大韓數學教育學會誌 數學教育學研究 第 11 卷 第 2 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XI, No.2, 363-384. Dec 2001

학교수학 교과서에서 사용하는 정의에 관한 연구

우 정 호* 조 영 미**

I. 서 언

학교수학에서 우리는 동일한 용어가 학년을 달리하여 상이하게 정의되는 현상을 쉽게 찾아볼 수 있다. 예컨대, 상수항이라는 용어를, 중학교에서는 "다항식 $2x-3y-4$에서 -4와 같이 수만으로 이루어진 항"으로, 고등학교에서는 "다항식에서 어떤 특정한 문자에 대하여 생각할 때, 그 문자를 포함하지 않는 항"으로 정의한다. 또 다른 예를 들면, 약수, 배수를, 초등학교에서는 "2를 1배, 2배, 3배한 수 2, 4, 6을 2의 배수라고 한다. 6을 1, 2, 3, 6으로 나누면 나누어 떨어진다. 이 때, 1, 2, 3, 6을 6의 약수라고 한다"로 정의하며, 중학교에서는 '자연수 a가 자연수 b로 나누어 떨어질 때, 곧 $a=b\times$(자연수)의 꼴로 나타낼 수 있을 때, b를 a의 약수, a를 b의 배수라고 한다'라고 정의한다.

또한, 동일한 용어가 상이하게 정의되는 현상을 우리는 학교수학과 대학수학을 비교해 봄으로써 확인할 수 있다. 예컨대, 극한이라는 용어를, 고등학교에서는 "무한 수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 하고, α를 무한수열 $\{a_n\}$의 극한 또는 극한값이라고 한다"라고 정의하는 데 반해, 대학수학에서는 "임의의 양수 ε에 대응하여 그 값이 아무리 적더라도 $n\geq N$인 모든 n에 대해 $|a-a_n|<\varepsilon$인 정수 N(ε에 의존하는)이 발견될 수 있다면, 수열 $\{a_n\}$은 n이 무한대로 향할 때 극한(또는 극한값) α를 가진다"라고 정의한다.

본 논문은, 위와 같이 동일한 용어가, 초중고 학교수학에서, 그리고 학교수학과 대학수학에서 달리 정의되는 현상을 이해해 보고자 하는 문제 의식에서 출발하였다. 학교수학에 제시되는 정의는 고정된 것이 아니며, 그런 가운데, 특정한 정의를 선택할 때에는 그것을 통하여 달성하고자 하는 바가 별도로 있을 것임을 충분히 생각해 볼 수 있다. 본 논문에서는 이러한 기본적인 문제 의식 아래, 학교수학에 제시된 정의를 다음과 같은 두 가지 문제를 중심으로 하여 이해해 보고자 하였다.

첫째, 용어를 정의할 때, 학교수학에서는 어떤 성격의 정의 방법을 어떻게 사용하고 있는가? 둘째, 학교수학에서는, 어떤 정의 기능이 어떠한 양태로 등장하고 있으며, 이는 어떻게 지도되고 있는가?

이를 좀더 구체적으로 진술하면 다음과 같다. 수학 교과서에 제시되는 정의 방법에는 수학에서 사용되는 정의 방법이 포함되어 있다.

* 서울대학교
** 인천교육대학교

수학에서 사용되는 정의 방법은 학문을 위한 것으로 형식적이고 엄밀한 방법이다. 학교수학에서 가르치게 되는 지식의 근원은 수학 지식이기 때문에, 수학 지식의 성격을 반영하게 된다. 마찬가지로, 정의에 있어서도, 학교수학에서는 수학에서 사용하는 정의 방법을 어느 정도 반영하게 된다. 그런데, 많은 경우, 학교수학에서는 수학에서 사용하는 정의 방법을 그대로 사용하기보다는 학교수학에 적절하다고 여겨지는 형태로 변형한다. 이렇게 교수학적 의도에 따라 변형된 결과에 해당하는 학교수학의 정의는, 학문으로서의 정의 방법에 비해 덜 엄밀하며, 때로는 전혀 엄밀하지 않기도 한다. 대체적으로 말해, 학문으로서의 정의가 갖추어야 할 조건에 대해서는 알려져 있다. 이에 반해, 학교수학에 제시된 정의의 특징을 분석한 연구는 거의 없는 형편이다. 이와 같은 문제 의식 아래, 본 논문에서는 학교수학에 제시된 정의가 지닌 특징을 분석하고, 이를 바탕으로 정의의 수준을 탐색해 보고자 한다.

한편, 학교수학에서 특정한 정의 방법을 선택할 때 그 방법에 기대하는 정의 기능이 있을 것이다. 어떤 개념을 정의하기 위해 특정한 정의 방법을 선택할 때, 학교수학에서는 무엇보다도 학습자의 이해를 목적으로 하기 마련이다. 다시 말해, 선택된 정의 방법을 통하여 학습자가 그 뜻을 보다 잘 이해할 수 있기를 기대하는 것이다. 이는 학교수학에서 정의에 기대하는 중요한 기능 중에 하나이다. 그런데, 학교수학에서는 의식적이든 무의식적이든지 간에, 수학에서 정의 방법을 택할 때 기대하는 정의 기능을 또한 기대하게 된다. 수학에서는 수학적 맥락이나 상황에서 특정한 정의를 선택하며, 그것이 그 맥락과 상황에서 특정한 기능을 수행하길 기대한다. 학교수학에서는, 수학을 가르치는 한, 이러한 기능을 다소간 고려하지 않을 수 없다. 학교수학에서 기대하는 정의 기능은 이와 같이 학습자의 이해를 위한 기능과, 수학에서 기대하는 기능으로 대별할 수 있다. 본 논문에서는 후자에 해당하는 정의 기능을 중점적으로 살펴보고자 한다. 최근에 학교수학에서 수학화 활동이 강조되면서 정의를 활동으로 지도하는 방안에 대한 주장이 제기되어 왔다(Fischbein & Mariotti, 1995; Borasi, 1992; Freudenthal, 1973). 정의를 활동으로 지도한다는 것은, 대체적으로 말해, 정의를 수학화 활동으로 가르치자는 것으로, 이는 달리 말해 수학적인 정의의 방법과 기능을 지도하자는 것으로 해석할 수 있다. 학교수학에 제시된 수학적 정의 방법과 기능을 분석함으로써 이러한 연구 경향과 연결고리를 찾을 수 있을 것이다.

마지막으로, 이와 같이 정의 방법과 정의 기능 각 측면에서 행한 학교수학에 제시된 정의의 특성에 대한 분석을 토대로 정의 지도에 관한 시사점을 또한 모색해 보고자 한다.

II. 본 론

1. 이론적 고찰

학교수학에 제시된 정의를 정의 방법과 정의 기능이라는 두 측면에서 분석하기 위한 틀을 마련하기 위해 두 측면에 대하여 이론적으로 분석한다.

1) 정의 방법

Ginther(1964)는 정의 유형을 내포적, 외연적, 동의적인 것으로 구분하고, 이러한 구분에 비추어 고등학교 수학 교과서에 나타난 정의의 특성을 분석한 바 있다. 본 논문에서는 그의

구분을 기본 틀로 하면서, 각 방법 내에서 수학적 특성이나 학교수학의 특성을 반영할 수 있도록 정의 방법을 세분한다.

(1) 내포적 정의 방법

내포의 뜻으로 흔히 언급되는 것은 개념이 적용되는 대상들의 공통된 성질이다. 그런데, 내포가 다양한 의미로 사용되기 때문에, 내포적 방법을 직접적으로 정의하기는 힘들다. 따라서, 본 논문에서는 내포적 방법을 간접적으로, 즉 일정한 조건을 제시하고 있는 정의를 내포적 방법으로 분류하고자 한다. 이하에서는 이러한 관점에서 내포적 방법으로 분류 가능한 정의 방법에 대해 살펴보기로 한다.

가. 논리적 정의

논리적 정의는 [최근]류와 종차에 의한 정의이다. 학교수학에 제시된 정의 중에서 '삼각형'을 '선분의 개수가 3인 다각형'으로, '일차식'을 "차수가 1인 다항식"으로 정의하는 것과 같은 경우는 논리적 정의이다.

초등학교에서는 '삼각형'을 "세 변으로 둘러싸인 도형"으로 정의하고 있다. 이는 류와 종차에 의한 정의를 제시하고 있기 때문에 논리적 정의라고 볼 수 있지만, '도형'이라는 용어는, '다각형'과 비교해 볼 때, '삼각형'에 대해 최근류가 아니기 때문에, 엄밀하게 말하면, 논리적 정의가 아니다. 이와 같이, 논리적 정의는 일단 정의가 주어지면 그것을 평가하는 데 기준으로 사용할 수 있다는 유용성을 가지고 있다.

나. 발생적 정의

발생적 정의는 어떤 개념의 발생 조건 또는 발생 과정을 사용하여 정의하는 것이다. 예를 들어, 반원을 회전하여 얻은 도형으로 구를 정의한다든지, 어떤 한 변을 중심으로 직각삼각형이나 직사각형을 회전시켜 얻은 도형으로 원뿔과 실린더를 정의하는 경우이다.

발생적 정의의 특징은 운동 관념을 사용한다는 점이다. 수학사적으로 볼 때, 운동 관념과 관련하여 발생적 정의는 흥미로운 역사를 지니고 있다. 고대 그리스에서부터 일찍이 운동 관념을 사용하여 도형을 정의하였지만, 전반적으로 볼 때, 발생적 정의는 고대의 수학 발전에서 커다란 역할을 하지는 않았다. 운동개념이 수학의 세계에서 본격적으로 연구되고 그 비중이 커지게 된 시기는 17세기이다. 당시 수학에서 운동 관념이 광범위하게 사용된 것과 역학적인 개념이 출현하여 발달한 것은 밀접한 관련이 있다. 당시 Napier, Kepler, Descartes, Ferma, Torricelli, Roverbal, Wallis, Barrow, Newton 등 대표적인 수학자들은 기하를 탐구하는 데 운동 관념을 사용하였다(Mancosu, 1996, p. 95).

