大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 11 卷 第 2 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XI, No.2, 403-419. July 2001

공간 논증기하 단원의 교재 내용 분석 및 개선 방안

현 진 오* 이 중 석**

Ⅰ. 서 론

논리적 사고력을 연마하는 데 유클리드 기하는 가장 알맞은 도구로 여겨져 왔다. 유클리드적인 사고의 틀인 분석-증명-작도-결정(Analysis-Proof-Construction-Determination)은 수학의 방법론의 원리일 뿐 아니라 수학의 교육 활동을 이끄는 원리이다.

대부분의 수학교재는 개념과 정의, 해법의 설명과 논리적 표현들로 나열되어 있다. 이러한 형식적 서술 때문에 영원한 진리로 인식되기도 하지만 융통성 없고 친숙해질 수 없으며 이해하기 어려운 교과로 느껴진다, 수학교재는 다른 교과의 서술 양식과는 많은 차이가 있다. 가령 우리가 소설책을 읽을 경우에는 일부분을 건너 뛰어도 내용을 파악할 수 있지만, 수학책의 경우는 책에서 전달하는 의미를 전혀 알 수 없게 된다.

수학책을 읽을 때는 모든 단어가 중요하다. 대개 수학교과서에는 간결하게 요점만 적혀 있고 각각의 낱말과 기호는 모두 특수한 의미를 지닌다. 또한 교과서에 삽입된 그림, 그래프, 표, 도형 등은 수천 마디의 말을 함축하고 있으므로 절대로 건너뛰어선 안된다. 따라서 수학책을 읽을 때는 천천히, 주의 깊게 집중해서 읽어야만 한다. 각 개념을 파악한 후에 진도를 나가야 한다. 서둘러서도 안되고, 다른 교과에서처럼 중간단계를 건너뛰어서도 안된다. 수학교재의 이러한 특성을 이해하지 못한 상태에서, 학생들은 자신의 능력을 비하하고 결국에는 수학에 대해 부정적인 생각을 갖게 된다(김연식 · 허혜자, 1995).

특히 논증기하 단원은 다른 어떤 단원보다도, 시를 감상하고 음미하듯이 천천히, 주의 깊게 집중해서 읽어야하고, 용어의 정의, 공리, 기본성질 등 각 개념을 이해하고 파악한 이후에 진도를 나가야 함에도 불구하고 현실은 그렇지 못한 경향이 있다. 그 이유는 수학능력시험과 각종 입시와 평가에서 출제의 어려움 때문인지는 몰라도 비중이 낮게 나타나고 있기 때문이며 일선학교 현장에서도 논리적 사고력을 기르는 데 강력한 도구인 공간기하 논증단원을 소홀히 다루고 있는 실정이다.

고등학교 수학Ⅱ(자연과정)에서 공간도형 단원의 논증기하는 공간에서의 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계 및 도형의 한 평면 위로의 정사영에 대한 용어의 정의와 명제의 증명으로 이루어져 있다. 고등학교 수학과 교육과정 해설(교육부, 1995, 6, 20)에서 "'수학Ⅱ'는 '공통수학'과 '수학Ⅰ'을 이수하고 난 후에 이수하는 과목으로서, 장차 수학을 보다 더 요구하는 자연 과정 학생들이 이수해야 할 과목이며, 보다 심화되거나 새로운 수학적 지식과 기

* 제주대학교
** 서귀포여자고등학교

능 및 고차적인 사고력을 요구하는 과목이다. 따라서, '수학Ⅱ'의 학습은 '공통수학', '수학Ⅰ'에서 학습한 개념, 원리 및 법칙을 토대로 하여 이를 심화시키고, 새로운 내용을 학습하며, 수학적 사고력, 논리적 추론력, 창의적 문제 해결력을 기를 수 있도록 해야 한다."고 기술되어 있으며, "공간도형은 공리계를 사용하지 않도록 하며, 공간좌표는 평면좌표의 연속된 수준에서 간단히 다룬다."고 지도상의 유의점을 제시하고 있다.

그러나, 공간기하에 대한 공리 5개를 논의의 출발점으로 삼지 않으므로써 논리 전개가 애매모호하게 되고 이로 말미암아 직관적으로 참이라고 여겨지는 명제에 대한 증명을 대부분의 교사나 학생 모두가 어렵게 받아들여지고 있을 뿐만 아니라 교과 내용의 구성과 논리 전개가 부적절하고 미흡한 점이 발견되었다. 이는 논증기하에 대한 충분한 이해가 해석기하를 학습하는 데 도움이 된다는 점을 감안할 때 교과 내용의 구성 문제에 대하여 재고해야할 필요가 있다고 여겨진다.

제 Ⅱ장에서는 논증기하 지도의 목적과 공리 도입의 필요성을 살펴보고, 제 Ⅲ장에서는 현행 교과서 내용을 분석하고 문제점을 도출하여 논증기하 내용 구성에 대한 개선 방안을 마련하였다.

Ⅱ. 논증기하 지도의 목적과 공리 도입의 필요성

1. 논증기하 지도의 목적

논증기하 지도의 주요한 목적은, 공간적인 상상력을 신장시키고 도형에 관한 기본적인 명제와 그 적용에 친숙케 하며, 연역적 증명에 대한 이해와 그 가치를 이해시키고, 정밀하고 간결한 표현과, 아이디어의 논리적인 조직과 기억 습관을 형성하는데 있으며, 특히 "…이면 …이다." 형태의 가설-연역적 사고 방법과 증명의 본질을 이해시키고 증명 능력을 개발하는 것을 중요한 목표로 하고 있다(Fawcett, 1938, pp. 3-4). 유클리드 기하는 유클리드의 원론에서 유래된 정의, 공리, 공준으로부터 정리를 증명하는 연역적 · 공리적인 체계이다.

오늘날 그리스의 각급 학교는 교수 요목에서 유클리드 기하를 특별히 강화하고 있다. 그 이유는 유클리드 기하학은 고대 그리스의 자랑이며, 모든 수학 영역의 학문적 기초가 되는 표준으로 간주될 뿐 아니라 학생들의 논리적 사고력을 더욱 신장시킬 수 있다고 여기기 때문이다. 특히 플라톤의 전통은 기하학이 실재적인 필요뿐만 아니라 궁극적인 존재에 대한 '진짜' 참인 지식에 목표를 둘 것을 요구하였는데, 후자의 목표는 수학교재의 내용이 유클리드 원론의 구성 체제를 따랐을 때 더 효과적으로 달성된다고 생각하기 때문이다(Toumasis, 1990).

최근 유클리드 기하는 학교수학에서 그 위치가 약화되었다. 이러한 쇠퇴의 이유는 내용에 대한 불만족보다는 유클리드 기하의 본질을 형성하는 논리적 추론에 의해 야기되는 어려움에서 기인한다. 유클리드 기하가 학교 교재로 계속 다루어지고 있는 이유를 Fehr(1963)는 다음과 같이 지적하고 있다.

> 유클리드 기하가 잔존하고 있는 것은, 무엇보다도, 그것이 학생들에게 수학의 공리적 구조의 성격을 이해시키는 데 있어서, 현존하는 것 중 유일한 교재라고 하는 가정 때문이다. 이러한 사고 방식 때문에 산술이나 대수에서 반세기 이상 초등적인 방법으로 공리적 구조의 성격을 나타내는 전개를 해 왔는데도 중등학교 수준에서는 극히 최근까지도 이들 교재를 고전적 형식 이외의 형태로 지도하는 것을 피해 왔다. 기

하 이외의 영역을 사용해서 공리적 구조의 개념을 발전시킬 수 있고 그렇게 함으로써 학교기하를 현대적 관점이라고 부를 수 있는 처리를 할 수 있다는 것은 분명하다. 이런 것을 충분히 알고 있으면서도 현재의 기하 교육의 개선을 위한 노력은 본질적으로 유클리드를 보존하는 일을 목표로 하고 있다.

2. 공리 도입의 필요성

공간논증기하의 교과내용은 직관적으로 성립함이 명백하다는 것을 쉽게 이해할 수 있는 명제들로 구성되어 있다. 성립함이 명백한 명제를 증명하는 데 증명이 전제되어 있지 않는 명제나 정리를 이용하는 것은 논리의 정당성을 확보하지 못한다.

6차 교육과정의 12개 교과서를 분석한 결과 7개 교과서에서 이와 같은 경향을 보이고 있고 일부 교과서는 논리적 오류도 발견되고 있다.

