大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 11 卷 第 2 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XI, No.2, 385-402. Dec 2001

학교 수학에서의 '증명'

조 완 영* 권 성 룡**

Ⅰ. 서론

학교수학에서 증명이 중요한 역할을 함에도 불구하고 증명지도는 성공적이지 못한 것으로 나타났다(우정호, 1998; 류성림, 1998; 나귀수, 1998; 서동엽, 1999; Senk, 1985). 교사들도 학생들이 증명을 할 수 있기를 기대하기보다는 정리의 활용을 강조한다. 증명 수업은 교사의 시범, 학생들의 모방, 암기의 패턴으로 피상적으로 이루어지고 있으며, 그 결과 학생들은 증명에 필요한 수학적인 생각을 하기보다는 교사가 제시하는 증명 절차를 따르게 되고, 증명이 끝난 다음에도 증명의 의미를 이해하지 못하게 된다.

증명교육의 실패 원인은 절대주의 수학철학의 영향을 받아 유클리드 기하를 중심으로 연역적이고 형식적이며 엄밀한 증명을 강조해온 데서 찾을 수 있다. 절대주의 관점에서 증명은 객관적이고 절대적인 수학적 지식이 참임을 보장하는 유일한 수단이며 공리 체계 내에서 수학적 진리를 공리에서 정리로 전달하는 메카니즘으로 작용한다. 즉, 참인 공리와 정의에서 출발하여 논리적 추론 규칙을 이용하여 연역적 증명에 의해 참이라고 인정된 명제가 수학적 정리가 된다. 절대주의 관점에서는 연역적 증명에 의해 입증된 모든 수학적 정리는 참이며 절대적 의미에서 증명된 수학적 지식의 확실성을 믿을 수 있다(Ernest, 1991).

절대주의 수학철학의 증명관에서의 문제는 증명의 역할, 증명의 타당성에 대한 기준, 엄밀성 세 가지 측면에서 생각할 수 있다. 첫째, 증명의 역할이 수학적 지식의 절대적 확실성을 입증하는 것으로 제한되지 않는다. 증명은 지식을 보다 깊이 있게 이해하고 수학적 지식에 대한 의사소통의 역할이 강하다(Hanna & Jahnke, 1996, p. 878). De Villiers(1990)는 증명의 역할을 입증, 설명, 체계화, 발견, 의사소통 다섯 가지로 제시하고 있다. 둘째, 증명의 타당성에 대한 기준이 다양하다. 절대주의 수학철학 내에서도 논리주의, 형식주의, 직관주의에 증명의 타당성에 대한 기준이 논리, 형식, 내성적인 구성으로 각각 다르다. 사회적 구성주의에서는 수학적 지식을 사회적 합의를 통한 구성의 결과로 보고 있으며, 이러한 관점에서 증명의 타당성을 수용하는 기준은 당대의 수학 사회의 합의에 있다. 셋째, 엄밀성의 문제로 엄밀성에 대한 기준은 활동 중인 수학자들마다 다르다. Thom(1971)은 엄밀성에 대한 엄밀한 정의는 없다고 비판하면서 적절히 교육을 받아 그것을 이해할 만한 준비가 되어 있는 모든 독자들에게 받아들여지면 엄밀한 증명으로 볼 수 있는 것 즉, 엄밀성의 수준을 수학자 사회 공동체가 승인하는 정도로 규정하고 있다.

* 충북대학교
** 서울탑동초등학교

증명은 문제해결과 더불어 수학교육의 핵심이며 학교수학에서 강조되어야 한다. 이를 위해 연역적이고 형식적이며 엄밀한 증명을 강조하는 전통적인 증명관에서 벗어나 다양한 증명의 역할을 반영하고 수학교실 사회의 합의에 의해 증명의 타당성에 대한 기준과 엄밀성의 수준이 결정될 수 있는 포괄적인 '증명' 개념을 받아들일 필요가 있다. 증명은 수학적 진리를 발견하는 맥락에서의 과정이자 수학적 진리가 참임을 보장하는 수단으로, 수학사회에서 공적인 지식으로 받아들이는 과정에서 수학적 진리에 대한 자기 확신과 이해, 타인에 대한 설득의 수단이기도 하다. 이러한 증명의 복합적인 성격을 받아들이면 증명의 형식성은 부차적인 것이며(나귀수, 1998), 해당 수학 사회에서 어떤 정당화 과정을 수용할 것이냐가 중요해진다. 결국, 학교수학에서도 학습자 사회 공동체가 합의한다면 '증명'의 엄밀성이 보장되는 것으로 해석할 수 있으며, 능동적인 지식의 구성자로서의 학습자의 수준을 고려하여 적절한 수준의 엄밀성을 요구하는 정당화 과정으로서 추론과 '증명'을 고려하면(우정호, 1998), 추론과 '증명'은 모든 수준의 모든 영역에서 다루어질 수 있다. NCTM은 「수학 교육과정과 평가의 규준집」(NCTM, 1989)에서의 추론 규준을 「학교수학의 원리와 규준」(NCTM, 2000)에서 추론과 증명 규준으로 바꾸면서 추론과 증명을 모든 내용 영역과 모든 학년 수준에서 다룰 것을 제안하고 있다.

Usiskin(1997)은 학생들의 기하학적 사고수준이 낮아서 증명을 할 수 없다는 가정은 잘못된 것이라고 비판하면서 모든 학생들이 증명을 배울 수 있도록 해야 한다고 주장한다. Tall(1995)은 증명과 표상에 관한 인지발달 단계에 대한 논문에서 학생들의 증명 발달 단계가 활동적 증명에서 시작하여 시각적, 기호적 증명을 거쳐 형식적 증명으로 발달해 간다고 주장하고 있다. Usiskin과 Tall의 주장에는 연역적이고 형식적인 증명은 아니더라도 학생들의 수준에서 타당한 것으로 인정할 수 있는 증명 방법이 있음을 시사하고 있다.

본 연구는 학교수학에서의 '증명'을 새로운 관점에서 해석하고 이를 토대로 7차 수학과 교육과정에서 '증명'과 관련되어 다루어질 수 있는 예들을 제시하는 데 있다. 이를 위해 먼저 학교수학에서의 '증명'을 개념화하고, 다음에는 이를 근거로 증명으로 받아들일 수 있는 다양한 증명의 예를 문헌을 통해 고찰한다. 마지막으로 7차 수학과 교육과정을 분석하여 '증명'과 관련시켜 다룰 수 있는 예를 제시한다.

이러한 분석 결과는 7차 교육과정에서의 수학 교수-학습 과정에 반영될 수 있고 새로운 교육과정을 만들 때 기초자료로 이용될 수 있다는 점에서 그 의미가 있을 것이다.

Ⅱ. 학교 수학에서의 '증명'

"학교수학에서 '증명'이란 무엇인가"라는 문제는 아주 복잡한 성격을 띄고 있다. 증명의 개념은 수학 또는 수학적 지식의 성격과 밀접한 관련이 있다. 절대주의 수학철학자들은 수학적 지식은 보편 타당한 지식이며, 이러한 수학적 지식의 타당성을 보장할 수 있는 방법은 연역적이고 엄밀한 증명뿐이라고 생각한다. 반면 Lakatos의 준-경험주의 수학철학에서는 수학적 지식의 절대성을 부정하고 수학적 지식은 논증과 반박을 통해 발전하는 인간이 만든 산물이라고 규정한다. Lakatos의 입장에서 보면 증명이란 수학적 지식의 발달 과정에서 수학적 지식을 발견하고 개선하는 수단 곧 사고실험이다. 사회적 구성주의에서는 수학적 지식을 사

회적인 합의 절차를 통해 구성된 결과로 보고 있으며 증명 또한 사회적인 합의 과정에서 자신의 확신, 타인의 설득을 얻는 데 필요한 수단으로 작용한다.

본 장은 두 부분으로 구성된다. 먼저 증명의 역할, 증명의 타당성의 기준과 엄밀성의 수준에 대한 다양한 관점과 '증명'과 경험과학 사이의 관계를 분석하여 그 결과를 토대로 학교수학에서의 '증명'을 개념화한다. 그런 다음 앞에서의 '증명'의 개념을 토대로 학교수학에서 나타날 수 있는 다양한 '증명'의 유형을 논의한다.