또한, 발생적 정의는 수학에서의 논증 방식과 철학자들의 사유에도 영향을 끼쳤다. 미적분의 기본정리의 실질적인 발견자인 Barrow는 "발생적 정의는 정의되는 양의 성격을 설명할 뿐만 아니라 동시에 존재성을 보여주며 그것의 구성방법을 보여준다. 또한 이 정의는 이것이 무엇인지를 기술할 뿐만 아니라 실험에 의해 그렇게 될 수 있음을 증명한다"라고 설명한 바 있다. 또한, Hobbes나 Spinoza는 발생적 정의를 인과적 정의로 보고 그 역할을 강조하고 있으며, 과학의 영역에서 발생적이지 않은 정의를 배제하였다.

다. 관계적 정의

관계적 정의는, 관계로 이루어진 어떤 체계 내에서 정의하려는 사물이 차지하는 위치를 사용한 정의로, '위치적 정의'라고 말할 수도 있다. Ogden과 Richards는 정의를, "어떤 사람에게

특정 장소가 어디에 있는지를 알려주려고 할 때 우리는 이미 그가 알고 있는 장소들과 공간적으로 연결되는 것들을 묘사한다. 정의도 이와 마찬가지이다"(Robnson, 1954, p. 99)와 같이 표현한 바 있다.

현재 학교수학에서는 음의 정수를 " $-1, -2, -3, \cdots$과 같이 자연수에 −부호가 붙은 수를 음의 정수라고 한다(초, 6-2, p. 6)."로 정의한다. 그런데, 음의 정수를 " $x+a=0$ ($a>0$)을 만족하는 수 x를 $-a$라고 하며, 이를 음의 정수라고 한다."로 정의할 수 있다. 두 정의를 비교해 볼 때, 전자는 표지(標識)를 사용하여 정의한 데 반해, 후자는 덧셈과의 관계 속에서 음수를 '관계적으로' 정의한 것으로 볼 수 있다.

라. 조작적 정의

조작적 정의는 "한 개념이 관찰되는 사태를 정의의 한 부분으로 포함시키는 정의"를 뜻한다(이홍우, 1990, p. 41). "기압이라는 것은 수은을 가득 채운 유리관을 수은이 담긴 그릇에 거꾸로 세웠을 때 수은 면에서부터 수은 기둥의 높이(또는, 그 높이를 수은의 비중에 비추어 환산한 것)를 뜻한다"고 하는 정의에는 "유리관에 수은을 가득 채우고 그 주둥이를 손가락으로 꼭 막아 수은이 담긴 그릇에 거꾸로 세우는 일"이라는, 기압이 관찰되는 사태를 만들기 위한 조작이 들어 있다(이홍우, 1990, pp. 41-42). 이 조작은 Torricelli가 만든 것으로, 이로 인해 기압은 '과학적인' 개념이 되었고, 기압에 관한 과학적 법칙의 발견도 이 조작으로 말미암아 가능하게 되었다. 이것으로 보면, 조작적 정의는 과학이라는 활동에 요구된다고 말할 수 있다.

어떤 개념이 조작적으로 정의될 수 있는가에 관하여 장상호는 다음과 같이 설명한다. 개념을 관찰적 개념, 가설적 구성물, 이론적 구성물로 구분할 때, 조작적 정의는 가설적 구성물과 관련이 있다. 가설적 구성물은 그것이 과학자의 예상에 의해서 창안된 것이기는 하지만 어떤 조건하에서 그것의 존재를 간접적으로 지적해 볼 수 있는 개념을 뜻한다. '공격성', '지능', '온도', '시간' 등은 가설적 구성물에 속한다. 이들은 대부분 사물의 성향에 관한 것이며 눈으로 직접 그것의 존재를 판독할 수는 없다(장상호, 1978, p. 50).

초등학교 수학에서 중요하게 다루어지는 길이, 넓이, 부피, 무게 등의 개념은 가설적 구성물에 해당한다. 따라서, 이들 개념은 조작적으로 정의할 수 있다. 예를 들어, "자로 재어 숫자로 나타낸 것"이라고 정의한다면, 여기에는 '자로 잰다'라는 조작이 포함되어 있으며, 길이 개념을 관찰할 수 있는 사태가 들어 있다. 그러나 초등학교 수학에서는 그러한 개념들을 조작적으로 정의하고 있지 않다.

마. 공리적 정의

공리적 정의에서는, 정의하려는 대상을 직접 기술하지 않고, 그 대상이 갖추어야 할 조건을 제시하여 정의한다. 공리적 정의는 대부분의 사람들에게 친숙하지 않다. 그렇지만 이 개념은 논리적인 이론에서는 필수적이다. 공리적 정의에 대한 필요성은 순환을 피하면서 모든 용어를 명시적으로 정의하는 것이 불가능하다는 사실에 기인한다. 이에 대해, 명시적 정의는 정의하려는 대상이 지닌 속성을 직접 기술하여 정의하는 것이며 우리에게 비교적 친숙한 것이다.

Freudenthal(1973)에 따르면, 현대수학의 특징인 엄밀한 표현과 형식화는 일상언어로부터 점진적으로 이루어져 왔으며, 현대수학의 전형적인 개념 구성 패턴인 공리적 추상화와 암묵적 정의 역시 일상적인 개념 구성 패턴이 형식화

된 것으로 보고 있다. 대부분의 사람들은 다른 사람들이 새로운 용어를 어떻게 사용하는지를 관찰함으로써 자신의 어휘에 그 새로운 용어를 도입하려고 노력한다. 이 때, 단어가 나타나는 문맥의 전후 관계를 살펴서 그 단어를 정의하려는 생각은 공리적 정의의 기본적인 발상이다. 학교수학에서는 현대수학에서 보여지는 것과 같은 공리적 정의는 사용되지 않는다. 그런데, 단어가 나타나는 문맥의 전후 관계를 살펴서 단어의 뜻을 파악하는 사례들은 존재한다. 이를테면, 사다리꼴을 "한 쌍의 마주 보는 변이 서로 평행인 사각형"으로 정의한다. 이 때, '마주 보는 변'에 대해 명시적으로 정의하지 않고, 그 단어가 사용되는 문맥을 통하여 정의한다.

(2) 외연적 정의 방법

본래 외연은 특정 개념에 속하는 대상 '전체'를 가리키는 용어이다. 이 의미대로라면, 외연적 정의는 대상 전체를 사용한 정의이다. 그런데, 외연 전체를 열거하는 일은 불가능하다. 따라서, 우리는 외연의 일부만을 사용하며, 여기서의 외연적 방법은 개념에 속하는 일부의 예들을 사용한 정의이다.

외연적 방법은 다시 세 가지 하위 유형으로 구분된다. 그 개념이 가리키고자 하는 대상을 열거하는 것, 지시하여 정의하는 것, 대상들을 일일이 열거하는 대신 부분집합을 열거하여 정의하는 것 등이다(Copi, 1963, pp. 187-189).

외연적 방법은 주어진 개념을 완전하게 규정하고 있지 않다는 점에서 논리적으로 불완전하다고 볼 수 있다. 그러나, 일상에서 형성되는 개념의 경우 예가 중요한 역할을 한다. 예를 통하여 개념에 대한 가설을 형성하고, 이 가설을 또 다른 예에 적용해 보면서 가설을 검증하고 수정하게 된다. 또한, 우리는 추상적인 문제를 다룰 때에도, 구체적인 사례, 또는 전형적 모델을 가지고 사고하는 경향이 강하다. 이와 같이 외연적 방법은 심리적인 적합성을 지닐 수 있기 때문에, 학교수학에서, 특히 초등학교 수학에서 적극적으로 사용된다.

이러한 점을 감안할 때, 학생들의 이해를 목적으로 하는 학교수학에서 외연적 방법은 배제해야 할 대상이 아니라, 적극적으로 수용하여야 할 대상이며, 동시에 그 방법이 지닌 한계를 분명히 하는 작업을 필요로 하는 정의 방법이다. 외연적 방법의 한계로는 두 가지를 생각할 수 있다. 개념 지도와 관련하여 예를 제시할 때의 의도는, 그 예로부터 가르치고자 하는 개념을 형성시키려는 것이다. 그런데, 학습자가 예로부터 그 개념을 형성하지 못하고, 예에 고착되는 데 그치는 경우들이 있다. 다음으로, 가르치고자 하는 개념 외에 다른 요소들이 부각되어 애초에 가르치고자 하였던 개념 이외의 것이 형성될 수 있다. 외연적 정의 방법이 지닌 한계를 분명히 밝히고 그 극복방안을 모색하는 것은 개념 형성을 위해 반드시 필요한 작업이다.

(3) 동의적 정의 방법

피정의항과 유사한 의미를 지닌 용어를 사용하여 정의하는 방법으로, 두 가지 하위 유형을 생각할 수 있다. 첫 번째 유형은 학습자에게 친숙하거나, 학습자가 이해하기 쉬운 용어로 피정의항을 정의하는 것이다. 둘째로, 영한사전 'definition: 정의'에서 보듯이, 외국어 사전은 각 용어에 대해 동의적 방법으로 정의를 내리고 있다고 볼 수 있다. 학교수학에서 이와 비슷한 사례로는, $x+6=1$를 "엑스 더하기 육은 십일과 같다"라고 읽는다고 정의하는 경우나, 또는 $243_{(5)}$를 '오진법의 수 2, 4, 3'으로 읽는다고 정의하는 경우를 들 수 있다.

한편, Smith은 교육현장에서 사용하는 정의의 유형을 검토하는 과정에서, 동의적 유형과 관련하여 '말에 의한' 동의적 방법과 '상징에 의한' 동의적 방법이라는 두 가지 범주를 제시한 바 있다. 이 중 후자에 해당하는 것으로 축약과 기호화를 들고 있다. 이 방법은 특히 수학이나 물리 등에서 많이 사용된다(Smith, 1962, pp. 67-86). 학교수학에서 축약의 경우로는, "양의 유리수를 간단히 양수라고 한다"라는 정의를 들 수 있다. 기호화의 경우로는, "두 복소수 $a+bi$와 $c+di$가 같다는 것을 $a+bi=c+di$로 나타낸다"라고 정의하는 경우이다. 학교수학에서 이러한 유형의 정의는 결코 적지 않다. 따라서, 본 논문에서는 Smith의 구분을 감안하여, 축약이나 기호화 역시 동의적 방법으로 간주하고자 한다.