연역적 체계로서의 공간논증기하에 대한 교과내용을 구성하고 논리를 전개시키는 과정에서 위와 같은 결함을 내포하게 된 근본 원인은 공리를 도입하지 않고 무리하게 짜맞추기식 논증을 제시하는 데 따른 것이라 여겨지며 이를 극복하기 위하여 공간기하에 대한 다음의 5개의 공리 중 ③, ④, ⑤의 3개의 공리 도입이 필요하다고 생각한다.

▣ 공간기하학에 관한 공리군

① 각 평면에는 적어도 한 직선 위에 있지 않는 세 점이 존재한다.

② 모든 점이 한 평면 위에 있는 것은 아니다.

③ 한 직선 위에 있지 않는 세 점은 오직 한 평면 위에 있다.

④ 만일 한 직선 위의 두 점이 한 평면 위에 있으면, 그 직선 위의 모든 점과 그 직선 자체는 그 평면 위에 있다.

⑤ 만일 두 평면 α, β가 한 점 A를 공유하면, α, β는 제 2의 점 B를 공유한다.

조사 대상 12개의 교과서 중 5개의 교과서는 위의 공리 ③, ④, ⑤를 공간도형의 <기본 성질>로서 다루고 있으며 공리를 도입하지 않은 나머지 교과서에 비해 많은 명제를 취급하고 있어 공간기하에 대한 학습 경험의 기회를 보다 많이 제공하여 논리적 사고력 함양에 도움을 주고 있다.

논증기하에서 공리를 도입해야 하는 이유는 논리의 엄밀성을 추구하기 위한 것이라기 보다 공리를 이용하지 않는 명제의 증명은 애매모호한 논리 전개의 위험성에 빠질 가능성이 있기 때문이다.

Ⅲ. 교과서 내용 분석과 문제점 도출 및 개선 방안

1. 교과 내용 비교

6차 교육과정의 12개 수학Ⅱ교과서에서 공간논증기하 단원을 비교 분석한 결과 공간기하의 공리 3개를 기본 성질로 제시한 것은 5개 교과서에 불과하고 나머지는 명제 0-2, 0-3, 0-4의 내용을 평면의 결정조건으로 제시하여 공리를 대신하고 있다(<표 1> 참조). 정리 1~7은 모든 교과서에서 거의 다 취급하고 있는 기본 명제이고 다른 명제의 증명에 이용되는 명제 0-7, 2-1, 2-2, 2-3, 3-5, 3-6, 4-3, 4-6, 5-2 등은 교과내용에 포함시킬 필요성이 있는 중요한 명제라고 생각한다.

2. 직선 · 평면의 위치 관계

조사대상 12개 교과서에서 다음 [명제 0-7]을

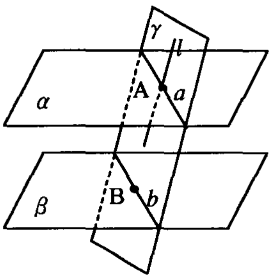
<표 1> 교과 내용 비교표

차례	저자 / 명제	윤옥경	금종해	김연식	이홍천	장태환	박한식	박두일	박세희	양승갑	정봉화	박배훈	박규홍	계	비고	교재 구분
1	기본성질	○	○		○	○				○				5		
2	0-1	○			○									2		
3	0-2	○	○		○	○				○				5		
4	0-3		○		○	○				○				4		
5	0-4		○		○	○				○				4		
6	0-5		○											1		
7	0-6	○			○				○	○	○	○		5		
8	0-7	○			○								○	3	증명 검토, 교과내용 포함 필요	
9	0-8	○	○							○				3	증명 검토	
10	0-9	○												1		
11	정리1	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	12		
12	1-1	○	○	○	○	○	○	○		○	○	○	○	11		
13	1-2	○	○	○	○	○				○	○	○	○	9		
14	1-3	○	○	○	○					○	○			6		
15	1-4	○			○	○	○	○		○		○	○	8		T-1 : 윤옥경
16	1-5		○	○						○	○		○	5		T-2 : 금종해
17	정리2	○	○	○		○	○			○	○	○	○	9		
18	2-1														교과내용 포함 필요	T-3 : 김연식
19	2-2						○							1	증명 검토, 교과내용 포함 필요	T-4 : 이홍천
20	2-3	○	○	○	○					○			○	5	증명 검토	
21	2-4				○			○				○		3		T-5 : 장태환
22	2-5												○	1		T-6 : 박한식
23	3-1	○	○	○	○	○				○		○		7		
24	3-2	○	○						○			○	○	5		T-7 : 박두일
25	3-3	○												1		T-8 : 박세희
26	정리3	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	12		
27	3-4	○			○						○	○	○	5		T-9 : 양승갑
28	3-5			○								○		2	증명 검토, 교과내용 포함 필요	T-10 : 정봉화
29	3-6														교과내용 포함 필요	
30	3-7									○				1		T-11 : 박배훈
31	삼수선정리	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	12		T-12 : 박규홍
32	정리4	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	12		
33	4-1	○	○		○	○	○	○		○	○	○		9		
34	4-2	○	○	○	○		○	○	○			○	○	9		
35	4-3	○											○	2	증명 검토, 교과내용 포함 필요	
36	4-4	○	○	○			○						○	5		
37	4-5	○												1		
38	4-6			○			○			○				3	증명 검토, 교과내용 포함 필요	
39	4-7						○							1		
40	정리5	○	○	○	○	○	○			○	○		○	9		
41	5-1	○		○	○	○	○			○	○		○	8		
42	5-2	○		○									○	3	증명 검토, 교과내용 포함 필요	
43	정리6	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	12		
44	정리7	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	12		
계		31	24	20	25	18	17	11	9	25	16	18	22	234		

다룬 교재는 3개(T-1, T-4, T-12)뿐이나 공간기하 이론 전개에서 필요한 내용이므로 교과 내용에 포함시켜야 한다.[1)]

[명제 0-7] 두 평면 α, β가 평행일 때, α와 한 점에서 만나는 직선 l은 β와도 한 점에서 만난다.

[증명] (i) l이 β와 만나지 않는다고 가정하자.



l이 α와 만나는 점을 A라 하고, l과 β 위의 한 점 B가 결정하는 평면을 γ라 하면 γ와 α는 한 점 A를 지나는 직선 a를 공유하고, γ와 β는 한 점 B를 지나는 직선 b를 공유한다. $\alpha /\!/ \beta$이므로 a와 b는 만나지 않고 같은 평면 γ 위에 있으므로 $a /\!/ a$이다. 또 l과 b는 같은 평면 γ 위에 있고 만나지 않으므로 $l /\!/ b$이다. 따라서 a와 l은 b 밖의 한 점 A를 지나고 모두 b에 평행한 직선이다. 한 직선 밖의 한 점을 지나 이 직선에 평행한 직선은 하나밖에 없으므로 $a=l$이 되어 모순이다. 즉, α와 한 점에서 만나는 직선 l은 β와도 만난다.

(ii) l과 β가 두 점에서 만난다고 가정하면 기본성질 2에 의해 두 점을 지나는 직선 l은 평면 β위에 있으므로 A는 α, β의 공유점이 되어 $\alpha /\!/ \beta$인 조건에 모순이다. 따라서 직선 l은 β와 한 점에서만 만난다.

T-1에서는 다음과 같이 증명되어 있다.

(i) 평면 α 위의 점 A를 지나는 직선 l이 β와 만나지 않는 다고 하자. l을 포함하고 α, β와 직선 a, b에서 만나는 평면 γ를 생각하면 $\alpha /\!/ \beta$이므로 $a /\!/ b$이다. l과 β가 만나지 않으면 평면 γ위에서 $l /\!/ b$이고 l, a는 A를 지나므로 $l=a$가 되어 모순이다.

그러나 T-1에는 "l을 포함하고 α, β와 직선 a, b에서 만나는 평면 γ의 존재"에 대한 논거 제시가 없다.

T-4에서는 다음과 같이 증명되어 있다.

직선 l이 β와 만나지 않는다고 하면, l은 β 위에 있거나 $l /\!/ \beta$이다. 그런데 $\alpha /\!/ \beta$이므로, l은 α 위에 있거나 $l /\!/ \alpha$이다. 이것은 가정에 모순이므로 l은 β와도 만난다.

