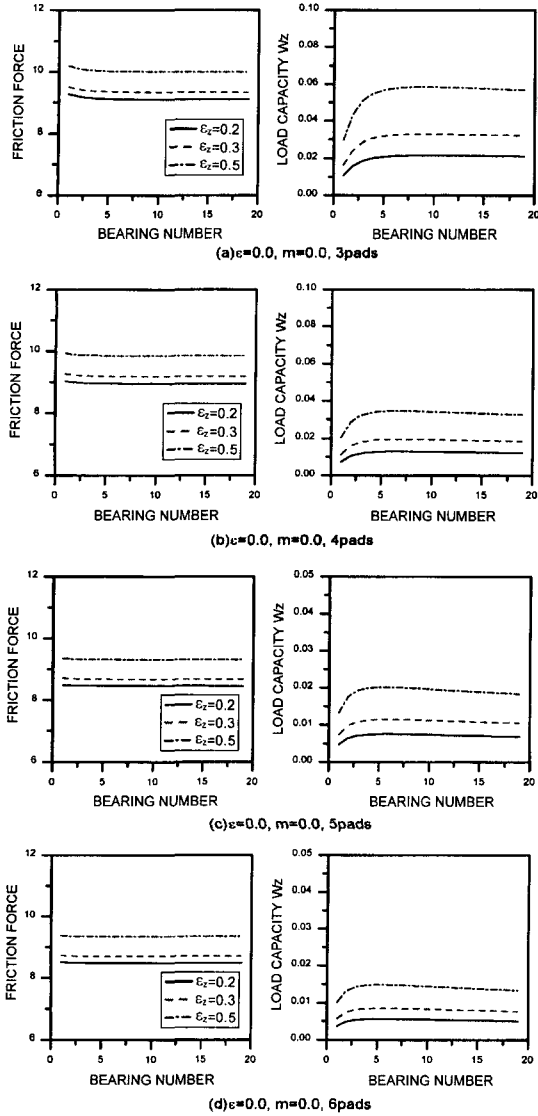


Fig. 7. Friction force and load capacity versus bearing number.

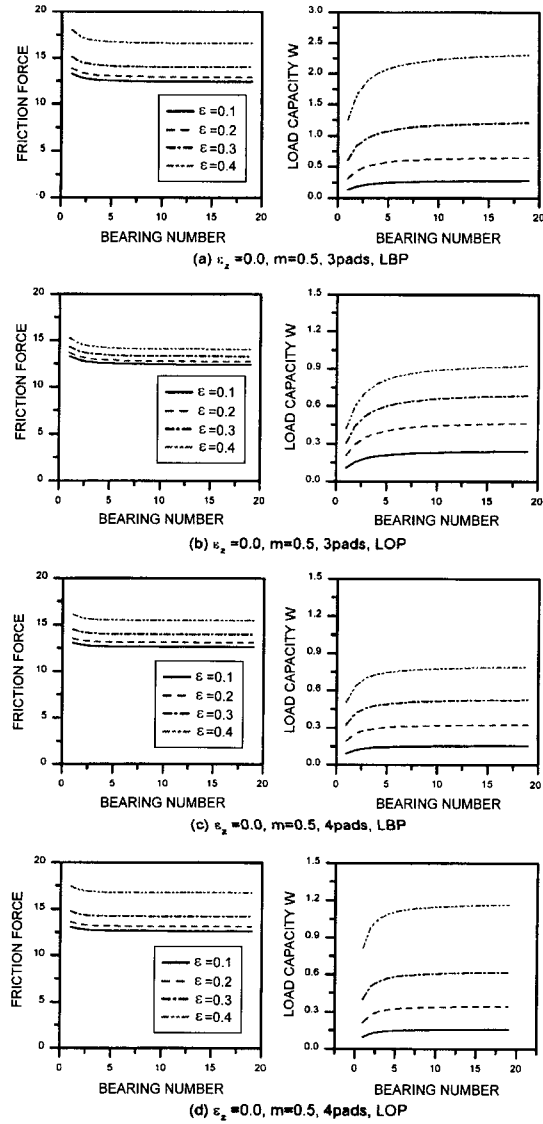


Fig. 8. Friction force and load capacity versus bearing number.

