大韓數學教育學會誌 數學教育學硏究 第 11 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XI, No.1, 193-206. July 2001

탐구형 기하 소프트웨어(Geometer's Sketchpad)의 활동 자료 개발과 그 효과에 관한 연구*

장 경 윤**·황 우 형***·이 중 권****

I.서 론

급속히 변화해 가고 있는 사회는 수학 교육에 있어서 새로운 목표를 요구한다. 이러한 사회는 수학적 지식을 잘 갖춘 인간보다는 새로운 상황에서 수학을 적용하고 문제를 해결할 수 있는 수학적 소양을 갖춘 인간을 더욱 필요로 한다. 급변하는 사회에서 완성된 지식은 상대적으로 그 생명이 길지 않기 때문이다. 새로운 상황에서 해결을 필요로 하는 대부분의 실제적인 문제들은 잘 형식화되어 있지 않다. 그러므로 새로운 시대에서는 열린 문제나 탐구 상황에서 수학을 적용할 수 있도록 교육하는 것이 중요하다(MSEB & NRC, 1989a, 1989b; NCTM, 1989, 2000).

수학교육을 목적으로 개발된 소프트웨어들 가운데 Geometer's Sketchpad(이하 GSP)나 Cabri Geometry는 사용자에게 탐구환경을 제공해 준다. 이들은 도형을 정확하고, 빠르게 작도할 수 있게 하고, 도형의 요소들 간의 기하학적 연계성을 시각적으로 분명하게 보여주며, 변화의 다양한 경우를 실험할 수 있게 하여 지필 환경의 한계를 넘어 무한한 탐구의 세계로 기하학습의 장을 확장시킬 수 있다. 이들 소프트웨어는 근본적으로 사용자와 소프트웨어의 상호작용을 전제로 하며, 사용자의 능력에 따라 여러 가지 수준에서 활용이 가능하다.

이 소프트웨어들이 구현하는 시각적 탐구환경이 학습자들의 학습을 증진시킬 것이라는 가정 아래 이들을 활용하는 수학활동들이 학술지나 잡지에 빈번하게 소개되고 있다. 그러나 GSP를 활용한 수업이 실질적으로 학습을 증진시켰는가에 대한 경험적인 연구는 그리 많지 않다. 또한 미국을 비롯한 수학교육 선진국에서는 이미 이러한 기하 소프트웨어를 수업에 많은 부분 활용하고있으나 우리 나라의 경우는 교육과정과 평가, 그리고 시설문제 등으로 이러한 소프트웨어를 능숙히 다루는 교사조차도 수업에 이를 충분히 활용하지 못하고 있는 실정이며, 이에 대한 연구가 체계적으로 이루어지지도 못했다.

본 연구의 목적은 역동적 기하 소프트웨어의 활동 자료를 개발하고 역동적 기하 소프트웨어를 활용한 기하 활동에서 예비교사들의 기하 추론 및 학습 과정을 질적으로 분석하여 탐구형 소프트웨어의 효과를 탐색하는 것이다. 본 연구의 결과는 GSP뿐 아니라, 기술공학을 이용한 수학교육의 효과적인 확대 보급에도 기여하게 될 것이다.

---

* 이 논문은 1998년 학술진흥재단의 학술연구비에 의하여 지원되었음.
** 건국대학교
*** 고려대학교
**** 동국대학교

II 이론적 배경

GSP에 관한 연구는 GSP의 활용 방안의 소개, GSP 활용 효과에 대한 질적 또는 양적 연구의 범주로 나눌 수 있다. Hoyles(1987)는 컴퓨터를 수학적 지식을 일방적으로 제공하는 교사가 아니라 컴퓨터 화면에 의해 재현되는 표현들을 학습자들로 하여금 조작하게 하는 도구이며, GSP나 Cabri Geometry와 같은 소프트웨어에서 도형의 작도는 일련의 순차적인 과정을 통하여 이루어지고 이렇게 작도된 도형은 고정된 모습을 갖는 것이 아니라 마우스를 통해 그 동적인 측면을 쉽게 드러낼 수 있기 때문에 학생들은 분석적인 사고를 할 수 있다고 하였다. Manoucheri, Enderson, & Pugnucco(1998)는 GSP의 효과에 대하여 첫째, 학습을 자유로운 탐구과정으로 이끌어 갈 수 있고, 둘째, 수학적 내용과 정리를 작도하거나 기하학적 관계성을 쉽게 발견할 수 있도록 반 구조화된 학습활동을 가능케 하며, 셋째, 학생 스스로 독립적 탐구와 문제해결을 경험하게 하여 학습자들은 자신의 독립적 지식의 정리와 그에 대한 증명을 학습한다고 하였다.