그러나 "$\alpha /\!/ \beta$이므로, l은 α 위에 있거나 $l /\!/ \alpha$이다."는 논리적인 근거에 의한 결론으로서

1) [명제 0-7]을 증명하는데 필요한 기본 성질과 명제는 다음과 같다.
[기본성질 1] 한 직선 위에 있지 않은 세 점을 지나는 평면은 오직 하나 뿐이다.
[기본성질 2] 한 평면 위의 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 그 평면 위에 있다.
[기본성질 3] 한 점을 공유하는 두 평면은 그 점을 지나는 한 직선을 공유한다.
[두 직선의 위치 관계]
[명제 0-1] 두 직선 l, m이 꼬인 위치에 있을 때, m을 포함하는 평면이 직선 l과 만나면 오직 한 점에서 만난다.
[명제 0-2] 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점을 지나는 평면은 오직 하나 존재한다.
[명제 0-3] 한 점에서 만나는 두 직선을 포함하는 평면은 오직 하나 존재한다.
[명제 0-4] 평행한 두 직선을 포함하는 평은 오직 하나 존재한다.
[명제 0-5] 서로 다른 두 평면이 한 점을 공유하면, 이 두 평면은 단 하나의 직선을 공유한다.
[두 평면의 위치 관계]
[평면의 교선과 평행의 정의 및 기호]
[명제 0-6] 두 평면 α, β가 평행일 때, α 위의 임의의 직선을 l이라고 하면 l과 β는 서로 만나지 않는다. 즉, $l /\!/ \beta$

적당하지 않다.

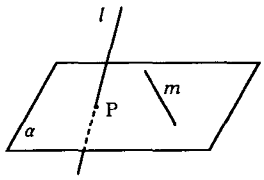
T-12에서는 다음과 같이 증명되어 있다.

l이 β와 만나지 않으면 $l /\!/ \beta \Rightarrow \alpha /\!/ \beta$이므로 $l /\!/ \alpha$. 이것은 가정에 모순이므로 l과 β는 만난다.

그러나 "$l /\!/ \beta \Rightarrow \alpha /\!/ \beta$이므로 $l /\!/ \alpha$"는 논리적인 근거에 의한 결론으로서 적당하지 않다.

[명제 0-8]을 다룬 책도 세 가지(T-1, T-2, T-9) 있으나 다음과 같이 증명되어야 한다.[2)]

[명제 0-8] 평면 α와 직선 l이 한 점 P에서 만날 때, P를 지나지 않는 α 위의 임의의 직선 m은 직선 l과 꼬인 위치에 있다.



[증명] 직선 l이 직선 m과 만나지 않음은 명백하다. 직선 l이 직선 m과 평행하다고 하면 l과 m이 결정하는 평면을 β라 할 때, β는 m과 점 P를 포함하므로 m과 점 P가 결정하는 평면 α와 일치한다. 따라서 평면 α는 직선 l을 포함하게 되어 모순이다. 그러므로 직선 l과 직선 m은 평행하지 않다. 직선 l이 직선 m과 만나지 않고 평행하지도 않으므로 l과 m은 꼬인 위치에 있다.

T-1에서는 다음과 같이 진술되어 있다.

l, m은 만나지도 않고, 동일 평면상에 있지 않으므로 l, m은 꼬인 위치에 있다.

그러나 "l, m이 동일 평면상에 있지 않다는 것"에 대한 논거를 제시해야 한다.

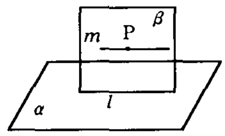
[명제 0-9]는 한 책(T-1)에만 제시되어 있으나 필요하다.

[명제 0-9] 두 직선 l, m이 꼬인 위치에 있을 때, 직선 l을 포함하는 평면 α가 직선 m과 한 점 P에서 만난다고 한다. 평면 α 위에서 P를 지나고 l과 평행인 직선을 l'이라 하면 l'과 m이 결정하는 평면 β는 직선 l에 평행하다.

2. 평행과 수직

조사대상 12개 교과서에서 명제 2-1을 다룬 교재는 하나도 없으나 명제 2-2의 증명을 위해 필요한 명제이다.

[명제 2-1] 평면 α 밖의 한 점 P를 지나고, α 위의 직선 l과 평행한 직선 m은 단 하나 존재하며 평면 α와 평행하다.



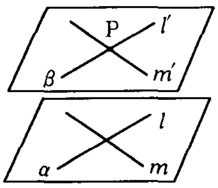
[증명] 직선 l과 점 P가 결정하는 평면을 β라 하자. β 위에서 P를 지나고 l에 평행한 직선 m은 오직 하나 존재한다. m이 평면 α와 한 점에서 만난다고 가정하면 그 교점은 α, β의 교선 l 위에 있게되고 이 교점은 l, m의 공유점이 되므로 모순. 따라서, $m /\!/ \alpha$.

조사대상 12개 교과서에서 명제 2-2를 다룬 교재는 한 책(T-6)뿐이나 이 명제의 증명 없이 이를 명제 2-3의 증명에 이용하는 교과서가 있다. 명제 2-2는 논증기하 지도를 위해 필요한

2) 명제 2-1을 다루는데 필요한 성질은 다음과 같다.
[직선과 평면의 위치 관계]
[직선과 평면의 교점과 직선과 평면의 평행의 정의와 기호]

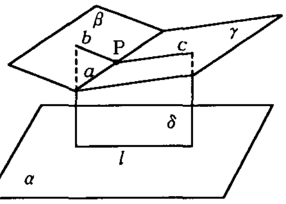
명제라고 생각하며 교과 내용에 포함시킬 필요가 있다.[3]

[명제 2-2] 평면 α 밖의 한 점 P를 지나고, α와 평행한 평면은 오직 하나 있다.



[증명] (i) 평면 α 위에서 만나는 임의의 두 직선을 l, m이라하고, P를 지나고 l, m과 평행한 직선을 각각 l', m'라 하면 명제 2-1에 의하여 $l'//\alpha$, $m'//\alpha$. 따라서 정리 2에 의하여 $\beta//\alpha$

(ii) α와 평행한 평면은 오직 하나 있음을 보이자.



P를 지나고 α와 평행한 평면이 β, γ의 두 개가 있다고 가정하고 β, γ의 교선을 a라 하자. α 위에서 a와 평행이 아닌 직선을 l라 하고, 직선 l과 점 P가 결정하는 평면 δ와 β, γ의 교선을 각각 b, c라 하면 $l//\beta$, $l//\gamma$이므로 $l//b$, $l//c$ 이다. l 밖의 한 점 P를 지나고 l에 평행한 직선은 오직 하나 뿐이므로 b와 c는 일치한다. 따라서 a와 b, a와 c가 결정하는 두 평면 β, γ는 일치한다. 그러므로 α 밖의 한 점 P를 지나고, α와 평행한 직선은 오직 하나 있다.

T-6에서는 명제 2-1를 제시하지 않고 명제 2-2를 증명하고 있으나 '평면α의 유일성에 대한 증명'이 필요하다.

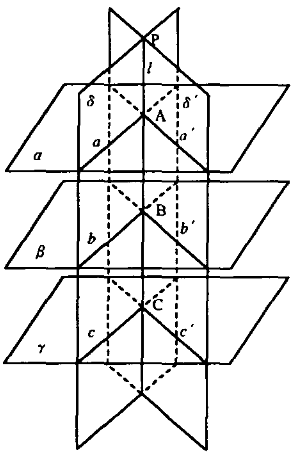
조사대상 12개 교과서에서 명제 2-3을 다룬 교과서는 T-1, T-2, T-3, T-4, T-9, T-12의 6가지가 있으나 존재성의 증명이 필요한 T-1을 제외하면 증명되지 않은 명제를 추론의 근거로 삼거나 또는 논리적 추론이 합당하지 않는 결함을 갖고 있다. 명제 2-3을 증명하는 데 추론의 근거로 삼은 명제 0-7이나 명제 2-2는 모든 교과서에서 취급을 해야할 중요한 명제라고 판단된다.

[명제 2-3] 세 평면 α, β, γ에 대하여, $\alpha//\beta$, $\beta//\gamma$ 이면 $\alpha//\gamma$ 이다.