1. 학교수학에서의 '증명'

(1) 증명의 역할

절대주의 수학철학에서는 새로운 수학적 진리의 확실성을 보증하는 수단으로서의 증명의 역할을 강조한다. 수학적 공리를 참이라고 가정하고 수학적 정의는 절대적인 의미에서 참이며 논리적 공리 역시 참인 것으로 인정된다. 다음에는 논리적 추론 규칙을 이용하여 진리를 보존해 가는 가운데 연역적 증명에 의해 참이라고 인정된 명제가 수학적 정리가 된다. 결국 연역적 증명에 의해 입증된 모든 수학적 정리는 참이며 절대적인 의미에서 증명된 수학적 지식의 확실성을 믿을 수 있다. 따라서, 증명은 엄밀하고 연역적인 증명일 수밖에 없다(Ernest, 1991).

반면, Lakatos(1976)의 준경험주의 수학철학에서는 증명을 정리가 참임을 정당화하는 수단이 아니라 발견과 개선을 위한 수단이자, 원래의 추측을 부분 추측 곧 보조정리로 분해하여 비판과 개선을 용이하게 하기 위한 사고실험으로 본다. Lakatos의 준경험주의 수학철학을 기본 가정으로 받아들이는 사회적 구성주의 관점에서의 증명은 확신의 수단이자 이해의 수단이며 증명의 목적은 '엄밀함'이라는 추상적 기준을 만족하기 위해 의례적으로 행해지는 것이 아니라 학생들의 이해를 증진시키는 설명이다(나귀수, 1998, pp. 41-43). Lakatos의 준경험주의와 사회적 구성주의 관점에서 볼 때 증명의 역할을 다양하게 해석할 수 있다. 증명은 수학적 진리가 참임을 보장하는 역할뿐만 아니라 수학적 진리를 발견하는 맥락에서의 정당화의 역할, 수학사회에서 공적인 지식으로 받아들이는 과정에서 수학적 지식을 보다 깊이 있게 이해하고 수학적 지식에 대한 의사소통 수단으로서의 역할을 한다(Hanna & Jahnke, 1996, p. 878).

증명은 정당화, 설명(Bell, 1976; Hanna, 1983; De Villiers, 1990), 체계화(Bell, 1976; De Villiers, 1990), 발견, 의사소통(De Villiers, 1990) 등 다양한 역할을 한다. 정당화는 명제의 진리성에 대한 주장과 관련되는 것으로서 증명은 어떤 명제가 참임을 주장하기 위한 근거가 된다는 것이다. 증명의 이러한 정당화 기능을 Hanna(1983)는 '입증하는 증명(proofs that prove)'으로 표현하고 있다. De Villiers는 입증(verification) 또는 정당화를 '수학적인 진술의 정확성을 입증(확신 또는 정당화)하는 것으로 사용하고 있다. 여기서 정확성이란 어떤 상황을 인정되는 추론 규칙에 따라 나타내기 위해 사용한 언어로 논리적 필연성을 강조한 것으로 해석할 수 있다. De Villiers는 또한 입증이 작도나 측정, 수치의 대입 등의 준경험적인 방법에 의해 이루어질 수 있다고 주장하는 바, 입증의 고찰 대상은 어떤 상황에 있어서 그 상황에 설정되어 있는 조건과 그 상황에서 실제로 일어나고 있는 결론과의 관계의 적절성이라고 할 수 있다. 즉, 입증이란 '결론에 대해 가정이

필요함을 나타내는 것, 또는 그러한 가정 하에서는 이러한 결론이 반드시 일어난다는 사실을 보이는 것'으로 볼 수 있다.

설명 기능이란 증명이 어떤 명제가 참인 이유를 보여주는 역할을 함을 의미한다. Hanna는 이러한 설명기능을 '설명하는 증명(proofs that explain)'으로 나타내고 있다. 입증과 설명은 증명의 목적과 관계가 있으며, 입증을 목적으로 하는 증명은 명제가 참임을 보이기 위한 것이고 설명을 목적으로 하는 증명은 명제가 참임을 보일 뿐만 아니라 명제가 왜 참인지에 대한 이유도 밝힌다는 것이다. Hanna(1983)는 "자연수 1부터 n까지의 합은

$$S(n)=\frac{n(n+1)}{2}$$

이다"라는 명제에 대한 증명을 이용하여 증명의 설명과 정당화 기능을 대비시키고 있다. 이 명제는 수학적 귀납법과 수학자 가우스가 제시한 방법으로 증명할 수 있는 바, 수학적 귀납법은 이 명제가 왜 참인지에 대한 어떤 통찰력도 제공하지 못한다는 점에서 증명하는 증명이고 가우스 방법은 명제가 왜 참이 되는지에 대한 이유를 밝혀준다는 점에서 설명하는 증명이다. De Villers는 "왜 수학적 명제가 참인가에 대한 통찰을 얻을 수 있는 설명"이라는 말로 설명의 역할을 말하고 있다. 입증에서의 작도나 측정, 수치의 대입과 같은 준경험적인 방법으로부터는 설명을 얻을 수 없으며, 설명을 통해 어떤 가정 하에서 어떤 결과가 왜 일어나는지를 분명하게 할 수 있다. 앞에서 제시한 가우스의 증명과 같이 명제가 참인 이유를 제시한다면 자신은 물론 다른 사람을 설득한 것이며, 이러한 의미에서 설명을 '납득 또는 설득'이라고 할 수도 있다. Balacheff도 그 시대의 수학사회에서 수용할 수 있는 설명을 증명이라고 주장하면서 설명과 증명과의 관계를 다음과 같이 밝히고 있다.

> 화자에 의해 획득된 명제 또는 결과가 참임을 이해시키려고 시도하는 담론 유형이 설명이다. 화자가 제공하는 이유들은 논의의 대상이 되며 반박되거나 수용될 수 있다. 설명이 이루어지는 그 시대, 그 사회에서 수용한 설명이 증명이다. 설명의 수용여부에 대한 결정은 논쟁의 대상이 되며, 이 때 논쟁의 주요목표는 화자들을 위한 일반적인 타당성 체계를 결정하는 데 있다. 수학계 내에서, 어떤 특별한 형식을 취한 설명들만 증명으로 수용될 수 있으며, 이러한 설명들은 결정된 규칙에 따라 조직된 일련의 정리들로 이루어진다. 정리는 이미 참임이 밝혀졌거나 일련의 잘 정의된 규칙들로부터 연역의 규칙을 이용하여 앞에서의 설명들에서 연역된 것들이다. 이러한 종류의 증명들을 수학적 증명이라 한다. (Balacheff, 1987, pp. 147-148)

Bell이 제시하고 있는 체계화의 역할은 여러 가지 결과들을 증명을 이용하여 공리, 주요 개념 및 정리, 여기서 유도되는 작은 결과 등으로 이루어지는 연역적 체계로 조직화함을 의미한다.

발견은 증명이 새로운 결과를 발견 또는 발명하는 데 기여할 수 있음을 의미하는 것으로, 준경험주의 수학철학의 증명에 대한 관점과 일치한다. 입증 또는 정당화가 실제로는 조건과 결론과의 관계가 고찰 대상이기 때문에, 주어진 조건에 대해 "조건은 이것으로 충분한가"하는 문제를 제기할 수 있고, "다른 조건으로 바꿀 수는 없을까"라는 발전된 사고가 일어날 수 있다. 또한 "결론을 바꾸기 위해 조건을 바꿀 수는 없을까"라는 문제도 제기될 수 있다. 결국 이러한 과정에서 조건과 결론의 새로운 관계를 확립할 수 있다.

De Villiers가 제시한 다섯 번째의 증명의 역할은 '의사소통' 수단으로서의 역할이다. 의사소통은 '수학적인 지식을 전달하는 것'으로 보고 의사소통의 범위를 수학자들 사이, 교사와 학생 사이, 학생들 사이에서 일어나는 것으로

보았으며, 전달 자체의 목적보다는 전달을 전제로 이루어지는 설명이나 논쟁을 받아들이는 기준을 습득하는 데 목적이 있다.