기호 및 약어 설명

- B_{ij} dimensionless damping coefficient ($ij = \xi, \eta, \delta, \chi$)
- c_p bearing clearance
- K_{ij} dimensionless stiffness coefficient ($ij = \xi, \eta, \delta, \chi$)
- F_f dimensionless friction force
- h film thickness

- H dimensionless film thickness
- I dimensionless moment of inertia
- m amount of preloading
- P dimensionless pressure
- p_a atmosphere pressure
- R bearing radius
- X coordinate of x direction
- Y coordinate of y direction
- Z coordinate of z direction

Λ	bearing number
ϵ_p	eccentricity ratio
ϵ_z	eccentricity ratio with z direction
δ	tilting angle
$\bar{\delta}$	dimensionless tilting angle
θ	coordinate of circumferential direction
θ_e	direction of eccentricity
θ_p	angle of pivot
ϕ	coordinate of meridian direction
ϕ_s	start angle of meridian direction
ϕ_e	end angle of meridian direction
ρ	lubricant density
μ	lubricant viscosity
ω	rotating speed
v	whirl ratio

APPENDIX

$$\begin{aligned}
 K_{\xi\xi} &= \iint Re[P_1] \sin^2\phi \cos(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 K_{\xi\eta} &= \iint Re[P_2] \sin^2\phi \cos(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 K_{\xi\delta} &= \iint Re[P_3] \sin^2\phi \cos(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 K_{\xi\chi} &= \iint Re[P_4] \sin^2\phi \cos(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 K_{\eta\xi} &= \iint Re[P_1] \sin^2\phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 K_{\eta\eta} &= \iint Re[P_2] \sin^2\phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 K_{\eta\delta} &= \iint Re[P_3] \sin^2\phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 K_{\eta\chi} &= \iint Re[P_4] \sin^2\phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{\chi\xi} &= \iint Re[P_1] \sin\phi \cos\phi d\theta d\phi \\
 K_{\chi\eta} &= \iint Re[P_2] \sin\phi \cos\phi d\theta d\phi \\
 K_{\chi\delta} &= \iint Re[P_3] \sin\phi \cos\phi d\theta d\phi \\
 K_{\chi\chi} &= \iint Re[P_4] \sin\phi \cos\phi d\theta d\phi \\
 K_{\delta\xi} &= \iint Re[P_1] \sin^2\phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 K_{\delta\eta} &= \iint Re[P_2] \sin^2\phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{\delta\delta} &= \iint Re[P_3] \sin^2\phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 K_{\delta\chi} &= \iint Re[P_4] \sin^2\phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{\xi\xi} &= \iint Im[P_1] \sin^2\phi \cos(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\xi\eta} &= \iint Im[P_2] \sin^2\phi \cos(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\xi\delta} &= \iint Im[P_3] \sin^2\phi \cos(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\xi\chi} &= \iint Im[P_4] \sin^2\phi \cos(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\eta\xi} &= \iint Im[P_1] \sin^2\phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\eta\eta} &= \iint Im[P_2] \sin^2\phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\eta\delta} &= \iint Im[P_3] \sin^2\phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\eta\chi} &= \iint Im[P_4] \sin^2\phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{\chi\xi} &= \iint Im[P_1] \sin\phi \cos\phi d\theta d\phi \\
 B_{\chi\eta} &= \iint Im[P_2] \sin\phi \cos\phi d\theta d\phi \\
 B_{\chi\delta} &= \iint Im[P_3] \sin\phi \cos\phi d\theta d\phi \\
 B_{\chi\chi} &= \iint Im[P_4] \sin\phi \cos\phi d\theta d\phi \\
 B_{\delta\xi} &= \iint Im[P_1] \sin^2\phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\delta\eta} &= \iint Im[P_2] \sin^2\phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\delta\delta} &= \iint Im[P_3] \sin^2\phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi \\
 B_{\delta\chi} &= \iint Im[P_4] \sin^2\phi \sin(\theta - \theta_p) d\theta d\phi
 \end{aligned}$$

참고문헌

1. P. S. Leung, I. A. Craighead, T. S. Wilkinson, "An Analysis of the Steady State and Dynamic Characteristics of a Spherical Hydrodynamic Journal Bearing," J. of Tribology, Vol. 111, 1989, pp. 459-467.
2. N. M. Sela, J. J. Blech, "Performance and Stability of a Hybrid Spherical Gas Gyrobearing," J. of Tribology, Vol. 113, 1991, pp. 458-463.
3. A. L. GU, J.A. Walowit, D. F. Wilcock, "A Hero-Jet Driven Porous Spherical Hydrostatic Gas Bearing Gyro," J. of Lub. Technology, Vol. 112, 1973, pp. 490-498.