[증명] 평면 α 위의 한 점 A와 α 밖의 한 점 P를 지나는 직선 l은 명제 0-7에 의해 평면 β, γ와 각각 점 B, C에서 만난다. A에서 만나는 α 위의 두 직선을 a, a'라 하고, l과 a, l과 a'에 의해 결정되는 평면을 각각 δ, δ'라 하면, δ와 β의 교선 b, δ와 γ의 교선 c에 대하여 $a//b$이고 $b//c$이므로 $a//c$이다. δ'과 β의 교선 b', δ'과 γ의 교선 c'에 대하여

3) 명제 2-2를 다루는데 필요한 성질은 다음과 같다.
[정리 1] 직선 a와 평면 α가 평행할 때, a를 포함하는 평면β와 α의 교선 b는 직선 a에 평행하다.
[명제 1-1] 평행한 두 직선 l, m 중에서 l 만을 포함하는 평면 α는 직선 m에 평행하다.
[명제 1-2] 두 직선 l, m이 평행할 때, l, m을 하나씩만 품는 두 평면 α, β의 교선 n은 직선 l, m에 모두 평행하다.
[명제 1-3]세 직선 l, m, n에 대하여 $l//m$, $m//n$ 이면 $l//n$이다.
[명제 1-4]평행한 두 평면 α, β가 다른 한 평면 γ와 만날 때, 그 교선을 각각 a, b라 하면 a//b이다.
[명제 1-5]직선 l과 평면 α가 평행할 때, l을 품는 두 평면과 α와의 교선을 각각 m, n이라고 하면, $m//n$이다.
[정리 2] 평면 α 밖의 한 점 P를 지나는 두 직선 a, b가 모두 α에 평행하면 a, b로 결정되는 평면 β는 α에 평행하다.

$a' /\!/ b'$ 이고 $b' /\!/ c'$ 이므로 $a' /\!/ c'$ 이다. $a /\!/ c$이고 c를 포함하는 평면이 γ이므로 $a /\!/ \gamma$, $a' /\!/ c'$이고 c'를 포함하는 평면이 γ이므로 $a' /\!/ \gamma$. 따라서 γ 밖의 한 점 A를 지나고 γ에 평행한 두 직선 a, a'이 결정하는 평면 α는 평면 γ와 평행하다.



T-1에서의 증명은 세 평면 α, β, γ와 만나는 두 평면 δ, δ'의 존재성에 대한 서술 없이 논리를 전개하고 있어 직관에 의존한 증명이 되고 있다.

T-2, T-9에서는 다음과 같이 다루고 있다.

α와 γ가 평행이 아니면 α, γ는 한 점 P를 공유한다. 따라서 β 위에 없는 점 P를 지나 β에 평행한 두 평면 α, γ가 존재하게 되어 모순이다. 따라서 $\alpha /\!/ \gamma$.

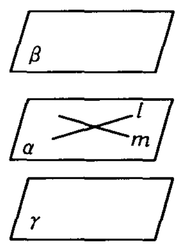
그러나 "β 위에 없는 점 P를 지나 β에 평행한 두 평면 α, γ가 존재하게 되어 모순이다."는 명제 2-2를 이용하고 있으나 T-2, T-9에서는 명제 2-2를 제시하지 않고 있어 추론의 정당성을 확보하지 못하고 있다.

T-3에서는 다음과 같이 증명하고 있다.

$\alpha /\!/ \beta$, $\beta /\!/ \gamma$라고 하자. 평면 α 위에서 서로 만나는 두 직선 l, m을 잡으면,

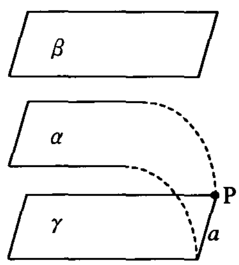
$$l /\!/ \beta,\ m /\!/ \beta \cdots ①$$

그런데 직선 l, m은 평면 α 위의 직선이므로, 평면 γ와는 서로 평행하거나 한 점만을 공유한다. 또한 $\beta /\!/ \gamma$이므로 직선 l, m이 γ와 한 점을 공유하면, 직선 l, m은 평면 β와도 한 점을 공유하게 되어 ①에 모순이다. 따라서, $l /\!/ \gamma$, $m /\!/ \gamma$이고, $\alpha /\!/ \gamma$이다.



그러나 "$\beta /\!/ \gamma$이므로 직선 l, m이 γ와 한 점을 공유하면, 직선 l, m은 평면 β와도 한 점을 공유하게 되어"는 직관에 의한 논거 제시가 되어 증명의 정당성을 확보하지 못하고 있다. 이는 "평행한 두 평면 중 한 평면과 만나는 직선은 다른 직선과도 만난다.(명제 0-7)"를 추론의 근거로 제시하여야 하나 T-3에서는 이 명제를 다루지 않고 있다.

T-4에서는 다음과 같이 다루고 있다.



α와 γ가 평행이 아니라 하면, 그 교선을 a라 할 때 $a /\!/ \beta$. 직선 위의 한 점을 P라 하면 α와 γ는 각각 한 점 P를 지나 β와 평행한 평면이다. 이것은 평면 밖의 한 점을 지나 이 평면에 평행인 평면은 하나뿐이라는 데 모순이다. 그러므로 $\alpha /\!/ \gamma$.

그러나 "α와 γ는 각각 한 점 P를 지나 β

와 평행한 평면이다. 이것은 평면 밖의 한 점을 지나 이 평면에 평행인 평면은 하나뿐이라는 데 모순이다."는 명제 2-2를 이용하고 있으나 T-4에서는 명제 2-2를 제시하지 않고 있어 추론의 정당성을 확보하지 못하고 있다.

T-12에서는 다음과 같이 증명되어 있다.

평면 β 위에 한 점에서 만나는 두 직선을 a, b라 하면 $\alpha /\!/ \beta \Rightarrow a /\!/ \alpha$, $b /\!/ \alpha$. 또한 $\beta /\!/ \gamma \Rightarrow a /\!/ \gamma$, $b /\!/ \gamma$. 정리 2에 의하여 $\alpha /\!/ \gamma$.

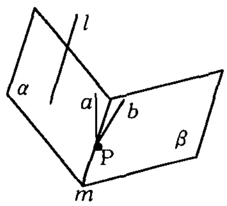
그러나 "정리 2에 의하여 $\alpha /\!/ \gamma$"라는 결론은 전혀 논리적 추론의 결과가 될 수 없다.

다음 [명제 2-4]를 다룬 책은 3가지, [명제 2-5를 다룬 책은 한가지에 불과했다.

[명제 2-4] 서로 다른 세 평면 α, β, γ에 대하여, $\alpha /\!/ \beta /\!/ \gamma$라 하자. 두 직선 l, l'이 각각 세 평면과 A, B, C, A′, B′, C′ 에서 만날 때, $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{B'C'}$ 가 성립한다.

[명제 2-5] 한 직선 l에 평행한 두 평면 α, β의 교선 m은 l과 평행하다.

[증명] 직선 l과 m 위의 점 P에 의해 결정되는 평면과 평면 α의 교선을 a, 직선 l과 점 P에



의해 결정되는 평면과 평면 β의 교선을 b라 하면, $l /\!/ \alpha$이므로 $l /\!/ a$이고, $l /\!/ \beta$이므로 $l /\!/ b$이다. l 밖의 한 점 P를 지나고 l과 평행인 직선은 하나뿐이므로 $a = b = m$. 그러므로 $l /\!/ m$이다.

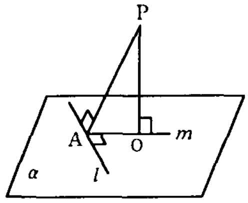
조사대상 12개 교과서에서 명제 3-5을 다룬 교과서는 T-3, T-11의 2가지뿐이나 이 명제를 이용하여 정사영 개념을 다루게 되므로 교과내용에 포함시킬 필요가 있다고 보며 수선의 유일성 과 아울러 존재성에 대한 문제도 함께 취급해야 한다.[4]

[명제 3-5] 평면 α 밖의 한 점 P에서 α에 내린 수선은 오직 하나 있다.
[증명] (i) P에서 α에 그은 수선이 존재함을 보이자.