지금까지 논의한 Bell, Hanna, De Villiers가 제시한 증명의 역할은 현재 학교수학의 증명 지도에 충분히 반영되어 있지 못하다. 7차 수학과 교육과정에서는 증명의 역할을 새로운 수학적 진리의 확실성을 보증하는 원천으로 보고, 공리 체계 내에서 수학적 진리를 공리에서 정리로 전달하는 메커니즘으로 도입하고 있다. 8-(나)단계의 교과서에서는 증명을 ① "실험이나 예상이 아니고 용어의 정의와 알고 있는 사실을 통하여 이론적으로 어떤 명제가 참임을 밝히는 것"(황석근 · 이재돈, 2001), ② "어떤 명제가 참임을 밝히는 것"(강행고 외, 2001)으로 정의하고 있는 바, 가정에서 출발하여 공리와 이미 알고 있는 정리를 이용하여 결론을 이끌어 내는 활동으로 증명의 의미를 제한하고 있다. 이러한 것이 학생들이 증명을 왜 해야하는지를 이해하지 못하고 교사 또는 교과서의 증명을 암기 또는 모방하게 되는 원인이 된다. 따라서, 학생들이 증명의 필요성을 깨닫고 증명활동에 참여할 수 있도록 하기 위해서는 증명의 다양한 역할이 반영될 필요가 있다.

(2) 증명의 타당성의 기준과 엄밀성의 수준

절대주의 수리철학의 신념은 다음과 같은 두 가지 중요한 가정을 전제로 하고 있다(Hanna & Jahnke, 1996, p. 878).

① 현대 수학은 수학적 증명의 타당성을 판단할 수 있는 일반적인 기준이 있다.
② 엄밀한 증명은 현대 수학적 실제의 검증 기준이다.

이러한 가정에 따르면 수학에서의 증명은 이미 확실하게 참이라고 알려진 공리로부터 정리를 연역하는 것이며, 증명을 마친 명제는 정리가 되고 참이라는 것이 보장된다. 어떤 명제가 참이라는 것을 보증하기 위해 증명이 필요하며, 증명은 형식적이고 논리적으로 타당한 형식을 갖춰야 한다. 그러나, 수학의 기초를 확립하기 위한 수단으로서 연역적 추론 즉, 형식적 증명을 중시하는 절대주의의 증명관은 그 자체 내에서도 많은 문제점을 내포하고 있으며, 많은 수학자 또는 수학교육자들로부터 비판을 받아왔다. 첫째, 수학적 증명의 타당성에 대한 기준은 절대주의 수리철학 내에서도 논리주의, 형식주의, 직관주의냐에 따라 그 입장이 서로 다르다. 논리주의에서의 증명은 수학 명제가 논리적으로 참(tautology)임을 정당화하는 수단이었으며, 형식주의에서는 증명을 의미 없는 기호 조작으로 환원함으로써 무모순성과 완전성을 정당화하고자 하였다. 직관주의에서는 구성적 증명을 통해 구성 가능성이 입증되는 명제만을 참인 명제로 인정하였다. 이러한 입장 차이는 수학적 증명의 타당성에 대한 유일한 기준을 설정하기 어렵다는 것을 보여준다.

둘째, 엄밀성의 문제로, 엄밀성에 대한 기준은 수학자들마다 다르다. Thom(1971)은 엄밀성에 대한 엄밀한 정의는 없다고 비판하면서 적절히 교육을 받아 그것을 이해할 만한 준비가 되어 있는 모든 독자들에게 받아들여지면 엄밀한 증명으로 볼 수 있는 것 즉, 엄밀성의 수준을 수학자 사회 공동체가 승인하는 정도로 규정하고 있다. 수학자들도 엄밀성 자체보다 이해와 의미를 더 중요하게 여긴다. 수학자들이 증명의 타당성을 받아들이고 확신을 하게 되는 것은 증명의 엄밀성보다는 증명의 내용을 이해할 때다. 수학자들은 ① 증명을 이해하고(증명에 내재된 수학적 개념, 증명의 논리적 전제, 증명의 함의) 증명 과정을 참이 아니라고 주장

할 만한 근거를 찾지 못했을 때, ② 정리가 다른 수학 분야에 어떤 함의를 갖고 세밀한 연구와 분석을 정당화할 만큼 충분히 의미가 있을 때, ③ 정리가 이미 수용된 결과들과 일관성이 있을 때, ④ 증명을 한 사람이 정리의 내용 분야에서 전문가로 평판이 나 있을 때, ⑤ 엄밀하든 엄밀하지 않든 전에 보았던, 증명에 대한 믿을만한 논증이 있을 때 증명을 수용한다 (Hanna, 1983). 수학자들의 실제를 보면 엄밀성이나 형식성보다 증명이 이해되고 증명이 기존의 학문적 체계 내의 다른 분야와 의미 있게 관련이 있을 때 증명을 수용한다는 것이다. 이러한 수학자들의 태도는 증명 자체도 절대적으로 확실한 것은 아니며 증명의 성격도 정적이지 않다는 것을 함축하고 있다. 즉 증명의 수용 기준에 대한 아이디어가 변화되고 있으며, 증명의 타당성은 시대의 수학적 사조를 반영해야 한다는 의미가 내포되어 있다.

(3) '증명'과 경험과학

과학적 방법에 대한 과학자들의 관심은 과학적 탐구를 보다 효율적으로 수행하고자 하는 데 있으며 이런 점에서 실천적인 성격이 강하다. 반면 수학자들은 과학적 탐구 결과를 논리적, 수학적으로 설명하고자 하는 데 관심이 있다는 점에서 이론적이라 할 수 있다. 그러나, 수학 특히 학교수학은 경험과학과 밀접한 관계가 있다. 학교수학에서 도형의 성질에 관한 정리를 도입할 때, 학생들의 경험에 호소하여 의미를 부여하는 것, 작도와 측정 등 경험적인 탐구활동을 통해 추측을 하고 추측이 참인지 또는 왜 참인지를 정당화하는 과정은 경험과학의 탐구방법과 직접적으로 관련된다. 학교수학과 경험과학 사이의 관련성을 다음 두 가지 측면으로 정리할 수 있다.

첫째, 수학 특히 기하의 발생은 실용적인 토대 위에서 이루어졌으며, 이러한 것은 수학에 경험적인 차원이 존재함을 의미한다. 바빌로니아와 이집트의 초기 기하학은 실제 측량과 관계된 것이다. 이러한 경험적인 초기의 기하학이 그리스 시대의 탈레스 이후 논증기하로 발전하였다. 바빌로니아와 이집트의 경험적인 수학은 '어떻게'에 초점을 맞추었지만 그리스 시대의 수학은 당시의 합리적인 사회적 분위기와 더불어 '어떻게' 뿐만 아니라 '왜'라는 의문을 가지면서 수학 특히 기하에서의 논증방법과 연역적 특징이 두드러지게 되었다(Eves, 1953, 이우영 · 신항균(역), 1995).

그리스 시대의 이러한 수학을 집대성한 유클리드 기하는 현재의 학교수학에 깊은 영향을 끼치고 있으며, 형식적인 접근 방법을 이용하여 공리체계가 논리적으로 일관성이 있는지, 정리가 그 논리 체계로부터 어떻게 도출될 수 있는지에 초점을 두어왔다. 유클리드 기하의 연역적 전개방식은 결과적으로 수학이 생태적으로 갖고 있던 경험 과학적 측면을 소홀히 하고 실제와 격리되어, 이론적이고 논리적인 담론을 중심으로 하는 수학만이 강조되어 왔다. 그러나, 수학 특히 기하가 실제 생활에서의 필요성에서 비롯된 것이라는 점에서 보면 수학에서도 특히 학교수학에서는 관찰과 실험 등 경험적 자료가 중요한 역할을 할 수 있을 것이다.

둘째, 실제수학 또는 경험과학과 관련지어 수학을 설명하는 경우가 흔히 있다. 중학교 논증기하에서 다루는 기하의 경우는 경험적인 성격이 더욱 강하다(Hanna & Jahnke, 1996). 중학교 논증기하를 지도할 때, 학생들이 그리는 도형은 기하의 정리에서 다루는 도형과 다르다. 실제로 그린 도형들과 달리 정리의 내용에 나오는 도형들은 이상적인 것들이다. 학생들이

그린 도형들은 실제로 정확한 것이 아니지만 기하의 정리를 증명하고 이해하는 과정에서 많은 역할을 한다. 증명하고자 하는 정리가 참인지 그리고 왜 참인지를 볼(see) 수 있게 해 준다(Carnap, 1966, 윤용택(역), 1993). '두 직선은 하나 이상의 공유점을 가질 수 없다'라는 명제가 참인지를 확인할 때, 그 상황을 마음속으로 그려서 확인을 한다. 이러한 것은 학교수학의 논증기하에서 기하의 정리가 참인지 그리고 왜 참인지를 설명할 때, 기하의 공리 체계에만 의존하는 것이 아니라 정리를 실제에 적용시켜 보는 활동도 이루어지고 있음을 의미한다.