2) 정의 기능

이하에서는 Robinson과 Scheffler의 구분을 참조하여, 정의 기능을 약정, 판별, 분석, 개선, 논증으로 구분, 각각의 기능에 대해 살펴보고자 한다. 그 전에 먼저 수학적 정의 기능이라고 보기 어려운 기술 기능에 대해 살펴보기로 한다. 이는 다음에서 본격적으로 다루고자 하는 수학적 정의 기능을 부각시키는 데에 목적이 있다.

(1) 기술 기능

기술적 정의는 용어의 뜻을 설명하기 위해 내리는 정의를 가리키며, 간단히, '뜻풀이'를 위한 정의라고 표현할 수도 있을 것이다. 전문분야에서 생산적인 연구 활동을 하려면 약 5만개의 정보적 지식으로 구성된 어휘를 구사하여 많은 상황에 자동적으로 반응할 수 있어야 한다고 한다. 학교수학에서도 수학적 기량을 발휘하기 위해서는 학생들에게 정보적 지식이 필요하다. 그 정보적 지식의 중요한 부분을 용어가 차지한다. 기술적 정의를 통하여 우리는 그러한 용어를 가르칠 수 있다.

그런데, 기술적 정의는 진정한 수학적 정의의 기능으로 간주하기 힘들다. 수학자들은 수학적 의미를 창조해 내는 수학적 정의를 필요로 하기 때문에, 어떤 용어가 일상이나 수학세계에서 어떤 의미로 사용되는가, 곧 정의의 기술적 기능에 대해서는 관심을 갖지 않거나 또는 관심을 갖는다 하여도 주된 관심사는 아니다.

(2) 약정 기능

용어와 의미 사이에 새로운 관계를 세우기 위해 정의할 때, 약정이라는 정의 기능이 수행된 것이다. 약정 활동은 고의성, 임의성, 의식성이라는 세 가지 특징을 지닌다. 고의성은 기존의 의미와는 무관하게, 또는 그 의미에서 의도적으로 일탈하여 용어와 의미에 새로운 규칙을 부여함을 뜻한다. 임의성은, 이렇게 새로운 규칙이 부여될 때, 용어나 의미 모두 임의대로 선정될 수 있다는 것이다. 의식성은 일단 정의가 내려진 후에 그 용어에는 그 의미만을, 그 의미에는 그 용어만을 의식적으로 연결시켜야 함을 뜻한다(Robinson, 1954, p. 60).

약정적 정의의 대표적인 경우로 기호나 이름 붙이기를 들 수 있다. 약정 활동이 고의성과 임의성, 즉 의도적으로 의미와 용어 사이에 관계를 임의로 설정할 수 있음을 주된 특징으로 하지만, 수학자들이 이러한 관계를, 말 그대로, 아무렇게나 설정하는 것은 아니다. 기호나 이름을 붙이고자 할 때, 가급적이면 그 의미가 반영되도록 이름이나 기호를 정하려고 한다. 예컨대, Napier는 로가리즘(logarithm)을 발명하였는데, 로가리즘은 비(ratio)와 수(number)의 합

성어로서 '비를 계산하는 수'라는 뜻을 가지고 있다. 이러한 뜻을 지닌 용어는, Napier가 로가리즘을 만든 역사 발생적 과정을 반영하고 있다(우정호, 1998, pp. 61-64).

수학자는 여러 가지 기호를 발명하여 왔다. 그러한 기호로 인하여 여러 가지 측면에서 수학자들의 활동은 한결 효율적으로 또한 유용하게 이루어질 수 있었다. 속기가 가능해지면서 간단하게 표현할 수 있게 되었다. 그 기호를 사용하는 사람들은 이해가 수월해지며 그 대상을 효율적으로 다룰 수 있게 된다. 때로는, 사고의 전환도 가능해진다. 예를 들어, 수학사를 통해 볼 때, 기호주의의 발달은 절차적인 관점으로부터 구조적인 관점으로의 사고의 전환을 가능하게 하였다.

(3) 판별 기능

많은 경우, 주어진 대상이 특정 개념에 속하는지 여부를 직관적으로 판별할 수 있다. 하지만, 사안이 복잡하거나 미묘할 경우, 직관적으로는 판별이 가능하지 않은 경우도 적지 않다. 이러한 경우에 우리는 그 개념의 정의에 비추어 판별하게 된다.

이미지, 또는 직관과 관련하여 Fischbein (1987)은 가능한 일찍 수학적 정의의 의미를 가르칠 것을 주장하였다. 직관은 수학의 발달과 학습에 심각한 장애 요인이 되지만 수학적 사고를 하는 데 반드시 필요하다는 점에서 볼 때, 직관은 제거해야 할 대상이 아니라 조종해야 할 대상이 된다. 문제는, 학생의 직관력을 개발하되, 그러한 직관을 조종할 수 있는 능력과 함께 형식적인 수학적 요구와 일치하는 새로운 직관을 구성하는 능력을 개발하는 것이다. 후자의 능력을 키우는 방법 중에 한 가지가, 가능한 수학적 정의의 의미를 일찌감치 알도록 하는 것이다.

직관에 의존함이 없이 엄밀하게 대상을 판별하는 일이 정의를 기반으로 가능하게 된다. 따라서, 우리는 판별이 가능해지도록 정의를 하거나, 기존의 정의를 수정하거나 변형하기도 한다. 다시 말해, "어떤 개념을 왜 이와 같은 식으로 정의하였는가?"라는 물음에 대해 '좀더 판별을 용이하고 효과적으로 하기 위해서'라는 식의 답변이 있을 수 있는 것이다. 대표적인 예로는 Lakatos의 '괴물 제거법'을 들 수 있다. (Lakatos, 1976, pp. 66-86).

한편, 수학적 정의 기능의 하나로서의 판별과, 개념 학습을 위한 판별은 구별할 필요가 있다. 후자에서는 먼저 학습자가 변별 능력을 지니고 있는가를 점검하고, 예와 예 아닌 것을 제시하여 개념을 학습시킨 후에, 전혀 사용되지 않았던 새로운 예를 분류하도록 요구한다. 즉, 새로운 예를 판별하도록 하는 것이다. 제대로 판별한다면, 학습자는 새로운 개념을 학습한 것으로 간주된다. 이는 수학적 정의 기능으로서 판별하는 것과는 다른 차원이다. 수학적 정의 기능의 하나로서의 판별과, 개념 학습을 위한 판별을 구분하는 기준으로, 직관과 형식적 정의 사이의 갈등이나 장애의 유무를 들 수 있다. 전자에서는 그러한 갈등이나 장애를 극복하거나 조종하는 데 엄밀한 정의를 사용하는 방법을 가르치고자 하는 것이다. 후자에서는 그러한 갈등이나 장애를 극복하거나 조종하는 것은 부차적인 관심사이다.

(4) 분석 기능

우리는 동그란 모양을 지닌 여러 가지 구체물을 통하여 원을 인식할 수 있다. 이 원은 ○ 모양으로, 사물의 전체로서의 외관이 인식된 것이다. 여기에서 한 걸음 더 나아가 '전체로서의 외관'을 이루고 있는 구성 요소들을 알아내고자 한다. 이를 두고 '전체로서의 외관'을 '분

석'한다고 말한다. 동그란 모양으로서의 원을 분석하여 "한 점에서 일정한 거리에 있는 점으로 이루어진 도형"이라는 새로운 정의를 얻는다.

Leibniz에 따르면, 분석 과정은 '선명한 아이디어'로부터 '판명한 아이디어'로 이행하는 것이다. 이러한 이행으로 인하여, 이전의 단계에서 갖지 못하였던 중요한 통찰을 갖게 된다. '동그란 모양'이기만 하던 원을, 이러한 분석을 통하여 '한 점으로 일정한 거리에 있는 점들로 이루어진 도형'으로 보게 되는 것은 중요한 변화인 것이다. Whitehead와 Russell 역시 분석의 중요성을 기수와 서수를 예로 들어 다음과 같이 설명한 바 있다. "피정의항이 기수나 서수와 같이 이미 친숙한 어떤 것일 때, 이 정의는 일상적인 아이디어를 분석하고 있는 것이며 그럼으로써 주목할 만한 진보를 표현하고 있는 것이다"(Robinson, 1954, p.194, 재인용).

어떤 대상을 분석하여 정의하는 것은 결코 수월한 과정이 아니다. 마치 예술가의 작품활동과 같이, 이 과정에는 정형화된 방식이 없다. 분석 내용에 관한 가설을 생각해 내고 이를 검토한다. 이 때, 가설을 생각해 내는 확실한 방법이 있는 것이 아니며, 검토하는 방법에 있어서도 마찬가지이다. 어떤 분석이 매우 옳은 것 같다는 예감을 강하게 갖지만, 최종적으로 그 예감이 틀린 것으로 판명되는 경우도 있다. 사통팔달로 열려 있는 분석의 방향에서 원하는 곳으로 향하는 일은 쉽게 성취될 성격이 아니다.

(5) 개선 기능

정의를 개선한다는 것은, 원래의 정의와 특정 측면에서 관련을 맺고 있으면서 동시에 좀더 나은 정의로 대체하는 것이다. 개선 기능으로서의 정의는 대략 세 가지로 구분할 수 있다. 먼저, 좀더 일반화된 정의를 두고 정의가 개선되었다고 할 수 있다. 정의가 일반화되었다는 것은, 달리 말하면, 이전에 포괄하였던 예는 물론, 새로운 예까지 포괄하는 경우를 가리킨다. 대표적 예로, 함수 정의의 변화를 들 수 있다.