P에서 α 위에 있는 임의의 직선 l에 그은 수선의 발을 A, α 위에서 A를 지나고 l에 수직인 직선 m을 그어 P에서 m에 내린 수선의 발을 O

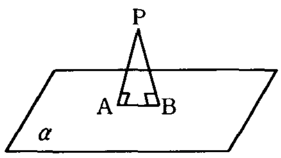
---

4) 명제 3-5를 다루는데 필요한 성질은 다음과 같다.
<꼬인 위치에 있는 두 직선이 이루는 각의 크기>
[정의] 두 직선 a, b가 꼬인 위치에 있을 때, 한 점 O를 잡아, 이 점을 지나 a, b에 평행인 직선을 각각 a', b'라 하면 두 직선 a', b'이 이루는 각의 크기를 두 직선 a, b가 이루는 각의 크기라고 한다.
[명제 3-1] 두 직선 a, b가 꼬인 위치에 있을 때 한 점 O를 잡고, O를 지나고 a, b에 평행한 직선을 각각 a', b'라 하면 두 직선 a', b'이 이루는 각의 크기는 O의 위치에 관계없이 일정하다.
[정의] 두 직선 a, b가 이루는 각의 크기가 직각일 때, 두 직선 a, b는 서로 수직이라 하고 $a \perp b$로 나타낸다.
<직선과 평면의 수직>
[정의] 직선 l이 평면α와 점 O에서 만나고, 점 O를 지나는 α 위의 모든 직선과 수직일 때, 직선 l은 평면 α와 수직이라 하고, 기호 $l \perp \alpha$로 나타낸다. 이 때 직선 l을 평면 α의 수선이라 하고, 점 O를 수선의 발이라고 한다.
[명제 3-2] 직선 l과 평면α가 수직이기 위한 필요충분조건은 l이 α 위의 모든 직선과 수직인 것이다.
[명제 3-3] 평행한 두 직선 l, m에 대하여 l이 평면α와 수직이면 $m \perp \alpha$ 이다.
[정리 3] 직선 l이 평면 α 위의 점 O를 지나고, O를 지나는 α 위의 서로 다른 두 직선 a, b에 수직이면 $l \perp \alpha$이다.
[명제 3-4] 평면 α 위에서 만나는 두 직선 a, b에 수직인 직선 l은 평면α와 수직이다.



라 하면 l은 한 점 A에서 만나는 두 직선 m, $\overleftrightarrow{AP}$ 에 수직이므로 $l \perp (\triangle AOP$평면). 따라서 $\overleftrightarrow{PO} \perp l$, $\overleftrightarrow{PO} \perp m$. 그러므로 $\overleftrightarrow{PO} \perp \alpha$.

(ii) 수선이 유일함을 보이자.



P에서 α에 내린 수선이 두 개 있고, 그 수선의 발을 각각 A, B라고 하면 △PAB의 세 내각의 합이 180° 보다 크게 되어 모순이다.

T-3의 증명에서는 P에서 평면 α에 그은 수선의 존재성에 대한 증명이 없다.

T-11에서는 다음과 같이 증명하고 있다.

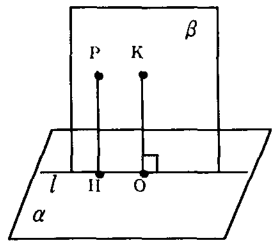
점 P에서 평면 α에 두 수선 $\overline{PO}$, $\overline{PO'}$을 긋는다고 가정하자. 즉, $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{PO'} \perp \alpha$. 동위각이 90° 이므로 $\overline{PO} // \overline{PO'}$. 그런데 가정에서 $\overline{PO}$와 $\overline{PO'}$은 점 P에서 만나므로 모순이다. 따라서 $\overline{PO}$와 $\overline{PO'}$은 일치한다.

그러나 T-11의 증명에서는 P에서 평면 α에 그은 수선의 존재성에 대한 증명이 없다.

다음 [명제 3-6]과 [명제 3-7]를 다룬 책은 거의 없다.

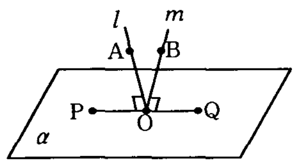
[명제 3-6] 평면 α위의 한 점 O에서 α에 그은 수선은 오직 하나 있다.

[증명] (i) O에서 그은 수선이 존재함을 보이자.



α 밖의 한 점 P에서 α에 내린 수선의 발을 H라 하면(명제3-5) H가 O일 때는 $\overleftrightarrow{PH} = \overleftrightarrow{PO}$ 가 O에서 α에 그은 수선이 된다. H가 O와 같지 않을 때, $\overleftrightarrow{PH}$ 와 O에 의해 결정되는 평면을 β, β와 α의 교선을 l라 하면 l은 점 O를 지난다. β위에서 O를 지나 $\overleftrightarrow{PH}$ 와 평행인 직선 $\overleftrightarrow{OK}$ 를 그으면 $\overleftrightarrow{OK} \perp \alpha$

(ii) 수선이 유일함을 보이자.



O에서 α에 그은 수선이 l, m의 두 개가 있다고 가정하면 한 점 O에서 만나는 두 직선 l, m이 결정하는 평면과 α와의 교선 위에서 O에 관하여 반대쪽에 있는 두 점을 P, Q라 할 때 l 위의 한 점 A와 m위의 한 점 B에 대하여 (∠AOP의 보각의 크기) = 90° = ∠AOQ = (∠AOB + ∠BOQ)>90°가 되어 모순이다.

[명제 3-7] 한 직선 a에 수직인 서로 다른 두 평면 α, β는 서로 평행하다.

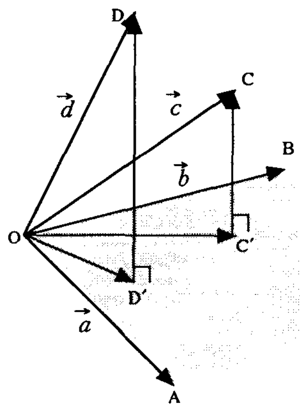
3. 이면각

<두 평면이 이루는 각의 크기>

조사대상 12개 교과서에서 명제 4-3을 다룬 교과서는 T-1, T-12의 2가지뿐이나 이 명제를 이용하여 평행한 두 평면 사이의 거리(명제5-2)를 다루게 되므로 교과내용에 포함시킬 필요가 있다. 또한 이를 이용하면 "3차원 공간상에서

3개의 일차독립인 벡터가 있을 때 임의의 벡터는 이들 3 개의 벡터의 일차결합으로 표시됨(명제 A)"을 기하학적으로 다음과 같이 보일 수 있으며 "3차원 공간상의 두 점이 한 평면에 대하여 같은 쪽에 있을 조건(명제 B)"을 구할 수 있다.[5]

[명제 A] 같은 평면 위에 없는 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 주어질 때, 공간상에 있는 임의의 벡터 $\vec{d}$에 대하여 $\vec{d}=k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}$를 만족하는 실수 k, l, m이 존재한다.



[증명] $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$, $\vec{d}=\overrightarrow{OD}$라 하고, C, D에서 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 가 결정하는 평면에 내린 수선의 발을 각각 C′, D′라 하면, $\overrightarrow{OC'}=k_1\vec{a}+l_1\vec{b}$, $\overrightarrow{OD'}=k_2\vec{a}+l_2\vec{b}$인 실수 k_1, l_1, k_2, l_2가 존재한다.

$$\overrightarrow{C'C}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC'}=\vec{c}-(k_1\vec{a}+l_1\vec{b})$$

$$\overrightarrow{D'D}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OD'}=\vec{d}-(k_2\vec{a}+l_2\vec{b})$$

$\overrightarrow{C'C}\,/\!/\,\overrightarrow{D'D}$이므로 $\overrightarrow{D'D}=m\overrightarrow{C'C}$인 실수 m이 존재한다.

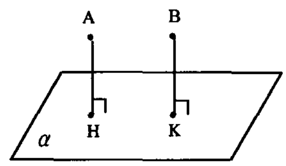
$$\vec{d}-(k_2\vec{a}+l_2\vec{b})=m\{\vec{c}-(k_1\vec{a}+l_1\vec{b})\}$$

따라서 $\vec{d}=k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}$인 실수 k, l, m이 존재한다. (단, $k=k_2-mk_1$, $l=l_2-ml_1$)

[명제 B] 공간의 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_1, y_1, z_1)$가 평면 α: $ax+by+cz=0$에 대하여 같은 쪽에 있을 조건은

$$(ax_1+by_1+cz_1)(ax_2+by_2+cz_2)>0$$

[증명] A, B에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 H, K라 하면



$\overrightarrow{AH}=(at,\ bt,\ ct)$, $\overrightarrow{BK}=(ak,\ bk,\ ck)$ 단,

$$t=\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{a^2+b^2+c^2},\quad k=\frac{ax_2+by_2+cz_2+d}{a^2+b^2+c^2}$$

A, B가 평면 α에 대하여 같은 쪽에 있다.

⇔ 선분 AB 와 α는 만나지 않는다.