셋째, 학생들은 심리적으로 경험적인 확인에 의존하는 실제적인 사고방법을 가지고 있으며, 수학적인 명제의 타당성을 절대적으로 보증하려는 전통적인 증명방식과 기본적으로 상충되고 있다(우정호, 1998). 수학 교사들은 증명이 필요하다고 생각하지만 학생들은 다양한 예에 대한 측정을 통해 확인을 했기 때문에 연역적 증명이 필요하다고 생각하지 않는다. 학생들의 현 수준에서 출발하여 새로운 수학을 학습해야 한다는 관점에서 볼 때, 학생들의 경험을 바탕으로 한 정당화 방법에서 출발하여 궁극적으로 연역적 정당화 방법으로 연결시키는 것이 타당한 정당화 지도 방법이라 하겠다.

그럼에도 불구하고 현재의 논증기하에서의 증명지도는 발견의 맥락, 실제적 성격의 증거, 학생들의 수준을 소홀히 취급하고, 완성된 정리의 증명을 교사가 설명하는 방식으로 이루어져 왔다. 연역적이고 형식적이며 엄밀성을 강조하는 현재의 증명지도는 기하의 역사발생적 성격과 학생들의 심리적 발달 수준을 고려하여 이루어질 필요가 있다. Hanna와 Jahnke(1996)는 수학화된 경험적 이론과 증명의 역할 사이의 역동적 관계를 다음과 같이 주장한다.

이론이 구성되기 시작할 때, 증명은 도출된 결과의 진리를 확립하기보다는 그 결과가 도출되는 가정의 신뢰성, 개연성 그리고 효과를 검증하는 역할이 강하다. 그 이론이 이미 수용된 지식의 일부로 통합될 때(또는 학생들이 그 이론을 편안하게 느낄 때), 증명의 의미는 변화되어 증명은 가정에서 정리로 진리(또는 확실성)를 전달하는 역할을 한다. 이러한 역동적인 관점은 순수하게 수학 내적인 상황에서도 마찬가지로 적용되며 일반적으로 증명에 대한 이해를 심오하게 한다.

여기서 언급한 역동적인 관점은 학생들에게 증명을 가르칠 때 교사들이 경험하는 여러 가지 현상을 설명하는 데 유용하다. 학생들은 어떤 사실이 왜 증명되어야 하는지를 이해하지 못한다. 왜냐하면, 그들의 관점에서 보면 실제 측정만으로도 그 사실은 분명하고 충분히 정당화된 것이기 때문이다. 학생들에게 증명을 보여 준 다음에도 학생들은 정리의 일반적인 타당성을 확신하지 못하고 어떤 예를 가지고 정리가 참인지를 검사한다(Fischbein, 1982). 경험으로 미루어 볼 때, 학생들은 기하적 논증으로는 충분하지 않다고 생각하면서도, 기호적 추론을 증명으로 받아들이기도 한다. 이 모든 현상은 증명이 상황마다 다른 의미를 갖고 있다는 사실을 반영하는 것이고, 학생들이 연역적 논증과 경험과학 사이의 관계를 깨닫지 못하고 있음을 나타낸다. 이러한 현상이 학생들이 증명의 필요성과 의미를 이해하지 못하는 이유가 될 수 있으며, 교사들과 달리 학생들은 증명에 대해 다양한 의미를 갖고 있음을 알 수 있다.

Hanna와 Jahnke(1996)의 주장은 학교수학의 논증기하에서 연역적이고 형식적인 증명만을 강조할 것이 아니라 증명이 갖고 있는 이러한 다양한 의미를 반영할 필요가 있음을 시사하고 있다. 경험적 확인과 연역적이고 형식적인 증

명을 상호 보완적인 측면에서 고려할 필요가 있다. Freudenthal(1973)이 학습자에게 익숙한 사실로부터 시작하여 그것을 국소적으로 조직화하는 활동이 재발명 과정에서 가장 중요한 활동이라고 제안하고 있듯이, 증명교육에서도 학생들이 갖고 있는 다양한 정당화 유형에서 출발하여 점차 연역적이고 형식적인 정당화로 발전시켜 가는 것이 온당한 증명지도 방법이라 할 수 있다.

(4) 학교수학에서의 '증명'

지금까지 학교수학에서의 '증명'을 전통적인 연역적이고 형식적인 증명 중심에서 벗어나 정당화라는 포괄적인 관점에서 해석할 필요가 있음을 논의해 왔다. 이러한 주장은 준경험주의 수학철학, 사회적 구성주의를 이론적인 기초로 이루어졌다. 철학적 입장의 변화는 필연적으로 증명의 역할, 증명의 타당성의 판단 기준, 엄밀성의 수준에서의 변화를 수반하며 이러한 변화가 학교수학의 증명 개념에 반영되어야 할 것이다.

학교수학에서의 '증명'은 다음과 같은 성격을 토대로 개념화할 수 있다.

① 증명의 역할은 정당화, 설명, 체계화, 발견, 의사소통 등 다양하다.
② 증명의 타당성의 기준과 엄밀성의 수준은 수학자 사회 공동체의 합의에 의해 결정된다.
③ 수학화된 경험적 이론과 증명의 역할 사이에는 역동적 관계가 있다.

학교수학에서의 '증명'은 '학생들이 수학적 명제를 추측하고 이를 확인하는 과정에서 수학적 증거와 논리를 기초로 추측한 명제의 타당성을 설명 또는 정당화하는 방법'으로 개념화할 수 있으며, 이러한 '증명'의 개념은 포괄적인 의미를 갖는다. '증명'은 발견의 맥락과 정당화의 맥락에서 중요한 역할을 하며, 자신을 이해시키고 타인을 설득시키기 위한 수단이 된다. 증명의 타당성과 엄밀성에 대한 기준은 학생들로 구성된 수학 사회의 합의에 의해 인정되며, 학생들의 수학적 지식과 경험의 수준이 발달함에 따라 합의된 '증명'의 수준도 발달한다.

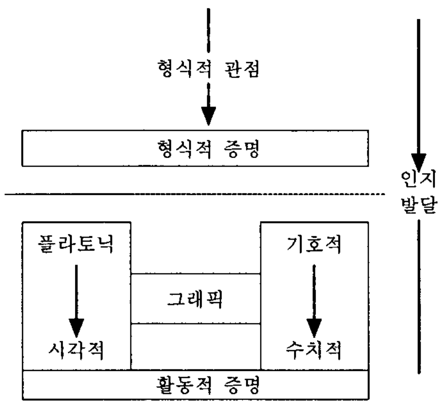
이러한 '증명' 개념에 따르면 다음 절에서 논의되는 다양한 '증명' 방법들도 '증명'의 범주에 포함시킬 수 있으며, 학교수학의 모든 수준, 모든 영역에서 '증명'을 강조할 수 있다.

2. 다양한 '증명' 방법의 예

(1) Tall의 증명에 관한 인지 발달 이론

Tall(1995)은 Bruner(1966)가 구분한 사고 발달 수준 즉, 활동적 수준, 영상적 수준, 기호적 수준을 토대로 증명과 표상에 관한 인지 발달 단계를 설명하고 있다. 활동과 몸짓을 통한 환경과의 상호작용과 의사소통에 근거를 둔 활동적 증명, 시각적 표현과 기호적 표현이 서로 상호작용하는 수준에서의 증명, 형식적 정의와 공리체계를 토대로 이루어지는 전통적인 의미에서의 형식적 증명 등 일련의 발달단계를 기술하고 있다.

Tall은 증명과 표상에 관한 인지발달 단계를 <그림 1>과 같이 도식화하고 있다. 가장 초보적인 증명으로는 물리적 환경과의 상호작용을 통해 이루어지는 활동적 증명이 자리하고 있고, 다음 단계에는 언어적 설명과 논의를 통해 의미가 보다 정교해지는 시각적인 증명이 존재한다. 활동적 증명수준에서 학생들은 구체적인 활동을 통해 어떤 명제가 참이라는 것을 확인하고 왜 참인지를 설명한다. 활동적 증명에서

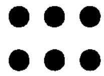


<그림 1> 증명과 표현에 관한 인지발달

는 활동에 초점을 두고 있으며 시각적, 언어적인 설명이 포함된다.