컴퓨터 소프트웨어의 효과는 학습 내용과 소프트웨어의 활용 방법에 따라서 달리 나타난다 (Robert와 Stephen, 1999; Connel, 1998). Robert와 Stephen(1999)는 주 2회씩 정기적으로 Geometry Inventor라는 소프트웨어를 기하 수업시간에 사용한 결과 도입 부분과 변환 영역에서는 소프트웨어의 사용이 성취도에 긍정적인 영향을 주는 것으로 나타났으나 그 외의 영역에서는 성취도에 차이가 없었다고 보고하고 있다. Connel (1998)은 구성주의 철학을 가지고 있는 두 교사가 각각 컴퓨터를 학생들에게 도구용과 제시용으로 사용하였을 때 그 효과가 달리 나타났다는 경험연구를 보고하고 있다. 이 두 연구는 동일한 소프트웨어라 할지라도 교과 내용 (Roberts와 Stephen, 1999)과 활용 방법(Connell, 1998)에 따라 컴퓨터 소프트웨어의 활용 효과가 다르다는 연구 결과로서 교육과정에 컴퓨터를 도입을 고려하는 데 있어 시사하는 바가 크다고 하겠다.

1995년 GSP가 국내에 처음 소개된 이후(장경윤, 1995) 기하수업에서 GSP의 활용 방안이 각종 연수를 통해 소개가 되거나 연구 논문의 형태로 국내에서 급속하게 파급되었다. GSP의 활용 방안을 제시하는 연구의 대부분은 그 학습 효과를 가정하고, 일반적인 예시(류희찬, 1998; 신동선과 류희찬, 1998; 강순자와 고상숙, 1999) 또는 모형 학습단원의 제시(류희찬 외 2인, 1999) 형태로 나타난다. 또한 GSP를 개발한 미국의 Key Curriculum Press에서 발간한 일련의 활동집(Bennett, 1996)이 부분적으로 번안되어 교사들을 중심으로 하는 인터넷 사이트(http://www.mathlove.co.kr) 등에 소개되기도 하였다. 최근에는 Java Applet으로 인터넷 상에 GSP 파일이 탑재되어 있다.

국내 연구 결과, 문제해결에서 GSP의 활용이 문제해결을 van Hiele의 학습단계 중 자유적응(Free Orientation) 과정과 매우 유사하게(고상숙, 1997)하며 동기유발(고상숙, 1997; 전영국, 1999), 기하 추론 능력의 보완(전영국과 주미, 1998), 기하 증명에서 경험적 정당화와 연역적 정당화의 상호작용, 새로운 내용 학습(류희찬과 조완영, 1999)에 있어서 긍정적인 효과가 보고되기도 하였다. 그러나 학업성취에 있어서 지필 환경과 비교하여 탐구형 소프트웨어의 긍정적인 효과는 보고되지 않고 있다(나희경과 박종률,1999; 이정열, 1999; Robert & Stephen, 1999).

본 연구는 기존의 GSP를 활용한 활동들을 보완 발전시키고 필요한 활동들은 새로 개발하

여 현장교사들이 학년별 또는 수준별로 적절하게 재구성하여 활용할 수 있는 자료 개발을 포함한다. 각각의 활동은 구체적이고 상세히 기술될 계획이므로 GSP의 기초적인 사용법만을 알고있는 교사도 쉽게 사용할 수 있을 것이다. 또 개발한 활동을 수행하는 동안 기하 학습에 있어서 탐구형 소프트웨어의 효과를 탐색하게 될 것이다. 본 연구의 결과는 GSP뿐 아니라, 기술공학을 이용한 수학교육의 효과적인 확대 보급에도 기여하게 될 것이다.

III 연구 내용 및 절차

1. 연구내용

본 연구는 컴퓨터를 활용한 수학교육의 한 모델로서 GSP의 활용방안을 탐색하기 위하여 설계되었다. GSP의 특징적인 요소인 시각화, 그래픽 탐구, 논리적 추상화, 그리고 수학적 의사소통을 우리 나라 수학 교육과정에 적절하게 접목시킬 수 있는 구체적인 방안을 탐색하기 위하여 설계되었다.

GSP는 탐구용 소프트웨어로 유용하지만 제시용으로도 사용될 수 있다. 자료의 제시 방법은 도형 학습을 위하여 자습 또는 교사시범용으로 파워포인트 파일을 제작하고 도형의 특징과 성질을 설명하는 부분에서 이를 확인할 수 있게 하도록 미리 제작된 특정 GSP 파일로 연결하여 도형의 성질을 확인할 수 있게 한다. 또한 GSP는 개발된 자료의 특성과 그 사용 방법에 따라 학습자를 자유로운 탐구로 안내하거나 일정 방향으로 탐구가 이루어지도록 이끌 수 있다.

본 연구에서는 GSP를 제시용으로서가 아니라 탐구용으로 활용하였다. 먼저 초·중·고, 및 대학 수준의 교과내용을 GSP를 활용하여 탐구할 수 있도록 연구 문제와 탐구 활동을 학생활동지 형태로 개발하고, 예비 중등 수학교사들에게 탐구문제를 해결하도록 하여 이 해결과정에서 GSP의 효과를 질적으로 관찰하고 기하추론에서의 특징을 아울러 조사하였다.