둘째, 원래 모순을 안고 있던 정의가 모순이 없는 정의로 전환되는 것을 두고 정의가 개선되었다고 말할 수 있다. 예컨대, 뺄셈과 방정식 풀이의 일반성을 확보하려는 형식적인 필요에서 출현한 음수는, 기존의 수 개념, 즉 '크기로서의 양' 개념과 모순을 일으켰다. 이러한 모순을 없애기 위해 음수를 새롭게 정의하고자 하는 시도가 지속적으로 진행되었다. 그러다가 19세기 중반에 와서야 음수와 기존의 수 개념 사이의 모순을 없애는 일이 가능해졌는데, 결정적인 계기는 수 개념에 있어 구체적인 관점에서 형식적인 관점으로의 전환이었다. 이 전환으로 인하여 음수를 순전히 형식적인 개념으로 간주할 수 있게 되었다. 이 형식적인 본질에 입각하여, 음수 $-a$를 자연수 a에 대하여 방정식 $x+a=0$의 해로 정의하게 된 것이다 (우정호, 1998, pp. 200-204).

마지막으로, 좀더 훌륭하고 큰 체계에 적합하다면, 그 정의는 개선된 것이다. '극한' 의 정의에서 그 예를 찾아 볼 수 있다. Newton과 Leibniz로 인해 본격적으로 발전한 미적분학은 생산성과 유용성을 가지고 있었지만, 논리적 기초가 확고하지 않아, 그 상태에서는 수학적으로 '깔끔한' 체계를 구성할 수 없었던 것이다. 18세기 경 D'Alembert는 '극한'에 대한 새로운 정의를 제시하면서 이 개념이야말로 미적분학의 기초가 되어야 한다고 주장하였다. 극한에 대한 정의는 Cauchy를 거쳐 Weierstrass에 이르러 미적분학의 기초뿐만이 아니라 해석학의 기초가 될 수 있도록 재정의되었다. 이 기

초 위에서 보다 수학적으로 바람직한 체계가 구성될 수 있게 된 것이다.

(6) 논증 기능

연역적 방법의 모태이자 전형인 수학에서는 공리, 공준, 정의 등 기본전제로부터 일련의 정리들을 연역하여 논리적 체계를 구축한다. 또한 가능한 기본전제의 수를 적게 만들고자 한다. 즉, 적은 수의 무정의 용어로 가능한 많은 용어를 정의하고자 한다.

기본전제를 선택하는 능력을 키우려면 판단력에 대한 상당한 정도의 훈련이 필요하다. 연역적 방법에 필수적인 기본전제 중에 하나인 정의를 선택하는 과정을 Aristotle의 설명을 중심으로 살펴보기로 한다. 그에 따르면, 정의를 얻는 과정을 두 단계로 구분할 수 있다.

단계 [1] : 탐구를 시작하는 사람이 그가 탐구하자고 하는 대상이 존재함을 인식하는 것이다.

단계 [2] : 논리적 설명을 찾고자 하는 단계로, 정의에 현상을 설명하는 원인을 담고자 하는 것이다.

Aristotle는 어떤 대상의 정의에 대해 친숙해진다는 것은 그 대상에 대한 모든 것을 이해할 수 있도록 한다고 하였다. 정의에는 대상이 지닌 속성을 설명할 수 있도록 하는 원인이 담겨져 있기 때문에, 일단 정의를 알게 되면, 정의되는 대상의 모든 속성들을 이해할 수 있게 된다는 것이다.

위와 같은 정의는 결코 쉽게 생각해 낼 수 있는 것은 아니다. 어떤 현상에서 정의될 대상의 존재를 확인하고 단계 [1], [2]를 제기하여 그 대상의 정의를 찾았다고 하자. 이는 어디까지나 임시적인 것이다. 그 대상에는 여러 가지 속성들이 수반되기 마련인데, 위의 두 단계를 통해 얻은 정의가 과연 이러한 속성들을 논증하는데 유용한지를 검토하는 작업이 수행되어야 한다. 만약 미흡하다면, 다시 처음으로 되돌아가게 된다. 이 과정은, 정의와 이에 기초한 성질에 대한 타당한 연역이 등장할 때까지 반복된다. 여기에서 우리는 대상의 속성들에 대한 논증이 정의의 유용성을 검증하는 잣대가 됨을 확인하게 된다.

다음으로, 논증에서 요구하는 정의에 대한 태도에 대해 살펴보기로 하자. 논증은 매우 전문적인 활동이다. 일상적인 활동에서는 용어를 사용할 때 그 정의에 특별히 관심을 기울이지 않으며, 정의라는 말 자체도 드물게 사용된다. 반면에, 전문적인 활동에서는 용어의 정의가 그 활동의 방향이나 깊이에 영향을 미친다. 따라서, 그러한 활동에서는 정의에 특별한 주의를 기울여야 한다. 논증에서 정의를 대하는 태도는, Pascal(1974)의 다음과 같은 말에 압축적으로 표현되어 있다. "논증할 때에는 언제나 머릿속으로 피정의항에 정의항을 대치시켜 생각해야 한다." 이를 수학적으로 세련되게 표현하면, "피정의항과 정의항은 필요 충분 조건"임을 인식하는 것이다. 사실 우리는 각각의 용어에 대해 개인 나름의 의미, 표상, 이미지, 관념 등을 부착시키고 있다. 이는 자연스럽게 형성된 것이기도 하고 인위적으로 부과된 것이기도 하다. 어떻든지 간에, 정의는 용어의 의미를 한정하며, 특히 증명에서 정의는 용어의 의미를 특정한 방향으로 고정시키며 이 의미만을 사용할 것을 강요한다.

증명에서 그 의미가 알려진 용어들만을 사용해야 하는 이유는, '정당화'라는 증명의 본질에 기인한다. 증명에서는 증명하는 당사자나 다른 사람들에게 이미 확실한 것으로 증명된 것에 기초하여 또다른 진리를 구축하는 것이다. 용어에 있어서도, 이미 그 의미가 알려진 용어,

즉 증명하는 당사자나 다른 사람들이 이미 받아들인 용어만을 사용하여 새로운 용어를 정의한다. 따라서, 이러한 용어의 정의를 암기한다는 것은, 인정되고 있는 기존의 의미들이 무엇인지를 애써 기억하고 이에 근거하여 용어를 사용하는, 지적 신중함의 표현이다. 정의에 대한 이러한 태도는 결코 쉽게 길러지는 것은 아니다. Pascal에 따르면, 정의에 대한 암기의 필요성, 또는 지적 신중함의 필요성을 깨닫기가 쉽지 않다. 이는 Vinner의 연구가 간접적으로 (Vinner의 연구는 증명과 관련이 없다) 보여 주고 있다(Vinner, 1991, pp. 65-81).

2. 학교수학에 제시된 정의 특성 분석

1) 분석 대상

제 6차 교육과정에 기초한 초·중·고 수학 교과서와 교사용 지도서를 대상으로 분석하였다. 초등학교 수학의 경우, 수학 1~6과 교사용 지도서를, 중학교 수학의 경우 '두산 동아'에서 발간한 '중학교 수학 1~3'과 '교사용 지도서'를, 고등학교 수학의 경우 '중앙교육(주)'에서 발간한 '공통수학' 교과서를 대상으로 하였다.

2) 학교수학에 제시된 정의 방법

학교수학에 제시된 1200여 개의 정의를 내포적, 외연적, 동의적 방법으로 분류하고, 다시 각 방법 내에서 하위 유형 별로 분류하여, 각 하위 유형 별로 정의 방법의 특징과 대표적인 사례를 추출해 보았다. 이하에서는 이렇게 추출한 내용을 바탕으로 학교수학에 제시된 정의의 두드러진 특징을 분류하여 진술해 보고자 한다.

(1) 전반적 특징

학교수학에 제시되는 용어 중에는 반복하여 등장하는 것이 있다. 학년을 달리 하여 반복하여 등장하는 용어들로부터 추출해 낸 특징을 '특성 II'이라고 명명하고자 한다. 그리고, 이러한 특징 이외의 것을 '특성 I'라고 명명하고자 한다.[1)]

가. 특성 I

① 외연적 정의 방법을 사용한다.

② 동의적 정의 방법을 사용한다.

③ 정의항의 줄임말이 용어가 될 수 있도록 정의항을 선택한다.

④ 용어가 지시하는 대상을 좀더 확실하게 지적하기 위해 보충어를 사용한다.

⑤ 비수학적 언어와 수학적 언어, 또는 수학적 언어와 좀더 세련된 수학적 언어가 동시에 정의항에 사용된다.

⑥ 류(類)를 적시(摘示)하지 않는 경우가 있다.

⑦ 종차(種差)를 생략하는 경우가 있다.

⑧ 필요충분조건이 아닌 내포를 사용하는 경우가 있다.

나. 특성 II

① 상위 단계에서 사용한 용어를 하위 단계에서 사용할 때, 그 용어를 풀어서 제시한다.

② 점차로 류에 유의하여 정의한다.

③ 점차 엄밀해지는 방향으로 정의한다.

④ 관점을 변화시켜 정의한다.

3) 학교 수학의 정의 기능 분석

(1) 전반적 특징

이론적 고찰에서 우리는 정의 기능을 약정

1) 구체적인 사례는 지면 사정으로 생략하였다.

판별, 분석, 개선, 논증으로 구분하였다. 이하에서는 학교수학에서 각 기능이 등장하는 양태를 상세히 분석하고자 한다.

가. 약정 기능

교사용 지도서를 참조하여 교과서에 제시된 정의 문장을 약정 기능 지도로 활용하고 있는 사례를 추출하여 유형별로 정리하였다. 특별히, 이름이나 기호 붙이기에 해당하는 사례들이 중심이 된다.

이름이나 기호 붙이기에 해당하는 약정에서는, 학생들이 주어진 대상에 대해서 기존에 사용하는 이름이나 기호를 생각해 낼 수 있는가 하는 점이 중요해진다. 모르긴해도, '힘이 있는 용어'인 경우에, 학생들이 생각해낸 용어가, 기존의 용어와 일치할 가능성이 높아질 것이다. 예컨대, 교사용지도서에 따르면, 네모 모양, 세모 모양, 동그라미 모양 등 여러 가지 평면도형을 일상 생활 용어로 표현하게 하는 활동이 중심이 된 수업이 제시되어 있다. 이 경우, 일상 생활 용어는 학습자가 부지불식간에 획득한 것이므로, 수업에서 주어진 대상에 대해 그 이름을 떠올릴 수 있을 것으로 기대할 만하다.