이등변삼각형의 두 밑각이 같다는 명제를 <그림 2>처럼 입증해 보이는 것은 활동적 증명의 예이다. 종이로 만든 전형적인 삼각형을 잘라 내어 대칭축을 따라 접고 두 개의 삼각형이 포개지기 때문에 두 각 B와 C가 같다라고 설명할 수 있다.

시각적 증명은 활동적인 요소는 물론, 언어적 요소를 수반한다. <그림 3>에서처럼 그림을 이용하여 2×3과 3×2가 같다는 곱셈의 교환법칙을 설명하는 경우에 활동적인 요소가 들어 있기는 하지만 본질은 배열을 어떻게 보느냐에 있기 때문에 시각적 증명으로 분류할 수 있다. 이 그림도 4×5, 27×13 등 같은 류, 일반적으로 $m\times n=n\times m$을 대표하는 포괄적인 예로 볼 수 있다.



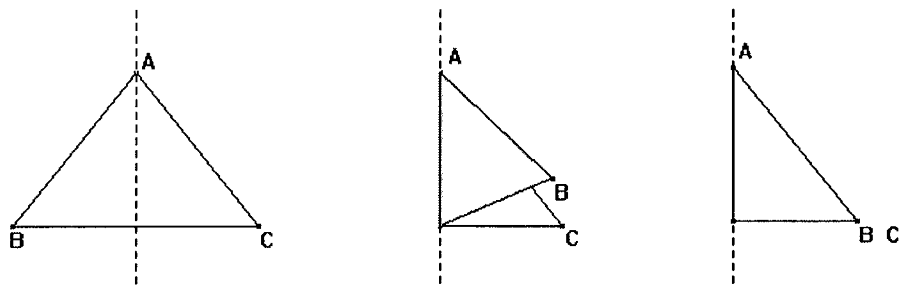
<그림 3> $2\times3=3\times2$의 시각적 증명[1]

이와 같은 시각적 증명을 특히 그래픽 증명(시각적 증명과 기호적 증명의 연결)이라 하며, 여기에도 부분들을 역동적으로 재배열하는 활동적인 요소를 담고 있다

항등식

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

의 좌변을 전개한 결과가 우변이 된다고 정당화하는 것을 연산 조작적 증명이라고 한다. 산술 활동에서는 예를 들어, 끝자리가 짝수가 아니기 때문에 24532와 34513을 곱한 결과가 846672915는 아니라는 사실을 확인하는 경우 외에는 일반적으로 증명을 고려하지 않았다. 그렇지만, 특수한 명제를 모든 경우의 전형적인 것으로 간주해서 하는 포괄적인 증명은 가능하다. 예를 들면, 제곱해서 2가 되는 유리수가 존재하지 않는다는 사실을 유리수의 분모와 분자를 소인수분해할 수 있다는 사실에 주목해서 다음과 같이 설명할 수도 있다.



<그림 2> 활동적 증명의 예

1) 바둑돌 등을 가지고 학생들이 이리 저리 배열하면서 정당화할 경우는 활동적 증명으로 구분된다.

$$\frac{9}{40}=\frac{3^2}{2^3\times5}$$

이고 양변을 제곱하면

$$(\frac{9}{40})^2=\frac{3^2}{2^3\times5}\times\frac{3^2}{2^3\times5}=\frac{3^4}{2^6\times5^2}$$

이 된다. 이 때, 어떤 유리수를 제곱한 수의 분모와 분자를 소인수분해할 때 나타나는 소인수의 개수는 짝수개가 된다. 그러므로 어떤 유리수의 제곱도 2가 될 수 없다. 왜냐하면

$$2=\frac{2}{1}$$

이 되어 분자에 있는 2의 개수가 홀수이기 때문이다.

대수에서는 산술에 대한 아이디어를 기호로 표현하며, 따라서 증명 방법도 포괄적 증명 방법 이상의 방법이 요구된다. 예를 들면, '연속하는 두 홀수의 합은 4의 배수다'라는 명제는 대수적으로,

$$(2n+1)+(2n+3)=4n+4=4(n+1)$$

로 표현할 수 있고 따라서 연속하는 두 홀수의 합은 4의 배수라고 결론을 내릴 수 있다. 그러한 증명은 적절한 대수적 표현과 대수적 연산을 이용하여 실행될 수 있다. 우리 나라의 경우 이러한 '증명' 방법이 가장 일반적인 방법으로 학생들은 이러한 '증명'활동을 경험할 기회가 많다.

이러한 관점에서 보면 유클리드 기하에 나오는 증명들은 포괄적이고 시각적인 증명을 수학적 기호나 언어로 표현한 것으로 볼 수 있다. 증명해야 할 명제를 그림으로 그리고(시각적 표현) 이 그림을 탐구한 후 수학적인 언어를 이용하여 표현함으로써 일반성이 확보된 명제 즉, 정리가 된다. 유클리드 기하에서의 정리는 도형의 성질에 관한 것이며, 정리를 따르도록 그려진 도형은 명제를 만족하는 임의의 도형을 나타내는 포괄적인 도형이다. 언어적 증명은 그려진 그 그림에만 적용되는 것이 아니라 일반적으로 그 정리가 나타내는 모든 도형에 적용된다.

명제 '$\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이면 $\angle B=\angle C$'의 증명은 그 $\triangle ABC$(아주 표준인 삼각형)에만 적용되는 것이 아니라 그 외의 다른 모든 삼각형에도 적용이 되는 것이다. 이런 면에서 유클리드 증명은 주어진 성질을 갖는 기하적 도형 전체에 적용하는 언어적이고 포괄적인 증명이라 할 수 있다.

현재 학교수학에서의 증명 지도의 난점은 학생들의 증명 개념의 발달 수준을 고려하지 않고 연역적이고 형식적인 증명만을 강조하는 데 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해서는 형식적인 수준에서의 증명활동이 이루어지기 이전에 다양한 경험적인 활동들이 이루어지고 그러한 정당화 방법의 한계를 자연스럽게 인식함으로써 다른 수준의 증명방법을 모색할 수 있는 기회가 제공되어야 할 것이다.

개념의 의미가 변함에 따라, 즉 활동적 개념에서 시각적 또는 기호적 더 나아가 형식적으로 발달하는 과정에서 이용하는 증명들은 각 수준에 따라 다양하다. 그러나 어떤 발달 단계에서 만족스럽던 증명이 다른 발달 단계에서는 만족스럽지 못할 수 있다.

Tall의 연구는 학교수학에서의 증명지도가 학생들의 인지발달 수준에 따라 다양하게 이루어져야 함을 함축하고 있다. 이러한 관점은 기하 시간에 교사들이 학생들의 기하학적 사고 수준보다 높게 가르치는 것이 기하교육 실패의 원인이 될 수 있다는 van Hiele의 주장과 다르지 않다.

(2) 「학교수학의 원리와 규준」에서의 다양한 증명의 예

NCTM(2000)의 「학교수학의 원리와 규준」에서는 NCTM(1989)의 「수학 교육과정과 평가 규

준집」에서의 추론 규준을 추론과 증명 규준으로 바꾸면서, K-12학년 전 수준에서 모든 학생들이 다음을 할 수 있어야 함을 강조하고 있다 (p. 122).

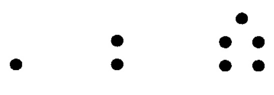
① 수학의 기본적인 면으로서 추론과 증명을 인식할 수 있어야 한다.
② 수학적 추측을 만들고 탐구할 수 있어야 한다.
③ 수학적 논증과 증명을 발전시키고 평가할 수 있어야 한다.
④ 다양한 종류의 추론과 증명방법을 선택하고 사용할 수 있어야 한다.

추론과 증명 규준은 학교수학에서 추론과 증명의 중요성을 강조하고 있으며(①) 다음과 같은 특징을 갖는다. 첫째, 추론과 증명 규준에 추측과 탐구과정을 포함시키고 있다(②). 이것은 수학적 추론과 증명이 수학의 발견과정과 밀접한 관련이 있음을 암시하고 있다. 둘째, 다양한 종류의 추론과 증명방법을 인정하고 있다 (④). 이것은 연역적이고 형식적인 엄밀한 증명 외의 다른 증명 방법을 인정하고 있는 것으로 보인다. 셋째, 수학적 논증과 증명의 발전을 언급하고 있다(③)는 점이다. 증명의 발전을 언급하는 것은 학생들의 증명 수준이 발달한다는 가정을 하고 있음을 시사하고 있다. 다양한 증명 방법과 증명 발달 수준을 가정하는 것은 앞에서 논의한 학교수학에서의 증명의 재음미나 Tall의 증명 발달 수준이론과 같은 맥락에서 이해될 수 있다.