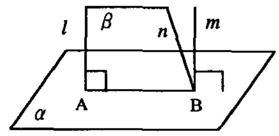
⇔ $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{BK}$ 는 같은 방향

⇔ $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BK}$

$$=\frac{(ax_1+by_1+cz_1+d)(ax_2+by_2+cz_2+d)}{a^2+b^2+c^2}>0$$

⇔ $(ax_1+by_1+cz_1+d)(ax_2+by_2+cz_2+d)>0$

[명제 4-3] 서로 다른 두 직선 l, m 이 평면 α에 수직이면 $l\,/\!/\,m$ 이다.



5) [정의] 두 평면 α, β가 만날 때, 그 교선 l을 경계로 하여 두 반평면이 이루는 도형을 이면각이라고 한다. 이 때, 교선 l을 이면각의 변, 두 반평면 α, β를 이면각의 면이라고 한다. 이면각의 한 변 위의 한 점 O를 지나 각 면 위에서 변에 수선 a, b를 그으면 이 두 수선이 이루는 각의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 일정하다. 이 각의 크기 θ를 이면각의 크기라고 한다. 두 평면이 만나면 4개의 이면각이 생긴다. 그 중에서 한 이면각의 크기를 두 평면이 이루는 각이라고 한다. 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 직각일 때, 두 평면은 서로 수직이라 하고, 기호 $\alpha\perp\beta$로 나타낸다.

[정리 4] 한 평면 α 에 수직인 직선 a를 포함하는 평면을 β라고 하면 $\alpha\perp\beta$이다.

[명제 4-1] 평면 α에 수직인 평면 β 위의 점 A에서 α, β의 교선 l에 그은 수선은 평면α와 수직이다.

[명제 4-2] 평면 α에 수직인 평면 β,γ의 교선 l은 평면 α에 수직이다.

[증명] 직선 l, m과 평면 α의 교점을 각각 A, B라 하자. 직선 l과 점 B가 결정하는 평면을 β라 할 때, β위에서 B를 지나고 직선 l과 평행한 직선을 n라 하면 $l \perp \alpha$이므로 $n \perp \alpha$. 따라서 두 직선 m, n은 α 위의 한 점 B에서 α에 그은 수선이다. 그런데 α 위의 한 점 B에서 α에 그은 수선은 오직 하나뿐이므로(명제 3-6) $m=n$이고, $l /\!/ n$이므로 $l /\!/ m$이다.

T-1에서는 다음과 같이 증명하고 있다.

$l \perp \alpha$, $m \perp \alpha$라하고 l, m과 α와의 교점을 각각 A, B라 하면 $l \perp \overline{AB}$, $m \perp \overline{AB}$. 또 $\overline{AB}$, l을 포함하는 평면을 β라 하면 $\beta \perp \alpha$. 또 $\overline{AB}$, m을 포함하는 평면을 γ라 하면 $\gamma \perp \alpha$. 따라서 평면 α 위의 직선 AB를 포함하고 α에 수직인 평면은 하나뿐이므로 $\beta=\gamma$. 그러므로, $l /\!/ m$

그러나 "평면 α 위의 직선 AB를 포함하고 α에 수직인 평면은 하나뿐이므로 $\beta=\gamma$"에서 "한 평면 위의 한 직선을 포함하고 이 평면에 수직인 평면은 하나뿐이다"라는 명제는 T-1에는 증명이 제시되지 않은 명제이므로 이를 이용한 증명은 논리의 비약이다.

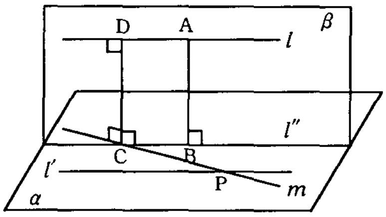
T-12에서는 다음과 같이 증명하고 있다.

$l \perp \alpha$, $m \perp \alpha$라하고 l, m과 α와의 교점을 각각 A, B라 하자. 직선 l과 점 B가 결정하는 평면을 β라 하면 $\beta \perp \alpha$. 그런데 직선 m도 점 B에서 α와 수직이고 α와 β의 교선 AB와도 수직이므로 직선 m은 평면 β 위에 있다. 따라서 l, m은 같은 평면 β위에 있으므로 $l /\!/ m$이다.

그러나 "직선 m도 점 B에서 α와 수직이고 α와 β의 교선 AB와도 수직이므로 직선 m은 평면 β 위에 있다."는 증명이 제시되어야 할 명제이므로 증명 없이 이를 이용한 것은 논리의 비약이다.

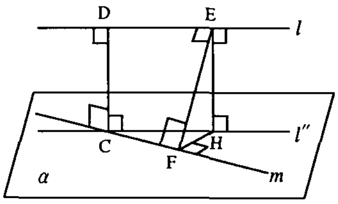
조사대상 12개 교과서에서 명제 4-6을 다룬 교과서는 T-3, T-6, T-9의 3가지뿐이다. 공통수선의 문제는 중요한 내용이므로 교과내용에 포함시킬 필요가 있다.[6]

[명제 4-6] 꼬인 위치에 있는 두 직선 l, m에 공통인 수선은 오직 하나 있다.
[증명] (i) 공통수선이 존재함을 보이자.



직선 m 위의 한 점 P를 지나고 직선 l과 평행인 직선 l'과 m에 의해 결정되는 평면을 α라 하면 명제 2-1에 의해 $l /\!/ \alpha$이다. l 위의 한 점 A에서 α에 그은 수선의 발을 B라 하면 점 B와 직선 l에 의해 결정되는 평면 β와 α의 교선 l''은 정리 1에 의해 l과 평행하다. l''과 m은 평행이 아니므로 한 점 C에서 만난다. C에서 l에 그은 수선의 발을 D라 하면 $\overleftrightarrow{CD} /\!/ \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \alpha$이므로 $\overleftrightarrow{CD} \perp \alpha$. 따라서 $\overleftrightarrow{CD} \perp m$이다. 즉, 선분 CD는 l과 m의 공통수선이다.
(ii) 공통수선이 유일함을 보이자.
공통수선이 오른쪽 그림에서와 같이 $\overline{CD}$, $\overline{EF}$의 두 개가 있다고 하자. E에서 l''에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{EH} \perp \alpha$ $l /\!/ l''$, $l \perp \overline{EF}$이

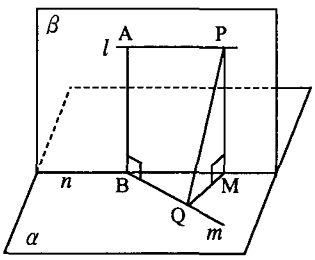
6) 명제 4-6을 다루는데 필요한 성질은 다음과 같다.
[명제 4-4] 세 평면 α, β, γ 중 어느 두 평면도 서로 수직이면 각각 그 두 평면에 의해 결정되는 세 교선은 서로 수직이다.
[명제 4-5] 서로 수직인 두 평면 α, β의 교선 l 위의 점 P를 지나고 l에 수직인 평면을 γ, 평면 β, γ의 교선을 m, 평면 γ, α의 교선을 n이라 하면 (1) $l \perp m$, $m \perp n$, $n \perp l$ (2) $\gamma \perp \alpha$, $\gamma \perp \beta$



므로 $l'' \perp \overline{EF}$, $l'' \perp \overline{EF}$, $m \perp \overline{EF}$이므로 $\overline{EF}$ 는 l'', m이 결정하는 평면 α와 수직이다. 한 점 E에서 평면 α에 내린 수선이 $\overline{EF}$, $\overline{EH}$ 의 두 개가 있으므로 모순이다. 따라서 $\overline{EF}$ 는 공통 수선이 아니고 공통수선은 $\overline{CD}$의 하나뿐이다.

T-3에서는 다음과 같이 증명되고 있다.

아래 그림과 같이 직선 m을 포함하고, 직선 l에 평행한 평면 α와, l을 포함하고 α에 수직인 평면 β를 만든다.

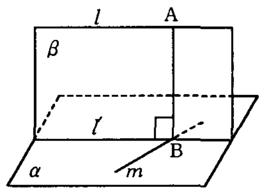


(i) 먼저 존재성에 대하여 밝혀 보자. 직선 m과 교선 n과의 교점 B에서 n에 수선을 그어 l과의 교점을 A라고 하면, $l /\!/ n$이므로 $\overleftrightarrow{AB} \perp l$. 또, $\overleftrightarrow{AB} \perp \alpha$이므로 $\overleftrightarrow{AB} \perp m$. 따라서, $\overleftrightarrow{AB}$는 l, m에 직교한다.