이와 달리, 교사용 지도서를 검토해 본 결과, 용어와 대상 사이에 관념의 유사성이 없어 대상으로부터 학생들이 용어를 찾아내기 힘든 정의를 대상으로, 정의의 약정 기능을 지도하는 사례도 있다. 초등학교 교사용 지도서에 따르면, "위에서 평행사변형 ㄱㄴㄷㄹ의 본을 뜬 다음 이것을 180도 회전시키면 원래의 도형과 완전히 겹쳐짐을 알았다. 이와 같이 한 점을 중심으로 180도 돌렸을 때 처음 도형과 완전히 겹쳐지는 도형을 어떤 도형이라고 하는 것이 좋겠는지 생각해 보게 한다"라고 기술되어 있다. '점대칭도형'이라는 용어와 "한 점을 중심으로 180도 돌렸을 때 처음 도형과 완전히 겹쳐지는 도형"이라는 정의항 사이에는 유사한 관념이 없다. 따라서, 후자의 정의항에 해당하는 활동이나 표현으로부터 '점대칭도형'이라는 용어를 생각해 내기는 힘들다. 이러한 점을 감안할 때, 위와 같은 경우 교과서의 정의문장을 곧장 약정의 기능으로 사용하는 데에는 무리가 있다.

교재 분석 결과, 이름이나 기호 붙이기와 관련하여, 좀더 고려되어야 할 점으로는, 학생들에게 수학자들이 만든 용어의 배경을 이해하려고 노력할 기회를 제공하는 것을 들 수 있다. 학교수학에서 제시되는 용어들 중에서 학습자가 만들어낸 용어와 일치할 수 있는 용어는 그리 많지 않다. 따라서, 학생들로 하여금 이름을 만들어 보게 한 후, 수학자들이 정한 이름과 비교하고 그 이름의 배경을 이해하려는 단계를 설정하는 것이 좀더 학생들이 수학적 정의의 기능을 이해하는 데 도움이 될 것이다.

지도서에 제시된, 약정이 필요한 이유로는, 새로 분류된 대상에 이름을 붙여 주는 것, 여러 가지 유사한 모양을 동일한 이름으로 부르는 것이 불편하므로, 이들을 구분하고자 각각의 모양에 기호나 이름을 붙이는 것, 차후의 원활한 의사소통을 위해 이름을 붙이는 것을 들 수 있다. 약정의 유용성과 관련하여 지금까지 논의한 내용은 대체로 이름 붙이기가 발휘하는 유용성에 대한 것이다. 그런데, 수학에서는 어떤 대상을 기호로 간략하게 축약하여 표현함으로써 얻을 수 있는 유용성이 중요하다. 그러한 측면에서의 유용성을 또한 적절히 지도할 필요가 있다.

나. 판별 기능

학교수학에서는 개념 학습이 매우 중요한 위치를 점하고, 개념 학습 여부를 판단하는 데 판별하는 활동을 사용하는 경향이 있다. 이러

한 개념 학습과 관련하여 이루어지는 판별 활동은 수학적 정의의 기능으로서의 판별과 다르므로 두 가지 판별을 구분할 필요가 있다. 이하에서는 특별히 수학적 정의 기능으로 지도되는 판별에 해당하는 사례를 제시하고자 한다.

정의와 이미지 사이에 갈등이 존재하는 상황에서 정의에 근거하여 판별하고자 할 때 수학적으로 의미 있는 판별이 이루어진다고 볼 수 있다. 그러한 상황으로, "직사각형, 정사각형도 사다리꼴이 되는가?"라는 질문이 제기되는 상황을 들 수 있다. "사다리꼴은 한 쌍의 마주보는 변이 서로 평행인 사각형"으로 정의되지만, 사다리꼴은 라는 이미지를 갖고 있다. 어린 학습자들은 한 대상에는 한 가지 이름만이 있다고 생각하기 마련이다. 이러한 상황에서 위의 질문은 직사각형과 정사각형이라는 이름을 이미 가지고 있는 도형에 사다리꼴이라는 이름을 붙일 수 있는가를 알아보도록 하는 것이다. 이 때, 여전히 직사각형과 정사각형의 '이미지'에 고착되어 있고 한 대상에는 한 가지 이름만이 가능하다는 생각을 한다면, 이들을 사다리꼴로 보는 데 어려움이 있을 것이다. 이전에 배운 도형을, 사다리꼴의 '정의'에 비추어 볼 때 사다리꼴이 됨을 이해할 수 있게 된다면, 이 학습자는 동일한 대상이 관점에 따라 여러 가지 이름을 가질 수 있다는 것을 알게 되는 것이다.

다. 분석 기능

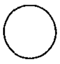
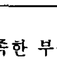
정의 기능 중에서 교과서에 명시적으로 드러나지 않은 기능 가운데 한 가지가 분석 기능이다. 분석은 '일반적 형식' 또는 '선명한 아이디어'의 존재를 전제로 하는 정의 기능이다. 이를 두 가지로 크게 구별할 수 있다. 일상에서 획득한 '일반적 형식'을 해당 시간에 분석하는 경우와, 선행 수업에서 일반적 형식이 가르쳐진 경우가 그것이다.

① 일상에서 획득한 '일반적 형식'을 분석하는 경우

우리는 일상에서 빠르다, 느리다, 진하다, 묽다, 경사가 급하다, 경사가 완만하다, 일어날 가능성이 높다, 낮다 등의 관념을 사용한다. 이러한 일상적 관념을 사용할 때 사람마다 기준이 다르다. 그런데, 용어를 일관성이 있게 사용하여 사태를 과학적으로 다룰 수 있도록 하기 위하여, 이러한 관념을 각각 '속력', '농도', '기울기', '확률'로 재 정의한다. 이 때, 일상적 관념을 분석한 내용을 정의항에 담게 된다.

② 선행 수업에서 가르친 일반적 형식을 분석하는 경우

우리는 선행 수업에서 정의된 용어를 얼마간의 시간이 흐른 후에 다른 관점에서 정의한 경우들을 볼 수 있다. 이 때, 나중에 정의에 사용되는 관점은 이전에 정의에 사용된 '일반적 형식'을 분석한 것으로 볼 수 있다. 다음은 그러한 사례들에 해당한다.

용 어	일반적 형식		분석된 내용	
구	초1	 공 모양	초6	반원을 그의 지름을 회전축으로 하여 1 회전 한 회전체
원	초1	 동그란 모양	중1	한 점에서 일정한 거리에 있는 점들로 이루어진 도형
각	초3	뾰족한 부분	초3	한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형
평면과 평면의 수직	초4	직각으로 만나는 두 면 :	중1	평면 P가 평면 Q에 수직인 직선을 포함하는 경우
두 집합이 서로 같다	중1	A의 원소와 B의 원소가 같을 때	고1	A⊂B이고, B⊂A일 때

라. 논증 기능

중학교 수학 2의 도형 영역에서 논증 기하를 지도할 때 처음으로 교과서에 정의라는 용어가 등장한다. 대체로, 교과서에서는 용어의 뜻을 명확하게 정한 문장을 그 용어의 정의라고 규정하고 있다(김호우, 1996, p. 195; 김연식, 1996a, p. 198). 교육과정 해설서에는 다음과 같은 내용이 기술되어 있다. "수학적 추론의 의의와 방법을 이해시키기 위하여 먼저 명제와 역, 참, 거짓, 가정, 결론, 용어의 정의, 정리와 증명 등의 뜻을 이해하게 한다"(교육부, 1994b, p. 144). 그런데, 정의를 '용어의 뜻을 명확하게 정한 문장'으로 정의를 규정하는 것이 과연 수학적 추론의 의의와 방법을 이해시키는 데 도움이 되는지에 대해서는 재고의 여지가 있다.

국어사전에서는 정의를 "어떤 말이나 사물의 뜻을 명백히 밝혀 규정함. 또는 그 뜻. 뜻매김 (민중서림 편집국, 2001, p. 2045)"으로 정의하고 있다. 교과서에 제시된 정의는 국어 사전의 정의와 가깝다. 그런데, 사전에서는 어떤 용어를 정의할 때 그 용어가 현재 통용되는 의미, 특히 일상에서 통용되는 의미에 관심을 두고 있다. 따라서, 정의에 대한 이와 같은 사전의 정의가 수학적 추론의 의의와 방법을 설명하는 데 충분하다고 볼 수는 없다. 수학자는 정의를 "용어의 뜻을 명확하게 정한 문장" 이상으로 파악한다. 수학자에게 수학적 정의는 '수학적' 의미를 창조해 내는 것이다. Freudenthal(1973)에 따르면, 수학적 추론, 특히 논증의 의의와 방법을 이해하도록 정의의 의미를 이해시키는 데는, 정의에 대한 정의로는 부족하며, 학습자가 스스로 정의를 만들어 보는 경험을 제공할 필요가 있다. 그러한 경험을 통하여, 정의는 용어의 뜻을 설명하기 위해 필요한 것이 아니라, 연역 사슬에서 연결 고리에 해당한다는 것을 알 수 있도록 지도할 필요가 있다.

논증기하에서 요구되는 정의에 대한 태도는 논증기하를 배우기 이전과는 판이하다. 논증기하 이전에 나온 약정, 판별, 분석 기능을 가진 정의에서는 정의항에 주목하는 것이 요구되지만, 반드시 정의항에 주목해야 할 필요는 없다. 반면에 논증기하에서는 피정의항과 정의항을 필요에 따라 자유자재로 대치시킬 수 있는 능력이 요구되며, 논증기하를 통하여 학생들은 정의의 이러한 기능을 배우게 되는 것이다. 은연중에 정의 문장이 부각되어 학생들이 무의식적으로 정의문장을 기억하는 것—이는 직관기하에서 볼 수 있는 수준이라고 여겨진다—과, 지적 필요성에 의해 의식적으로 정의문장을 기억해야 할 대상으로 여기는 것에는 수준의 차이가 있다. 논증에서 요구하는 정의에 대한 태도는 후자에 해당한다. 예컨대, "평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다", "두 쌍의 대변의 길이가 각각 같은 사각형은 평행사변형이다"라는 두 명제를 증명하기 위한 중요한 출발점은, 평행사변형의 정의인 "두 쌍의 대변이 평행하다" 또는 "$\overline{AB} // \overline{DC}$, $\overline{AD} // \overline{BC}$"라는 사실을 기억해 내는 것이다.