또한 「학교수학의 원리와 규준」에서는 추론과 증명이 기하 영역에만 적용되는 것은 아니며 전체 영역에서 강조되어야 한다고 주장한다. 전통적으로 증명은 수열단원에서 도입되는 수학적 귀납법을 제외하면 주로 기하 단원에서만 다루어져 왔으며, 7차 수학과 교육과정에서도 마찬가지다. 학생들이 증명을 어려워하는 이유 중의 하나가 갑자기, 그것도 어느 한 영역에서 집중적으로 증명(주로 형식적인)을 다루는 데 있다. '증명'은 모든 학년 수준에서 그리고 모든 학교수학의 영역에서 강조될 필요가 있다. 이 때 문제가 되는 것은 엄밀성의 수준으로 엄밀성은 수학교실 사회의 합의에 따라 결정될 수 있으며 학년이 올라갈수록 엄밀성의 수준도 달라진다. 예를 들어, 1학년에서 짝수와 홀수가 교대로 나타난다는 것에 주목하여 수 0이 짝수라고 설명할 수 있다. 학년이 올라가면서, 학생들은 수학교실에서 합의된 수학적 진리를 이용하여 추측을 정당화할 때 엄밀성의 수준이 상승된다.

NCTM(2000)에 따르면 3-5학년의 학생들은 이전의 경험을 통해 새로운 사실을 참으로 받아들이려는 경향이 있다. 그러나 학생들은 점차 몇 가지 예를 가지고 추측이 참임을 보장할 수 없다는 것과 추측이 참이 아니라는 것을 보이기 위해 반례를 이용할 수 있음을 이해할 수 있게 된다. 따라서, 3-5학년의 학생들은 경험적 정당화 수준에서 시작하여 연역적 정당화의 필요성을 인식하기 시작하는 것으로 해석할 수 있다(류희찬·조완영, 1999). NCTM(2000)은 6-8학년의 학생들은 귀납적 추론과 연역적 추론을 이용하여 논증을 할 수 있어야 한다고 제시한다. 다음은 7학년 학생들을 위한 문제로 삼각수에 관련된 수열문제로 NCTM(2000)에 제시된 문제와 학생들의 반응을 재구성한 것이다(pp. 263-264).

문제: 다음 그림과 같은 수를 삼각수라고 한다.



(1) 네 번째, 다섯 번째 삼각수를 그림으로 나타내어라.
(2) 6번째 삼각수는 얼마인가? 그 이유는 무엇인가?

(3) 100번째 삼각수는 얼마인가? 그 이유를 설명하여라.

<학생들의 반응>

학생 A: 점의 개수가 2개, 3개…규칙적으로 늘어난다는 점을 관찰하고 6번째의 삼각'이 학생은 99번째의 삼각수를 알 수 없었으며 따라서 100번째의 삼각수를 구하지 못하였다.

학생 B: 그림으로 된 삼각수를 수열로 늘어놓은 다음 패턴을 탐구하여 수가 연속적으로 늘어난다는 사실을 알아내었다. 이 학생은 이를 이용하여 어느 항의 삼각수는 (항)×(늘어나는 수)÷2라는 사실을 알아냈다. 100번째 삼각수는

$$\frac{(100)\times(101)}{2}=5050$$

이 된다.

다른 학생들의 반응: 두 학생의 방법이 같은 결과를 가져오는지를 확인하기 위해 7번째 삼각수를 두 가지 방법으로 구하여 같음을 확인하였다. 즉,

$$21+7=\frac{(7)(8)}{2}$$

학생들은 학생 A의 방법이 직관적인 호소력은 있지만 그 방법으로는 100번째 삼각수를 구할 수 없기 때문에 학생 B의 방법이 더 좋을 것이라고 생각했다. 그렇지만, 학생 B의 방법을 정확하게 이해하지 못했다.

교사의 역할: 교사는 학생 B의 방법을 정당화할 기회를 가질 필요가 있음을 인식하고 7번째 삼각수가

$$1+2+3+4+5+6+7=\frac{(7)(8)}{2}$$

로 나타낼 수가 있는지를 확인해 보도록 하였다(가우스 방법을 이용).

일반화: 교사의 요구에 따라 학생들은 어떤

$$\text{삼각수}=\frac{(\text{수})(\text{수}+1)}{2}$$

이라고 일반화하였다.

위의 예에 나타난 추론과 증명활동은 첫째, 학생들의 탐구와 추측활동 과정에서 증명의 필요성이 대두되었고, 둘째, 증명 방법은 가우스 방법이라고 하는 시각적 증명 또는 연산조작적 증명(Tall의 의미)을 이용하였으며, 셋째, 같은 수학교실의 학생들이 학생 B의 추측과 그에 대한 증명을 수용하였다는 특징이 있다. 그러나, 이러한 증명 방법은 전통적인 의미에서의 연역적이고 형식적인 증명과는 다르다. 위의 문제는 고등학교수준에서 계차수열을 이용하여 일반항을 구하고 수학적 귀납법으로 증명된다. 7학년 수준에서는 정당한 '증명' 방법으로 수용되었지만 학생들의 수학적 수준이 향상되면서 보다 엄밀한 형식적인 증명이 요구된다.

9-12학년에서의 추론과 증명에서는 보다 더 엄밀한 수준을 요구하며 다양한 증명방법들이 다루어진다. 학생들은 주어진 조건으로부터 얻은 일반적인 결과의 타당성을 입증하기 위하여 연역적 증명을 할 수 있어야 한다. 그러나, 증명의 형태(예, 문단증명이나 2단 증명)보다 주의 깊게 추론하고 논리적으로 설명을 하였는가에 초점을 맞출 필요가 있다. 교사들은 학생들이 탐구, 추측하고 이를 반증 또는 증명할 필요성이 있음을 이해하도록 도와주는 역할을 해야 한다. 이러한 추론과 증명에 대한 관점은 2단 증명은 약화시키고 구두 또는 글로 연역적 주장을 표현하는 것을 강조한 「수학교육과정과 평가 규준」(NCTM, 1989, 1992, P. 179)에서의 관점과 다르지 않다.

추론과 증명은 교육과정의 어느 특정한 주제(예를 들어 기하) 또는 시간에 국한되지 않고 거의 모든 수업시간에 자연스럽게 포함된다. 예를 들어, 합이 44인 네 개의 연속인 정수를 구하라는 문제에 대해 학생들은 답이 없다고 말한다. 교사는 '왜 그런 정수를 찾을 수 없는지를 어떻게 알 수 있는가'라는 질문을 할 수 있고 학생들은 교사의 질문에 대해

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=44$$

에서

$$n=9\frac{1}{2}$$

이므로 자연수는 없다고 반증할 수 있다.

Ⅲ. 7차 교육과정에서의 '증명'

학교수학에서의 '증명'에서의 '증명'에 대한 관점과 NCTM(2000)의 「학교수학의 원리와 규준」에서 나타나는 증명에 대한 시각은 대체로 같은 맥락에서 해석될 수 있다. Ⅲ장에서는 지금까지 논의된 증명에 대한 관점에서 7차 수학과 교육과정과 교과서에 나타난 추론과 증명 관련 내용을 분석해 본다. 7차 수학과 교육과정 1-7단계에서는 추론과 '증명'을 명시적으로 언급하지 않고 있다. 이는 전통적인 증명관에 따라 '증명이 너무 어려워 초등학교 수학에서 다룰 수 없다'고 보았기 때문인 것으로 보인다. 증명이라는 용어가 처음으로 나타나는 것은 8학년 기하 영역에서이며, 이 때의 증명의 의미는 연역적이고 형식적이며 엄밀한 증명 즉, 전통적인 증명을 의미한다.

본 고에서의 '증명'에 대한 새로운 관점에서 보면 '증명'은 모든 학년 수준에서 모든 영역에 걸쳐 다루어질 수 있다. 본 장에서는 학교수학에서의 '증명' 개념을 토대로 7차 교육과정에서 나타나는 '증명' 활동의 예를 제시한다.