(ii) 오직 하나 있음을 밝히자. $\overleftrightarrow{AB}$ 이외에 l, m에 직교하는 직선 PQ가 있다고 하면, $l \perp \overleftrightarrow{PQ}$, $l /\!/ n$이므로 $\overleftrightarrow{PQ} \perp n$. $m \perp \overleftrightarrow{PQ}$이므로 $\overleftrightarrow{PQ} \perp \alpha$. 따라서 $\overleftrightarrow{PQ}$와 $\overleftrightarrow{AB}$는 일치한다.

그러나 "직선 m을 포함하고, 직선 l에 평행한 평면 α와, l을 포함하고 α에 수직인 평면 β"의 존재성에 대한 증명이 필요하고, "$m \perp \overleftrightarrow{PQ}$이므로 $\overleftrightarrow{PQ} \perp \alpha$. 따라서 $\overleftrightarrow{PQ}$와 $\overleftrightarrow{AB}$는 일치한다."라는 추론의 결과는 논리의 비약이다. 왜냐하면, "Q는 P에서 α에 그은 수선의 발이 되므로 Q는 α, β의 교선 n 위에 있게 되어 Q와 B는 일치하고 α 위의 한 점 B(=Q)에서 α에 그은 수선은 하나뿐이므로 $\overleftrightarrow{PQ}$와 $\overleftrightarrow{AB}$는 일치한다."라고 서술되어야 하기 때문이다.

T-6에서는 다음과 같이 증명되고 있다.



m을 포함하면서 l과 평행한 평면을 α라하고, 직선 l의 평면 α 위로의 정사영을 l', l과 l'을 포함하는 평면을 β라고 하자. 이 때, l'과 m이 만나는 점을 B라 하고, B를 지나서 l'에 수직인 직선을 β 위에 그어 l과의 교점을 A라고 하면, $l /\!/ \alpha$이므로 $l /\!/ l'$이다. 따라서,

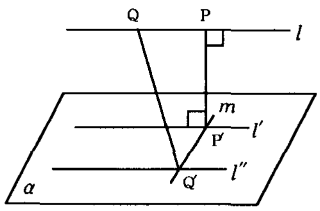
$\overline{AB} \perp l'$, $\overline{AB} \perp l$ …①

또, l'은 직선 l의 α 위로의 정사영이므로, l과 l'을 포함하는 평면 β는 α와 수직이다. 따라서, $\overline{AB} \perp m$ …②

①, ②에서 $\overline{AB}$ 는 l, m의 공통수선이다.

그러나 "m을 포함하면서 l과 평행한 평면 α"의 존재성에 대한 문제가 제기되며 공통수선의 유일성에 대한 증명이 필요하다.

T-9에서는 다음과 같이 증명하고 있다.



꼬인 위치에 있는 두 직선 l, m에 대하여 m을 품고 l에 평행인 평면을 α라고 하자. 직선 l의 평면 α 위로의 정사영을 l'라 하면 $l // l'$. 그런데 l과 m은 꼬인 위치에 있으므로 l'과 m은 한 점 P'에서 만나는 서로 다른 직선이다. 이제 α 위로의 정사영이 P'이 되는 직선 l위의 점을 P라 하면 $\overleftrightarrow{PP'} \perp l$, $\overleftrightarrow{PP'} \perp m$. 한편 직선 QQ'이 직선 l, m과 각각 점 Q, Q'에서 수직으로 만난다고 하자. $\overline{QQ'} \perp l$ $(\because l // l', \overline{QQ'} \perp l)$ 이므로 Q'은 Q의 평면 α 위로의 정사영이다. 따라서 Q'은 l'위로의 점이어야 하므로 Q' =P'. 그러므로 l, m과 수직으로 만나는 직선은 PP' 하나뿐이다.

그러나 "Q'은 l'위로의 점이어야 하므로 Q' =P'이고 l, m과 수직으로 만나는 직선은 PP' 하나뿐이다."는 T-3과 마찬가지로 논리의 비약이다.

다음 명제를 다루고 있는 책은 한 곳 뿐이다.

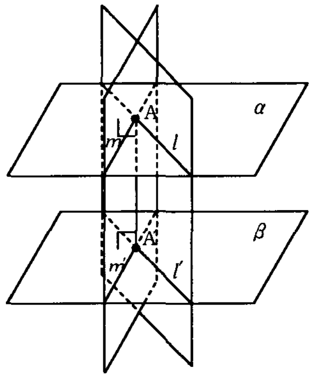
[명제 4-7] 꼬인 위치에 있는 두 직선 l, m에 공통인 수선은 이 두 직선 위에 있는 한 점씩을 잡아 연결한 선분 중에서 길이가 가장 짧은 것이다.

4. 정사영

[명제 5-2]를 다루는 책은 별로 없다.[7]

[명제 5-2] 평행한 평면 α, β가 있을 때, 평면 α 위의 한 점 A의 β 위로의 정사영을 A'이라고 하면 선분 AA'은 α, β의 공통 수선이고, 그 길이는 A의 위치에 관계없이 일정하다.

[증명] (i) 선분 AA'은 α, β의 공통 수선임을 보이자.

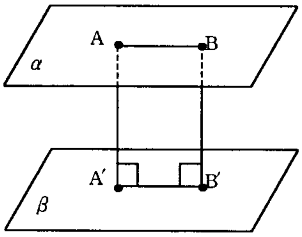


평면 α 위에서 점 A를 지나는 서로 다른 두 직선을 l, m 라하고, l과 점 A'이 결정하는 평면을 γ, γ와 β의 교선을 l', m과 점 A'이 결정하는 평면을 δ, δ와 β의 교선을 m'라 하면 $\overleftrightarrow{AA'} \perp \beta$이므로 $\overleftrightarrow{AA'} \perp l'$, $\overleftrightarrow{AA'} \perp m'$. $\alpha // \beta$ 이므로 α 위의 직선 l과 β위의 직선 l'은 만나지 않고 l, l'은 같은 평면 γ위에 있으므로 $l // l'$이고 $\overleftrightarrow{AA'} \perp l'$이므로 $\overleftrightarrow{AA'} \perp l$. 같은 방법으로 생각하면 $\overleftrightarrow{AA'} \perp m$임을 알 수 있다. 따라서 $\overleftrightarrow{AA'}$은 두 직선 l, m이 결정하는 평면 α와 수직이다.

(ii) 선분 AA'의 길이는 A의 위치에 관계없이 일정함을 보이자.

---

7) 명제 5-2를 다루는데 필요한 성질은 다음과 같다.
[정의] 평면 α 밖의 점 A에서 평면 α에 그은 수선의 발 A'을 점 A의 평면 α위로의 정사영이라고 하고, 선분 AA'의 길이를 점 A와 평면 α 사이의 거리라고 한다. 일반적으로 도형 F에 속하는 각 점의 평면 α 위로의 정사영으로 이루어진 도형 F'을 도형 F의 평면 α위로의 정사영이라 하고, 평면 α를 투영면이라고 한다.
<정리 5> 평면 α 에 수직이 아닌 직선 l 의 평면α 위로의 정사영은 직선이다.
[명제 5-1] 두 평면 α, β의 교선을 l이라 하고, 직선 m이 평면 α에 수직일 때, m의 β위로의 정사영m'은 l의 수직이다.
[평행한 두 평면 사이의 거리]
평행한 평면 α, β가 있을 때, 평면 α 위의 한 점 A의 β 위로의 정사영을 A'이라고 하면 선분 AA'은 α, β의 공통 수선이고, 그 길이는 A의 위치에 관계없이 일정하다. 길이를 평행한 두 평면 사이의 거리라고 한다.



평면 α 위의 A 아닌 한 점 B를 잡고 B의 평면 β 위로의 정사영을 B′라 하면 한 평면 β에 수직인 두 직선 AA', BB'은 서로 평행하고, $\alpha /\!/ \beta$이므로 선분 AB와 선분 A′B′은 평행하다. 따라서 □$AA'BB'$ 직사각형이다. 그러므로, $\overline{AA'}=\overline{BB'}$. 즉, 선분AA′의 길이는 A의 위치에 관계없이 일정하다.

T-1에서는 선분AA′이 공통수선임을 보이지 않고 있다.