평면도형은 이분법적 관점과 논리적 관점, 두 가지로 정의 가능하다. 현행 교과서에서는 논리적 관점에서 평면도형을 정의한다. 그런데, 이분법적 관점에서의 정의 역시 타당성을 가지고 있다. 그럼에도 불구하고 평면도형을 논리적 관점에서 정의하는 것은 논증에서의 필요성 때문이다.

논리적 관점에서 마름모는 평행사변형에 포함되기 때문에, 예컨대, "마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다"와 같은 성질을 증명할 때, "마름모에서 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다"는 명제를 별도로 증명할 필요가 없다. 한 대상이 어떤 범주에 속하는지를 정의를 통하여 알 수 있다면, 그 대상의 성질을 알기 위하여 그 대상 자체를 보지

않고 그 대상이 속한 범주를 살핀다. 만약 그 범주가 이미 잘 알려져 있다면, 우리는 별도의 수고 없이 그 대상에 대해 많은 것을 알게 된다. 정의의 이러한 쓰임새를 고려한다면, 우리에게 효율성을 안겨주는 논리적 정의 방식이 좋은 것이다. 대부분의 교재나 교사는 이러한 사실에 대한 언급 없이 논리적 관점을 취한 정의를 학생들에게 지도하고 있으며, 따라서 정의에 대해 기능적 이해를 할 수 있는 기회를 놓치고 있다(Villiesrs, 1994, p. 17).

(2) 개선 기능

현재의 정의에 만족하지 않고 좀더 나은 정의를 강구하는 것을 정의의 개선 기능이라고 하였다. 이하에서는 이러한 사례로 볼 수 있는 지수법칙에 대해서 살펴보기로 한다.

고등학교 공통수학에서 지수가 0일 때와 음의 정수일 때의 정의가 유도되는 과정을 요약하면 다음과 같다. 자연수 지수에서 거듭제곱은 반복된 곱셈이다. 지수 법칙을 유지하면서 지수를 확장하는 과정에서 다음과 같은 새로운 정의가 등장한다.

$$a^0 = 1,\quad a^{-1} = \frac{1}{a^n}$$

반복된 곱셈으로서의 거듭제곱의 정의는, 자연수 지수에서 성립하던 지수 법칙이 정수 지수에서도 성립하도록 유도하는 과정에서 사라진다. 비슷한 방식으로, 유리수 지수까지 확장하는 과정에서도, 지수법칙이 성립하도록 확장이 진행된다.

$$a^0 = 1,\quad a^{-1} = \frac{1}{a^n},\quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

등의 정의를 이해한다는 것은, 자연수 지수에서 성립한 지수법칙이 보다 넓은 영역에서 성립하도록 확장하는 과정에서 창안된 정의임을 아는 것이라고 말할 수 있을 것이다. 이와 같이 정의를 확장하는 데 사용된 아이디어가 형식불역의 원리이다. 이는 간단히 말해, 더 넓은 영역에서 형식이 성립할 수 있도록 기존의 정의를 개선시키는 것이다. 여기서 '형식'은 이를테면 위의 경우 지수 법칙이나 자연수에서 성립하던 계산법칙 등을 가리킨다. 이는 정의 기능 중에서 개선 기능으로 간주할 수 있다. 지수와 관련된 여러 정의들을 지도하는 과정에서 이러한 정의 기능을 지도할 수 있도록 세심한 배려가 필요하다.

3. 학교수학에서의 정의 수준 탐색

2절에서 우리는 학교수학에서 제시된 정의의 특징을 살펴보았다. 이 장에서는 이러한 분석 결과 및 van Hieles의 기하학습 수준이론과 Freudenthal의 수학적 언어 수준[2)]에 대한 논의를 바탕으로 하여, 기하 영역을 중심으로 학교수학에 제시된 정의의 수준을 탐색해 보고자 한다.

(1) 0 수준 : 전(前)수학적 수준

이 수준은 용어를 정의하는 데 수학적 성격의 의미보다는 일상적 의미를 대응시키는 단계이다. 일상적 의미를 사용하여 정의한 것으로, 먼저 외형을 지시하는 정의 방법을 들 수 있다. 둘째, 동의어를 사용하는 정의 방법이다. 특히, 기하 영역에서는 용어를 정의하기 위해 동의어를 선택함에 있어, 용어가 가리키는 대

2) Freudenthal의 수학적 언어 수준에 대한 견해는 다음과 같다. 수학적 언어에는 수준이 있어서 그에 따라 수학적 사고가 발달해간다. 첫째는 구체적 언어 수준으로, 일상적 예나, '이것', '저것' 등과 같은 지시적 언어를 사용하는 수준이다. 둘째는 상대적인 관계를 사용하는 언어 수준이다. 셋째는 문자를 사용하는 규약적인 변수 언어 수준이고, 넷째는 변환 등을 사용하여 나타내는 함수적 언어 수준이다(Freudenthal, 1978, pp. 233-242).

상과 유사한 이미지를 연상시키는 용어를 사용하는 경향이 있다. 셋째, 이미지나 행동을 연상하도록 기술하는 방법이다.

(2) 1 수준 : 기술적 수준

이 수준에서는 용어를 정의하는 데 성질이나 관계를 기술하는 성격의 문장을 사용한다. 이 수준은 다시 두 단계로 구분할 수 있다. 먼저, 제 0 수준의 시각적 특성이, 기술된 성질이나 관계와 동시에 사용되어 정의되는 단계로, 이를 '1a 수준'으로 보기로 한다. 다음으로, 순전히 기술된 성질과 관계만으로 정의하는 단계로, 이를 '1b 수준'으로 보기로 한다. 이 때, 1a 수준에 해당하는 정의는 제 0 수준과 1b 수준의 가교 역할을 한다고 볼 수 있다. 분석적인 성질이나 관계를 사용하여 정의를 하는 상황이지만, 순전히 이러한 방식으로만 정의하는 것은 학습자에게 부담이 될 우려가 있으므로, 제 0 수준에 해당하는 의미를 첨가하여 학생들의 부담을 줄이려는 의도가 있다고 볼 수 있다.

1a 수준에 해당하는 정의 방법으로는 다음과 같은 정의를 들 수 있다. 첫째, 분석된 성질과 동의어를 동시에 사용하는 정의 방법이다. 둘째, 분석된 성질을 기술하는 데 일상 용어를 사용하는 정의 방법이다. 셋째, 분석된 성질이나 관계를 대략적으로 기술하는 정의 방법이다. 이 밖에도, 분석된 성질이나 관계를 사용하면서도, 제한 조건이 분명하게 언급되지 않은 경우나 류가 불완전하게 제시된 경우 등도 이 수준에 해당한다. 또한, 예시적 언어를 사용한 정의 역시 이 수준에 해당한다.

(3) 2 수준 : 대상 기호를 사용하는 수준

이 수준에서는 용어를 정의하는 데 본격적으로 대상을 나타내는 문자 기호가 사용되는 단계이다. 이 단계는, 정의항을 기술할 때, 문자 기호가 부분적으로 사용되는가, 또는 전체적으로 사용되는가에 따라 구분할 수 있다. 부분적으로 문자가 사용되는 경우, 곧 정의항을 기술할 때, 문자 기호를 사용할 수 있는 부분에서 문자 기호를 생략하는 단계를 2a 수준으로 보기로 한다. 다음으로, 문자 기호가 전체적으로 사용되고 있는 경우로, 문자 기호가 사용될 만한 자리에는 모두 문자 기호가 사용되고 있는 단계를 2b 수준으로 보기로 한다.

(4) 3 수준 : 관계 기호를 사용하는 수준

이 수준에서는 정의항에 기호화한 관계적 표현이 사용된다. 예를 들어, "선분 AM과 선분 MB의 길이가 같다"라는 표현 대신에

$$\overline{AM} = \overline{MB}$$

라는 기호화된 표현을 사용하는 것이다. 이 수준도 두 가지로 구분할 수 있다. 먼저, 3a 수준에서는, 2 수준에 해당하는 표현과 관계 기호 표현이 함께 사용되고 있다. 이에 대하여 2 수준에 해당하는 표현 없이 곧장 관계 기호 표현

'$AP : PB = m : n \, (m>0,\ n>0)$'

이 사용되는 것을 3b 수준이라고 한다. 특별히, 3a 수준은 2수준에서 3b 수준으로 넘어가는 그 중간단계의 정의로 볼 수 있다. 즉, 완전히 관계 기호 표현을 사용하기 위한 가교 역할을 하는 단계로 볼 수 있는 것이다.

(5) 4 수준 : 함수적 언어를 사용하는 수준

함수적 언어를 사용하여 정의한다. 함수적 언어는 Freudenthal이 수학의 언어 중에서 가장 높은 언어로 상정한 것이기도 하다.

4. 정의 지도에 관한 제언

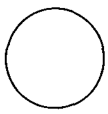
이 장에서는 정의 방법과 정의 기능을 관련시켜 정의 지도에 관한 시사점을 논의하고자

한다. 정의 기능이 정의에 요구되는 역할이라고 한다면, 그러한 역할을 수행하기에 적절한 정의 방법이 있을 것이다. 또한, 특정 정의 방법으로는 수행할 수 없는 정의 기능 역시 존재할 수 있다. 정의 방법과 정의 기능은 밀접한 관련을 가진다.

1) 정의 수준과 정의 기능

정의 방법, 또는 정의 수준이 달라지면 정의 기능이 달라진다는 점을 원 개념을 통하여 보이고자 한다. 다음에서 보듯이, 원은 초등학교와 중학교에서 상이한 방법으로 정의된다.

[1] 초등학교 2-1
오른쪽 그림과 같이 본을 뜬
동그란 모양을 원이라고 합니다.



[2] 중학교 1
평면 위에서 한 정점 O로부터 같은 거리에 있는 모든 점의 집합을 원이라고 한다.