1. 7차 교육과정에서의 증명에 대한 관점

7차 수학과 교육과정에서는 8-가 단계까지 '증명'에 대한 언급이 없다. 8-나 단계에서 처음으로 증명이라는 용어가 나타나며, 8-나 단계에서는 삼각형의 합동조건을 이용하여 삼각형과 사각형에 관한 간단한 성질을 증명하는 것과 닮음의 응용에서 평행선 사이의 선분의 길이의 비에 대한 성질과 삼각형의 중점 연결의 정리에 대한 증명을 다루고 있다. 9-나 단계에서는 피타고라스의 정리, 원의 접선에 대한 성질의 증명을 다루고 있다. 결국, 7차 수학과 교육과정의 국민공통 기본교육과정에서는 8학년과 9학년의 기하영역을 제외하고는 증명을 명시적으로 언급하지 않고 있다. 7차 교육과정에서의 증명관은 증명은 기하에서만 필요하다는 인상을 줄 위험성이 있으며, 다른 영역, 다른 수준에서도 추론과 증명의 중요성을 교육과정에 명시적으로 표현할 필요가 있다.

7차 수학교육과정에서의 증명에 대한 관점은 기하영역에서의 증명지도에 대한 다음의 설명에 잘 나타나 있다(교육부, 1999, pp. 74-75).

> 중학교에서의 증명은 엄격한 논리 전개보다는 이유를 조리 있게 설명하는 정도로 한다는 것에 유의하여 지도한다. 추론의 과정을 정확하고 간결하게 표현하는 능력을 배양하는 것은 매우 중요하나, 이런 능력은 단시일 내에 달성될 수 있는 것은 아니므로 처음에는 간단한 추론에 의하여 증명할 수 있는 것부터 기호를 사용하여 표현해 보도록 한다.

위의 글에 나타난 증명에 대한 시각은 이중적이다. 즉, "중학교에서 증명은 …조리있게 설명하는 정도로…유의하여 지도한다."라는 문장에서는 증명의 개념이 포괄적으로 이해될 수 있음을 암시하고 있다. 그렇지만 "처음에는 간단한 추론에 의하여 증명할 수 있는 것부터 기호를 사용하여 표현해 보도록 한다."에서의 증명은 전통적인 의미에서의 형식적이고 연역적인 증명을 의미하는 것으로 이해된다. 후자의 증명관은 9학년의 기하영역에 대한 다음의 <학습지도상의 유의점>에서 보다 분명하게 드러난다(교육부, 1997, p. 78).

> <학습지도상의 유의점>
> ① 피타고라스의 정리, 원에 내접하는 사각형의 성질, 원과 비례에 관한 성질의 증명은 간단히 다루고 활용에 중점을 둔다.
> ② 피타고라스의 정리의 역은 증명 없이 문제 상황을 통해 간단히 다룬다.

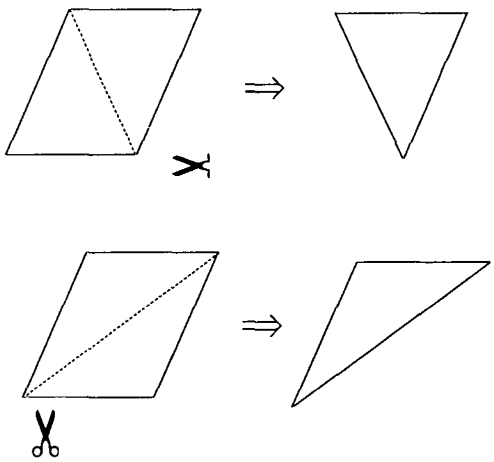
①에서의 "… 증명은 간단히 다루고 활용에 중점을 둔다."와 ②에서의 "… 증명없이 … 다룬다."에서 나오는 증명은 형식적이고 엄밀한 증명의 의미를 내포하고 있다. 형식적이고 엄밀한 증명을 약화시키고자 하는 7차 수학과 교육과정의 관점이 추론과 '증명'을 약화시키자는 것으로 받아들여질 수 있다. 7차 교육과정 이전에도 학생들이 '증명'을 개발하기보다는 교사가 증명의 과정을 설명하고 학생들은 '정리를 활용'하는 활동에 초점을 두는 경우가 대부분이었다. '증명'에 대한 관점을 분명하게 제시하지 않은 상태에서 증명(형식적이고 엄밀한 증명)을 약화시키려는 시도는 지금까지의 잘못된 증명 교수학습 방법을 인정하는 것으로 이해될 수 있다.

2. 7차 수학과 교육과정에서의 '증명' 활동의 예

앞에서 논의한 증명에 대한 새로운 관점에서 보면 '증명'은 8-(나)단계의 도형의 성질 이전에 또는 기하 영역 외에서도 다루어질 수 있다. 8-(나), 9-(나) 단계의 논증기하 단원에 나오는 정리의 활용 문제 또한 '증명'의 관점에서 다룰 수 있다. "…을 구하라."는 문제를 "…을 구하고 그 이유를 설명하여라."로 묻는 방식을 바꾸면 학생들은 답을 구한 후 자신의 답의 타당성을 입증할 기회를 갖게 된다.

다음의 활동1(p. 63)과 활동 2(p. 64)는 4-(나) 단계 수학교과서의 <사각형과 도형 만들기>에 나오는 활동이다. 이 활동들은 평행사변형과 마름모가 무엇인가를 약속한 후에 성질을 조사해 보는 활동이다.

활동 1. 평행사변형에서 변의 길이와 각의 크기를 알아보아라.



- 평행사변형의 종이를 그림과 같이 잘라서 겹쳐 보아라.
- 평행사변형의 마주 보는 변의 길이는 같은가?
- 평행사변형의 마주 보는 각의 크기는 같은가?

활동 2. 종이를 접고 오려서 마름모를 만들어 보아라.

- 직사각형의 종이를 그림과 같이 2번 접어서 가위로 잘라 보아라.
- 자른 것을 펼쳐 보아라. 이 도형은 마름모인가?
- 왜 그렇게 생각하는가?

위의 두 활동은 종이를 접고 자르는 활동을 요구하며 '왜 그렇게 생각하는가?'라는 질문에서 학생들의 '증명' 활동이 예상된다. 그러나, 학교수학에서의 '증명' 개념에서 볼 때 질문 방법을 바꿀 필요가 있다. 첫째, 하위 질문에서 구하는 방법을 구체적으로 제시함으로써 학생들의 재발명의 기회가 축소된다. 그림의 제시와 구체적인 질문은 학생들에게 유도된 답을 암시하여 진정한 사고의 기회가 제한된다. 본 질문을 "…보고 그 이유를 설명하여라."로 바꾸어 제시하고 그림과 하위 질문을 생략하면

학생들은 다양한 방법을 생각해서 평행사변형의 각과 변 사이의 관계를 찾아내고 자신의 방법에 대한 이유를 설명할 수 있을 것이다. 학생들의 방법과 이유는 교실 상호작용을 통해 참인 명제와 정당화 방법을 합의해 나갈 수 있다. 이 수준에서의 '증명'은 Tall(1995)의 의미에서 활동적 증명이며, 8-나 단계에서는 삼각형의 합동을 이용하여 보다 형식적으로 '증명'된다. 잘라서 겹쳐보는 활동에는 두 삼각형이 합동이라는 사실이 포함되어 있고 평행선 정리와 삼각형의 합동을 이용하여 보다 수준 높은 '증명'과 연결된다.

다음 문제는 8-가 단계의 'I, 유리수' 단원 중 '2. 유리수와 순환소수 관련' 내용이다. 학생들이 순환소수를 분수로 나타내는 방법을 학습하기 전이나 후에 다음과 같은 문제를 해결할 수 있다.

문제: $0.99\cdots = 1$이 참인지 거짓인지를 판단하고 그 이유를 설명하여라.

<학생들의 예상 반응>

학생 A: $0.99\cdots$를 분수로 고치면

$$\frac{9}{9} = 1$$

이므로 참입니다.