T-3, T-12에서 명제 "두 평면 α, β가 평행하고, 직선 l이 평면 α와 수직이면, l은 α와도 수직이다."의 증명에서 "명제 0-7: 두 평면 α, β가 평행일 때, α와 한 점에서 만나는 직선 l은 β와도 한 점에서 만난다."에 대한 사전 서술 없이 직관적으로 성립함이 명백함을 이용하여 논리를 전개하는 것은 논증기하 논리 전개의 취지에 적합하지 않다.

IV. 결론 및 제언

고등학교 수학Ⅱ 교과에서는 공간에서의 직선·평면의 위치 관계 등 공간도형에 관한 기본 성질을 이해하고, 공간 지각력을 획득할 수 있도록 교과내용이 구성되어 있다.

수학Ⅱ 논증기하 단원에서 다루어지는 명제들은 직관적으로 참이라는 것을 쉽게 납득할 수 있는 것들이다. 교육부에서 펴낸「고등학교 수학과 교육과정 해설」에 의하면 「공간도형을 지도하는 데 있어서는 공리계를 이용하여 엄밀성을 추구하는 것보다 직관에 의해 쉽게 이해할 수 있도록 하는 것이 바람직하다.」고 기술되어 있다. 이와 같은 기술은 공간도형에 대한 논증기하의 성격을 잘못 판단한 것으로 생각한다. 공간 논증기하 단원의 교과내용들은 직관적으로 쉽게 이해되는 명제들로 구성되어 있고, 이들 명제가 참이라는 것을 밝히려면 공리계를 사용할 수밖에 없는 실정이다. 공리계를 이용하지 않고 명제의 증명을 시도하는 과정에서 증명되지 않는 명제들을 추론의 근거로 삼게 됨으로써 순환 논리에 빠지게될 위험성이 있을 뿐만 아니라 논리 전개의 일관성이 결여되고 애매모호하게 되며 지도하는 교사와 배우는 학생들이 난처한 입장에 처하게 된다.

6차 교육과정의 12개 수학Ⅱ 교과서를 비교 분석한 결과 타당성이 결여된 논리 전개로 증명이 이루어진 명제들을 발견할 수 있었으며, 명확한 증명제시의 어려움 때문에 필수적으로 취급해야할 중요한 명제들이 다수의 교과서에서 제외되고 있다.

공간기하에서의 공리는 5 개로 이 중 공간기하의 논리 전개에 필요한 다음 3 개의 공리는 기본 성질로서 다루고 이를 논리 전개의 발판으로 삼아야할 것이다.

① 한 직선 위에 있지 않은 세 점을 지나는 평면은 오직 하나 뿐이다.

② 한 평면 위의 서로 다른 두 점을 지나는 직선은 그 평면 위에 있다.

③ 한 점을 공유하는 두 평면은 그 점을 지나는 한 직선을 공유한다.

조사 대상 12 개의 교과서 중에서 위의 공리 3 개를 기본 성질로서 채택된 교과서는 5 개로 취급한 명제는 평균 22 개 정도이고, 채택되지 않는 7 개의 교과서에서 다루어진 명제는 평균 16 개로서 6 개의 차이를 보이고 있다. 위의 기본 성질 3 개를 택한 교과서는 논리 전개가

타 교과서에 비해 비교적 명료한 편이나, 채택하지 않는 교과서는 논리적 결함을 피하기 위하여 명제를 적게 다룬 일부 교과서를 제외하면 결함이 많은 편이다.

직선과 평면의 위치 관계에 관한 명제 가운데 다음의 명제들은 교과내용에 포함시켜야 한다.

① 명제 0-7: 두 평면 α, β가 평행일 때, α와 한 점에서 만나는 직선 l은 β와도 한 점에서 만난다.

② 명제 2-1: 평면 α 밖의 한 점 P를 지나고, α 위의 직선 l과 평행한 직선 m은 단 하나 존재하며 평면 α와 평행하다.

③ 명제 2-2: 평면 α 밖의 한 점 P를 지나고, α와 평행한 평면은 오직 하나 있다.

④ 명제 3-5: 평면 α 밖의 한 점 P에서 α에 내린 수선은 오직 하나 있다.

⑤ 명제 3-6: 평면 α위의 한 점 O에서 α에 그은 수선은 오직 하나 있다.

⑥ 명제 4-3: 서로 다른 두 직선 l, m이 평면 α에 수직이면 $l // m$ 이다.

⑦ 명제 4-6: 꼬인 위치에 있는 두 직선 l, m에 공통인 수선은 오직 하나 있다.

⑧ 명제 5-2: 평행한 평면 α, β가 있을 때, 평면 α 위의 한 점 A의 β 위로의 정사영을 A′이라고 하면 선분 AA′은 α, β의 공통 수선이고, 그 길이는 A의 위치에 관계없이 일정하다.

명제 0-7은 다른 명제의 증명에 이용되는 중요한 명제이고, 명제 2-1, 명제 2-2는 직선과 평면의 위치 관계에서 평행에 관한 여러 가지 정리를 만들어 내는데 필요하며, 명제 3-5, 명제 3-6은 직선과 평면의 수직 관계에 관한 정리를 증명하는데 많이 이용된다. 명제 4-6은 공통 수선, 명제 4-3, 명제 5-2는 두 평면 사이의 거리를 정의 내리는데 필요한 명제라고 여겨진다.

앞에서 언급한 공리 3 개를 기본 성질로 제시하고 위의 8 개의 명제를 교과 내용에 포함시키면 논리 전개를 명확하게 할 수 있게 되므로 합리적이고 논리적인 사고력, 비판적 능력을 기르는 논증기하 교육의 목적을 달성하는데 도움이 되리라 생각한다.

참고문헌

교육부 (1995). 고등학교 수학과 교육과정 해설.

금종해외 (1995). 고등학교 수학Ⅱ. 한샘출판사.

김연식외 (1995). 고등학교 수학Ⅱ. 동아출판사.

김응태, 김연식 (1982). 수학교육 교재론. 이우출판사.

박규홍 외 (1995). 고등학교 수학Ⅱ. 동화사.

박두일 외 (1995). 고등학교 수학Ⅱ. 교학사.

박배훈 외 (1996). 고등학교 수학Ⅱ. 교학사.

박세희 외 (1996). 고등학교 수학Ⅱ. 동아서적.

박한식 외 (1995). 고등학교 수학Ⅱ. 지학사.

신용태 (1993). 기하학 개론, 교학연구사.

양승갑 외 (1995). 고등학교 수학Ⅱ. 금성교과서.

윤옥경 외 (1999). 고등학교 수학Ⅱ. 중앙교육진흥연구소.

이홍천 외 (1995). 고등학교 수학Ⅱ. 동아출판사.

장태환 외 (1996). 고등학교 수학Ⅱ. 두산동아.

정봉화 외 (1996). 고등학교 수학Ⅱ. 형설출판사.

김연식, 허혜자 (1995). 수학불안 요인에 관한 연구. 대한수학교육학회 논문집, 5(2).

서동엽 (1999). 중학교 학생의 증명 능력 분석. 대한수학교육학회 논문집, 9(1).

우정호 (1994). 증명지도의 재음미. 대한수학교

육학회 논문집, 4(1).
허혜자 (1996). Euclid 기하의 교육의 비판에 대한 재고. 대한수학교육학회 논문집, 6(2).
Greenberg M. J. 이우영 (역) (1997). Euclid 幾何學과 非Euclid幾何學. 경문사.
Fawcett, H. P. (1938). *The Nature of proof.* Teachers College, Columbia University.
Fehr, H. F. (1963). Reform of instruction in geometry. *Mathematical Education Notes.* (March), 324.
Toumasis, C (1990). The epos of euclidean geometry in greek secondary education (1836-1985): Perssure for chang and resistance. *Educational Studies in Mathematics 21,* 491-508.

The Analysis of Contents of Space Axiomatic Geometry Unit and the Ways of Improvement

Hyun, Jin-Oh (Cheju National University)
Lee, Joong-Seok (Seogwipo Girls' High School)

The axiomatic geometry unit of the space figure in Mathematics II in the expository book of high school math curriculum (published by Ministry of Education, June 20, 1995) suggests some teaching points to bear in mind, so as not to make use of the system of axiom. However, it doesn't take the axiom about the space geometry as a starting point of argument, and so many textbooks can be found, in which intuitively true propositions are proved acceptable by the logical ambiguous statements.

Thus, this study analyzes the contents of axiomatic geometry in high school math II textbooks and draws their problems. As an alternative improvement, 3 kinds of axiom on the space geometry and some important propositions, which are basic to proofs of proposition, will be presented here in this paper.