정의 방법 면에서 볼 때, [1]은 '동그란 모양'이라는 친숙한 용어를 사용한다는 점에서 동의적 방법, ○ 모양을 제시한다는 점에서 외연적 방법에 해당한다. [2]는 원의 구성요소인 중심과 반지름과의 관계를 사용한다는 점에서 내포적 방법에 해당한다. 제3절에서 탐색한 정의 수준에 의하면, [1]은 전수학적 수준인 제 0 수준에 해당하며, [2]는 제 2수준에 해당한다. 이러한 상이한 정의 방법으로 이루어진 원의 정의는 정의 기능 면에서도 상이하다.

[1]의 정의와 관련하여, 교사용 지도서에서는 다음과 같은 기능을 지도하도록 기술하고 있다. 먼저, 약정해 보도록 한다. 네모 모양, 세모 모양, 동그라미 모양의 이름을 정하기 전에 학생들에게 "이 모양에는 어떤 이름을 지어줄까?"라고 질문을 하여 학생 나름대로 이름을 부여할 수 있는 기회를 준 다음, 교사가 도형의 이름을 정해주는 과정을 설정하고 있는 것이다. 두 번째, 판별해 보도록 한다. 위의 내용 중에서 '동그라미 모양 알아보기', '원을 찾아보시오'와 같은 질문은 이 기능과 관련이 된다. 그런데, 이 상황에서 판별은, 수학적 정의의 기능으로서의 엄밀한 의미의 판별은 아니다. 동그라미 모양, 또는 동그란 모양으로서의 원에 대한 개념 학습이 제대로 되었는가를 확인하는 차원에서의 판별이라고 보아야 할 것이다.

다음으로, [2]의 정의와 관련하여, 교과서에 기술된 지도 내용을 살펴보면, 그 내용은 대체로, '원과 직선의 관계 탐구', '부채꼴의 호의 길이와 넓이 구하기', '원에서의 중심각과 호, 현 사이의 관계 알기' 등이다. 이러한 지도 내용으로부터 우리는 이 정의가 다음과 같은 기능을 수행함을 알 수 있다. 첫째, 이 정의는 원의 외형을 여러 가지 구성 요소로 분석하고 있다. 이러한 분석을 바탕으로, 일단 정점과 거리가 정해지면 우리는 어떠한 원도 생성시킬 수 있다. 두 번째, 이 정의에 사용되는 성질은 원이 지닌 여러 가지 다른 성질들을 연역해 내는 논리적 원인이다. 예컨대, 원의 넓이는 πr^2, 원주는 $2\pi r$이라는 원의 성질은 이와 같은 원의 정의로부터 유도된다. 이는 Aristotle이 언급한 논리적 원인으로서의 본질에 해당한다고 볼 수 있다. 세 번째, 다른 대상과의 관계를 탐구하는 일이 가능해진다. 이를테면, 원과 직선, 두 원의 위치관계 등에 대한 탐구가 가능해진다. 요컨대, 원의 정의 [2]는 분석 기능과 논증 기능을 가능하게 함을 알 수 있다.

이러한 정의 기능 면에서의 차이를 고려할 때, 원의 정의 [1]과 [2]는, 정의 방법 상 차이뿐만이 아니라, 지식의 깊이 면에서도 차이를 갖는다고 할 수 있을 것이다. 정의 방법과 정의 기능은 상호 의존적인 성격을 지니고 있다.

이를테면, 논증 기능을 수행하는 데, 동의적 방법이나 외연적 방법으로 이루어진 정의를 사용할 수는 없다. 반대로, 어린 아동에게 원의 뜻을 설명하고자 할 때, "한 점에서 일정한 거리에 있는 점들로 이루어진 도형"이라는 분석된 성질은 지나친 것이다. 분석된 내용으로 이루어진 내포적 방법은, 동의적 방법이나 외연적 방법 보다 정의 방법 면에서 수준이 높다. 이러한 정의 방법 면에서 보여지는 수준의 높낮이는 정의 기능에서의 수준의 차이와 어느 정도 연결된다. 동의적 방법이나 외연적 방법으로 이루어진 정의를 사용하여 원에 대한 뜻풀이나 간단한 판별 정도를 행하는데 반해, 분석된 내용으로 이루어진 내포적 방법을 사용해서는 논증 기능이라는 고차원적인 수학적 활동이 가능해진다.

2) 정의 기능에 따른 수업의 차이

정의 방법에서 어떤 정의 기능을 읽어 내는가에 따라 수업 내용이 달라진다는 점을 마름모의 정의를 통하여 보이고자 한다. 즉, '네 변의 길이가 같은 사각형'이라는 마름모의 정의가 약정과 연역적 조직화, 곧 논증이라는 상이한 정의 기능을 지도하는 데 사용할 수 있다는 점을 보이고자 한다.

(1) 약정

초등학교 수학의 평면도형의 지도 과정에서 우리는 몇 가지 공통점을 발견할 수 있다. 먼저, 이론적 관점이 근저에 흐르고 있다. 지각적 특성에 근거할 경우 정삼각형은 이등변삼각형이라고 보기 힘들다. 정삼각형을 이등변삼각형으로 포함시키는 것은, 구조적 기준(Fischbein, 1995, p. 244)에 근거하고 있기 때문에 이론적 관점이다. 마찬가지로, 정사각형을 직사각형에, 마름모를 평행사변형에, 평행사변형을 사다리꼴에 포함시키는 분류는 이론적 관점에서 이루어진 것이다. 한편, 이를테면, 정삼각형을 지도할 때 주어지는 도형은 모두 이등변삼각형으로, 이등변삼각형 내에서 정삼각형을 찾아내도록 유도하고 있다. 마찬가지로, 마름모는 평행사변형 중에서, 평행사변형은 사다리꼴 중에서 찾아내도록 한다. 이와 같은 내용 전개 과정에는 이론적 관점이 암묵적으로 반영되어 있다고 볼 수 있다.

두 번째 특징은, A를 B라고 정의할 때 A에 사용되는 정의의 성질이 분류 활동을 위해 미리 주어진다. '네 변의 길이가 같은 사각형'이라는 성질을 학생들로 하여금 찾아내도록 하기보다는, 그 성질이 처음에 제시되어 학생들로 하여금 그러한 특성을 지닌 사각형을 찾아보도록 하고 있다.

세 번째 특징은, 지도서에 따르면 교과서에 진술된 내용은 약정 기능으로 지도된다는 점이다. 예컨대, "이제까지는 사각형을 변의 평행이라는 관점에서 분류를 하여 이름을 붙였다. 여기에서는 변의 길이에 착안하여 다른 조건은 무시하고 네 변의 길이가 같은 사각형을 찾아 이름을 붙여보도록 한다"와 같은 진술문에서 그러한 점을 포착할 수 있다. 지도서의 내용대로라면, 먼저 분류를 하고, 분류된 도형에 이름을 붙이는 활동, 즉 약정 기능을 중심으로 수업은 진행된다. 초등학교 수학에서는 이론적 관점에서 도형의 정의항에 사용될 속성을 미리 제시해주고 이러한 속성에 따라 분류를 한 다음, 그렇게 분류된 도형에 이름을 붙여보는 약정 활동을 중심으로 하여 평면도형을 지도하고 있다고 볼 수 있다.

(2) 연역적 조직화

먼저, 다음의 순서를 지닌 지도안을 살펴보

자(유병립, 77, pp. 73-80).

① 마름모에 해당하는 도형들을 보여주고 이 도형의 이름이 마름모임을 알려준다.
② 마름모의 속성을 조사하도록 한다. 이때에는 관찰, 실측, 실험 등으로 조사가 가능할 것이다.
③ 발견한 속성들 간의 의존관계를 조사하도록 한다. 속성의 의존관계라 함은 속성들이 서로 독립적으로 존재하는가 또는 종속적으로 존재하는가를 밝혀보는 것이다.
④ 이와 같이 해서 의존관계가 이해되면, 마름모를 '네 변의 길이가 같은 사각형'으로 정의한다.

이 지도 과정을 간단히 요약하면 다음과 같다. 마름모라는 용어가 도형과 함께 미리 제시되고, 관찰, 조작 등을 통하여 여러 가지 마름모의 성질들을 찾아 낸 다음, 이러한 성질들을 연역해 낼 수 있는 특정 성질을 찾아내는 것이다. 이는 Freudenthal이 제시한 연역적 조직화로서의 정의 기능 지도에 대응한다. 이러한 지도 내용을 통하여 우리는 마름모라는 용어의 정의에 대해 '네 변의 길이가 같다'라는 성질이 우연적으로 결정된 것도 아니라는 점을 지도할 수 있다. 또한 수학에서 정의는 단순히 그 용어의 뜻을 알려주기 위함이 아니라, 연역적 조직화의 출발점이라는 사실을 지도할 수 있다.

III. 맺 음 말

본 논문에서는 다음과 같은 연구 문제를 다루었다. 첫째, 교수학적 의도에 따른 변형의 결과로 학교수학에 제시되는 정의의 제 특징을 분석하였다. 둘째, 이러한 제 특징을 바탕으로 하여 학교수학에 제시되는 정의의 수준을 탐색하였다. 셋째, 학교수학에서 수학적 정의 기능을 지도하는 사례 또는 그러한 지도가 가능한 사례를 중점적으로 살펴보았다. 넷째, 그러한 사례 분석을 통하여 학교수학에서 정의에 대한 기능적 이해가 이루어지는 양태를 살펴보며, 또한 기능적 이해를 도모하기 위해서는 어떤 점이 고려되어야 하는지를 알아보았다. 다섯째, 정의 방법과 정의 기능을 종합하여 학교수학에서 고려해야 할 정의 지도에 대한 시사점을 찾아보았다.

다음으로, 본 논문의 제한점 및 향후 정의에 관한 연구를 위한 제언을 하고자 한다. 본 논문에서는 교수학적 의도에 따라 변형된 정의 방법의 특징을 바탕으로 기하 영역을 중심으로 하여 학교수학에 제시된 정의의 수준을 제시하였다. 학문을 목적으로 하는 수학에서의 정의와, 학습자로 하여금 수학을 이해시키는 것을 목적으로 하는 학교수학에서의 정의는, 목적이 상이한 만큼, 그 목적을 달성하기 위해 선택하는 정의 역시 상이할 수밖에 없다. 본 논문은 학교수학의 독특한 정의의 특징을 밝히고자 한 작은 시도에 불과하다. 이 연구는 정의의 측면에서 학교수학의 정체성을 밝히는 작업의 가능성을 보여준 것이라고 볼 수 있다. 앞으로 이러한 방향에서 보다 심도 있는 연구가 필요하다. 또한 정의의 수준을 탐색하는 작업을 본 논문에서는 기하 영역에 한정하였지만 대수, 해석 등 다른 내용 영역에서도 시도해 볼 수 있을 것으로 생각된다.