학생 B:

$$\begin{array}{rl} & 10x = 9.999\cdots \\ -) & x = 0.999\cdots \\ \hline & 9x = 9 \end{array}$$

따라서,

$$x = \frac{9}{9} = 1$$

학생 C:

$$\begin{aligned} 0.999\cdots &= 0.9 + 0.09 + 0.009 + \cdots \\ &= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots \end{aligned}$$

이것을 구할 수 있으면 될텐데…

교사의 역할: 학생들의 반응은 일반적으로 학생 A와 학생 B의 유형으로 나누어질 것이다. 학생 A 유형의 반응을 나타낸 학생들 중에서 학생 B의 사고과정을 이해하지 못한 상태에서 기계적으로 반응을 하는 학생들도 있을 것이다. 교사는 학생 B의 과정을 포함해서 이유를 설명하도록 학생들에게 추가로 요구할 수 있다. 학생 C의 반응이 실제로 나올 수 있는지는 확실하지 않다. 그러나 교사가 이러한 사고를 촉진시킬 수 있으며, 이러한 설명 방법은 추가적인 증명에 대한 논의로 연결된다. 이 문제는 고등학교 수준에서 무한등비급수의 합을 구하는 방법에 의해 해결된다.

일반화: 학생들은 '0.99…는 1보다 작다'라는 직관적인 생각을 가지고 있는 경우가 많을 것이다. 이를 토대로 증명의 역할과 수학적 표현방법에 대한 수학계의 합의에 대한 논의가 가능하다. 또한 모든 정수는 순환하는 무한소수로 나타낼 수 있는지에 대해 논의함으로써 학생들은 유리수의 뜻과 정수와 유리수의 포함관계에 대한 의미를 확장시킬 수 있다.

7차 수학과 교육과정의 8-나, 9-나 단계의 논증기하 부분에서 다루어지는 증명은 명제를 추측할 기회를 제공하지 않고, 교과서에 제시된 명제를 연역적이고 형식적으로 증명하도록 요구한다(예를 들면, 직각삼각형의 빗변의 중점에서 세 꼭지점까지의 거리는 같음을 보여라.). 증명 문제는 참임을 전제한 가정과 참임을 보여주어야 할 결론이 그림과 함께 제시되며, 교사, 교과서, 그리고 학생들은 증명해야 할 명제가 참이라는 것을 이미 인정하고 연역적인 증명을 시도한다. 여기에는 두 가지 문제가 있다. 첫째, 학생들은 증명을 왜 해야 하는지를 이해하지 못한다. 둘째, 증명은 연역적이고 형식적이어야 하며 엄밀해야 한다는 가정에서 학생들의 다양한 증명방법을 인정하지 않는다.

이러한 증명지도의 문제는 지금까지 논의한 학교수학에서의 '증명' 개념을 수용함으로써 해결될 수 있다. 학생들에게 수학적 개념과 원리를 재발명할 기회를 주어 '증명'의 필요성을 자연스럽게 이해하게 할 수 있으며, 학생들의

다양한 수준의 '증명'을 인정함으로써 모든 수준의 모든 영역에서 '증명' 활동이 강조될 수 있다.

Ⅳ. 결론

본 연구에서는 Lakatos의 준경험주의 수학철학과 사회적 구성주의 관점을 토대로 절대주의 수학철학을 기반으로 하는 현재의 증명지도 문제의 대안을 찾고자 하였다. 이를 위해 먼저 학교수학에서의 '증명'을 다음 세 가지 요소를 토대로 개념화하였다.

① 증명의 역할은 정당화, 설명, 체계화, 발견, 의사소통 등 다양하다.
② 증명의 타당성의 기준과 엄밀성의 수준은 수학자 사회 공동체의 합의에 의해 결정된다.
③ 수학화된 경험적 이론과 증명의 역할 사이에는 역동적 관계가 있다.

다음에는 이를 토대로 학교수학에서의 다양한 '증명' 방법과 증명 수준의 발달에 관한 예를 고찰하였다. 특히 7차 수학과 교육과정에서의 증명활동의 예를 몇 가지 제시하였다.

전통적인 연역적이고 형식적인 증명에 기초한 증명지도의 문제점 중의 하나는 연역적이고 형식적이며 엄밀한 증명을 중심으로 특정 학년에서 집중적으로 다루어지고 있다는 데 있다 (Usiskin, 1997). 방정식에 대한 개념이 초등학교에서부터 다루어지면서 점점 발달해 가듯이, 포괄적인 의미에서의 '증명'도 초등학교부터 다루어질 필요가 있다. 초등학교 수준에서 활동적 증명 등 다양한 증명활동을 도입하고 학생들의 수준에 따라 점차 형식적인 증명으로 증명의 수준을 높여 가면 '증명'에 대한 학생들의 인식도 달라질 수 있을 것이다.

본 연구는 7차 수학과 교육과정에서 대안적인 증명 교수학습 방법을 제안하고, 8차 수학과 교육과정에서 증명에 대한 관점을 제공한다는 점에서 의미가 있으며, 이러한 '증명관'에서 이루어지는 실제 수업에 대한 사례연구가 요구된다.

참고문헌

강행고 외(2001). 수학 8-나. (주)중앙교육진흥연구소.

교육부(1997). 수학과 교육과정(교육부 고시 제 1997-15호 [별책 8]). 대한교과서주식회사

교육부(1999). 중학교 교육과정 해설 (Ⅲ). 대한교과서주식회사.

교육부(2001). 수학 4-나. 대한교과서주식회사.

나귀수(1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석 -중학교 기하단원을 중심으로-. 서울대학교 박사학위논문.

류성림(1998). 피아제의 균형화 모델에 의한 증명의 지도 방법 탐색. 한국교원대학교 박사학위논문.

류희찬 · 조완영(1999). 학생들의 정당화 유형과 탐구형 소프트웨어의 활용에 관한 연구. 수학교육학연구, 9(1), 245-261.

서동엽(1999). 증명의 구성요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색-중학교 수학을 중심으로-. 서울대학교 박사학위논문.

우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

조완영(2000). 탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 중학교 2학년 학생의 증명활동에 관한 사례연구. 한국교원대학교 박사학위논문.

황석근 · 이재돈(2001). 수학 8-나. 한서출판사.

Balacheff, N. (1987). Processes of proof and situations of validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.

Bell, A. W. (1976). A Study of Pupil's Proof-Explanations in Mathematical Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.

Bruner, J. S. (1966). *Towards theory of instruction*. Cambridge, Mass.: Havard University Press.

Carnap, R. (1966). *An introduction to the philosophy of science*. New York: Basic Books, Inc. 윤용택(역)(1993). 과학철학 입문. 서울 : 서광사.

De Villiers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press

Eves, H. (1953). *Introduction to the history of mathematics*. 이우영 · 신항균(역) (1995). 수학사. 경문사.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as educational task*. D. Reidel Publishing Company.

Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in mathematics education*. Toronto : Oise Press

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop et al. (Eds), *International handbook of mathematics education(part 2)*, (pp. 877-908). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Lakatos, I. M. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press, Cambridge.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author. 구광조 · 오병승 · 류희찬(역). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향. 서울: 경문사.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs?. *Mathematics teacher, 78(6)*, 448-456.

Tall, D. (1995). *Cognitive developments, representations and proof*. Paper presented at the conference Justifying and Proving in School Mathematics Institute of Education, London, 27-38.

Thom, R. (1971). Modern mathematics: An educational and philosophic error? In A. G. Howson (Ed.), Developments in mathematics education(pp. 194-209). Cambridge: Cambridge University Press.

Usiskin, Z. (1997). The implications of 'geometry for all'. *NSCM Journal of Mathematics Education Leadership*, 1(3), 5-16.

'Proof' in school mathematics

Cho, Wanyoung (Chungbuk National University)
Kwon, Sunglyong (Seoul tapdong elementary school)

The purpose of this study is to conceptualize 'proof' in school mathematics. We based on the assumption the following.

(a) There are several different roles of 'proof' : verification, explanation, systematization, discovery, communication

(b) Accepted criteria for the validity and rigor of a mathematical 'proof' is decided by negotiation of school mathematics community.

(c) There are dynamic relations between mathematical proof and empirical theory.

We need to rethink the nature of mathematical proof and give appropriate consideration to the different types of proof related to the cognitive development of the notion of proof. 'Proof' in school mathematics should be conceptualized in the broader, psychological sense of justification rather than in the narrow sense of deductive, formal proof.

'Proof' has not been taught in elementary mathematics, traditionally. Most students have had little exposure to the ideas of proof before the geometry. However, 'Proof' cannot simply be taught in a single unit. Rather, proof must be a consistent part of students' mathematical experience in all grades, in all mathematics.