정의 기능과 관련하여 학교수학에서 추출한 사례는 수학적 정의의 기능을 지도할 수 있는 소재라고 볼 수 있다. 이 중에는 학교수학에서 수용하기에 적절한 소재와 그렇지 못한 것이 있을 수 있으므로, 이를 구분할 필요가 있으며, 또한 적절한 소재에 한해서는 구체적인 지도 방안을 모색할 필요가 있다. 특히, 후자와 관련해서는, 교과서나 교육과정 해설서, 또는 교사용 지도서에서는 정의를 언급할 때 정의 문장

에 대한 소개 정도의 수준에서 그치는 것이 아니라, 그 정의의 배경, 맥락 등 정의 기능에 대한 언급을 강화할 필요가 있다. 또한, 교사는 교과서에 제시된 정의에 대해 그 정의 기능을 이해하고자 노력할 필요가 있으며, 정의 방법과 정의 기능 사이의 미묘한 관계를 교수—학습 상황에서 올바르게 구현할 수 있도록 노력해야 할 것이다.

참고문헌

교육부 (1994a). 초등학교 교육과정 해설 (수학). 대한교과서 주식회사.

______(1994b). 중학교 교육과정 해설 (수학). 대한교과서 주식회사.

______(1994c). 고등학교 교육과정 해설 (수학). 대한교과서 주식회사.

______(1995a). 수학 1-1. 대한교과서 주식회사.

______(1995b). 수학 1-2. 대한교과서 주식회사.

______(1995c). 수학 2-1. 대한교과서 주식회사.

______(1995d). 수학 2-2. 대한교과서 주식회사.

______(1995e). 수학 1-1 교사용 지도서. 대한교과서 주식회사.

______(1995f). 수학 1-2 교사용 지도서. 대한교과서 주식회사.

______(1995g). 수학 2-1 교사용 지도서. 대한교과서 주식회사.

______(1995h). 수학 2-2 교사용 지도서. 대한교과서 주식회사.

______(1996a). 수학 3-1. 대한교과서 주식회사.

______(1996b). 수학 3-2. 대한교과서 주식회사.

______(1996c). 수학 4-1. 대한교과서 주식회사.

______(1996d). 수학 4-2. 대한교과서 주식회사.

______(1996e). 수학 3-1 교사용 지도서. 대한교과서 주식회사.

______(1996f). 수학 3-2 교사용 지도서. 대한교과서 주식회사.

______(1996g). 수학 4-1 교사용 지도서. 대한교과서 주식회사.

______(1996h). 수학 4-2 교사용 지도서. 대한교과서 주식회사.

______(1997a). 수학 5-1. 대한교과서 주식회사.

______(1997b). 수학 5-2. 대한교과서 주식회사.

______(1997c). 수학 6-1. 대한교과서 주식회사.

______(1997d). 수학 6-2. 대한교과서 주식회사.

______(1997e). 수학 5-1 교사용 지도서. 대한교과서 주식회사.

______(1997f). 수학 5-2 교사용 지도서. 대한교과서 주식회사.

______(1997g). 수학 6-1 교사용 지도서. 대한교과서 주식회사.

______(1997h). 수학 6-2 교사용 지도서. 대한교과서 주식회사.

김명렬, 김창동, 박수화 (1997). 고등학교 공통수학. (주)중앙교육진흥연구소.

김연식, 박교식 (1994). 우리 나라의 학교 수학 용어의 재검토. 대한수학교육학회논문집, 4 (2), 1-9.

김연식, 김홍기 (1995a). 중학교 수학 1. 동아출판사.

______(1995b). 중학교 수학 1 교사용 지도서. 동아출판사.

______(1996a). 중학교 수학 2. 동아출판사.

______(1996b). 중학교 수학 2 교사용 지도서. 동아출판사.

______(1997a). 중학교 수학 3. 동아출판사.

______(1997b). 중학교 수학 3 교사용 지도서. 동아출판사.

나귀수 (1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석 - 중학교 기하 단원을 중심으로-. 서울대학교 박사학위 논문.

박경미, 임재훈 (1998). 학교 수학 기하 용어의 의미론적 탐색 - 기하 용어의 역사적 변천 및 국제 비교를 중심으로- 대한수학교육학회논문집, 8(1), 199-216.

박교식 (1997). 우리 나라 학교수학의 세 가지 서로 다른 판(Version)에 관한 연구. 대한수학교육학회논문집, 7(2), 91-102.

박선화 (1998). 수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구. 서울대학교 박사학위 논문.

박종홍 (1983). 일반논리학. 서울: 박영사.

서동엽 (1999). 증명의 구성 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색 -중학교 수학을 중심으로-. 서울대학교 박사학위 논문.

우정호 (1986). 어떻게 문제를 풀 것인가. 서울: 천재교육.

______(2000). 수학학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교 출판부.

유병림 (1977). 도형의 개념 형성을 위한 정의와 성질의 지도에 관한 연구. 과학과 수학교육 논문집, 3, 73-80.

이승우 (2001). 학교수학에서의 유추와 은유. 서울대학교 석사학위 논문.

이용률 외 (1997). 초등수학교육론. 경문사.

이항 (1974). Pascal 小品集. 서울: 정음사.

이홍우 (1990). 교육의 개념. 서울: 문음사.

장상호 (1997). 학문과 교육 상. 교육과학사

정영옥 (1997). Freudenthal의 수학화 학습지도론 연구. 서울대학교 박사학위논문.

Borasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. Portsmouth: Heinemann.

Borsodi, R. (1966). *Definition of definition*. Boston: Porter Sargent Publisher.

Bridgman, P. W. (1927). *The logic of modern physics*. New York: The Macmillan Company.

Bayer, G. D. (1995). *Definition in Aristotle*. Doctoral Dissertation. University of Texas at Austin.

Black, M. (1952). *Critical thinking*. Englewood : Prentice-Hall,

Copi, I. M. (1963). *Introduction to logic*. 민찬홍 (역) (1988). 논리학 입문. 서울: 이론과 실천.

Dewey, J. (1933). *How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process*. Boston: D. C. Heath and Company.

Elizabeth, G. R. (1984). *The usage of definition and explanation in secondary school mathematics*. Doctoral Dissertation, Temple University.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Gagne, R. M. (1985). *The conditions of learning and theory of instruction*. 전성연, 김수동 (역) (1998). 교수-학습 이론. 학지사.

Ginther, J. L. (1964). *A study of definitions in high school mathematics textbooks*. Doctoral Dissertation. University of Illinois.

Katz, V. J. (1933). *A history of mathematics: An introduction*. New York: Harper Collins College Publishers.

Mancosu, P. (1996). *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century*. Oxford: Oxford University Press.

Menghini, M. (1994). Form in algebra: Reflecting, with Peacock, on upper secondary school teaching. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 9-14.

Robinson, R. (1954) *Definition*. Oxford: Clarendon Press.

Sachs, L. M. (1978). *Definition placement in mathematics concept learning*. Doctoral Dissertation. Ohio State University.

Smith, B. O. (1962). *A study of the logic of teaching*. Urbana: Bureau of Educational Research, College of Education, University of Illinois

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S. (1976). The naive concept of definition in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 7,* 413-429.

______(1977). The Concept of exponentiation at the ndergraduate level and the definitional approach. *Educational Studies in Mathematics, 8,* 17-26.

Vinner, S., Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 356-366.

Vinner, S., Tall, D. (1981). Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 151-169.

Villiers, M. D. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.

A Study on the Definitions Presented in School Mathematics

Woo, Jeong-Ho (Seoul National University)
Cho Young-Mi (Inchon National University of Education)

The purpose of this thesis is, through analysing the characteristics of the definitions in Korean school mathematics textbooks, to explore the levels of them and to make suggestions for definition - teaching as a mathematising activity.

Definitions used in academic mathematics are rigorous. But they should be transformed into various types, which are presented in school mathematics textbooks, with didactical purposes. In this thesis we investigated such types of transformation. With the result of this investigation we tried to identify the levels of the definitions in school mathematics textbooks.

And in school mathematics textbooks there are definitions which carry out special functions in mathematical contexts or situations. We can say that we understand those definitions, only if we also understand the functions of definitions in those contexts or situations. In this thesis we investigated the cases in school mathematics textbooks, when such functions of definition are accompanied. With the result of this investigation we tried to make suggestions

for definition-teaching as an intellectual activity.

To begin with we considered definition from two aspects, methods of definition and functions of definition. We tried to construct, with consideration about methods of definition, frame for analysing the types of the definitions in school mathematics and search for a method for definition-teaching through mathematization. Methods of definition are classified as connotative method, denotative method, and synonymous method. Especially we identified that connotative method contains logical definition, genetic definition, relational definition, operational definition, and axiomatic definition. Functions of definition are classified as, description-function, stipulation-function, discrimination-funtion, analysis-function, demonstration-function, improvement-function. With these analyses we made a frame for investigating the characteristics of the definitions in school mathematics textbooks.

With this frame we identified concrete types of transformations of methods of definition. We tried to analyse this result with van Hieles' theory about levels of geometry learning and the mathematical language levels described by Freudenthal, and identify the levels of definitions in school mathematics. We showed the levels of definitions in the geometry area of the Korean school mathematics. And as a result of analysing functions of definition we found that functions of definition appear more often in geometry than in algebra or analysis and that improvement-function, demonstration-function appear regularly after demonstrative geometry while other functions appear before demonstrative geometry. Also, we found that generally speaking, the functions of definition are not explained adequately in school mathematics textbooks. So it is required that the textbook authors shuld be careful not to miss an opportunity for the functional understanding. And the mathematics teachers should be aware of the functions of definitions.

As mentioned above, in this thesis we analysed definitions in school mathematics, identified various types of didactical transformations of definitions, and presented a basis for future researches on definition teaching in school mathematics.