1) 탐구형 기하 소프트웨어(GSP)의 활동 및 자료 개발

연구 범위는 초, 중, 고 및 예비교사를 위한 대학수학에 해당하는 내용에 대하여 연구문제(Investigation Problem), 활동문제(Activity Problem), 그리고 탐구문제(Exploration Problem)를 개발한다. 연구문제는 새로운 개념이나 성질의 학습을 위하여 제시하며, 활동문제는 이미 학습한 내용을 확장하기 위한 활동이다. 탐구문제는 문제를 해결할 때 GSP를 활용할 수 있는 문제 상황들로 제시한다.

각 활동자료의 개발 지침은 다음과 같다.

① 각 활동자료에는 필요한 작도 방법을 가능한대로 상세하게 제시하며 단계별로 적절한 질문을 포함하여 질문에 대한 답이 학습자들을 자연스럽게 다음 단계로 이끌도록 한다.

② 연구문제는 학습자들이 스스로 새로운 개념이나 성질을 탐구할 수 있도록 단계적으로 제시하며 필요한 경우 설명을 적절하게 제공한다.

③ 활동문제는 이미 학습한 내용을 확장할 수 있는 다양한 상황으로 제시한다.

④ 탐구활동의 경우 학습자들이 GSP를 활용하지 않고도 문제를 해결할 수 있게 한다.

2) 탐구형 기하 소프트웨어(GSP)의 효과 검증

각 활동은 초·중등학교의 기하 영역을 포괄한다. 본 연구에서 탐구형 소프트웨어의 효과 검증은 소프트웨어 활용 자체가 문제가 되지 않도록 하기 위하여 이 소프트웨어의 사용 방

법을 알고 있는 예비 중등 수학교사들로 제한하기로 하였다. 또 GSP의 효과검증을 위하여 이들이 이미 잘 알고 있는 성질들을 '제시'하기 위한 활동들을 의미가 적다고 판단하여 예비교사들에게 도전이 될 만한 문제해결형 탐구 문제들을 사용하여 그 효과를 검증하였다.

2. 탐구형 소프트웨어의 효과 검증을 위한 자료수집 및 분석

1) 연구 대상

사범대학에서 탐구형 소프트웨어의 효과를 검증하기 위하여 2000년도 2학기에 『컴퓨터를 활용한 수학교육』을 수강하는 수학교육과 1학년 남학생 4명을 대상으로 선정하였다. 이 학생들은 이미 강의를 통해 GSP의 기본 사용법을 습득한 학생들이며 협동과제 제출을 위하여 같은 조에서 작업을 해오고 있다. 네 명의 성적분포는 다양하여 1학기 성적을 기준으로 한 명은 장학생으로 상위권에, 한 명은 중위권, 나머지 두 명은 중하위권에 속해있었다. 평소 강의시간에 이루어진 조별 활동에서 이들은 모두 적극적으로 활동에 참여하였으며 문제상황에서 활발한 논의와 협력을 하는 것으로 나타났다. 이들은 연구자의 요청을 수락하고 자의적으로 본 연구에 참여하였다.

2) 연구 절차

실험은 강의시간과 별도로 4주에 걸쳐 주 1회씩 이루어졌으며, 1회에 약 1시간 30분에서 2시간 정도의 시간이 소요되었다. 활동 내용과 문제해결형 탐구 문제들로서 구체적인 사항들은 다음과 같다.

(1) 활동 과제

가. 무게중심에 관한 정리와 코만디노의 정리

학생들은 무게중심에 관한 정리와 그 3차원적 확장으로 얻어지는 코만디노의 정리를 증명하도록 하였다. 무게중심에 관한 정리는 현행 중학교 교육과정 2학년에 포함된 내용이나 그 증명은 학생들에게 자명한 것이 아니며 코만디노의 정리는 학생들에게 새로운 내용이다.

A. 무게중심에 관한 다음 정리를 증명하라.

> (1) 삼각형의 각 꼭지점에서 대변의 중점을 이은 선분(중선)은 1점에서 만난다.
> (2) 그 점은 각 중선을 2:1로 나눈다.

B. 무게중심에 관한 정리를 3차원으로 확장한 것이 코만디노의 정리이다.

(1) 코만디노의 정리가 어떻게 될 지 추측하여 서술하라.

(2) 코만디노의 정리를 증명하라.

나. 궤적탐구(1): 이차곡선

궤적이 각각 포물선, 타원, 쌍곡선, 원이 되는 문제상황을 제시하고 그 궤적을 추측하고 자신의 추측을 정당화(증명)하도록 하였다. 문제상황을 요약하면 다음과 같다.

> A. 그림과 같이 $\overline{AB}$와 한 끝점 D에서 $\overline{AB}$와 만나는 선분 $\overline{CD}$가 있다. D를 지나 선분 $\overline{AB}$에 수직인 직선과 $\overline{CD}$의 수직이등분선의 교점을 P라 하자. 점 D가 $\overline{AB}$위를 움직일 때, 점 P의 자취는 어떤 도형인가? (그림제시)

> B. 그림과 같이 중심이 C인 원 위에 한 점 A와 내부에 한 점 B가 있다. $\overline{AB}$의 수직이등분선과 $\overleftrightarrow{CA}$와의 교점을 P라 하자. A가 원 C위를 움직일 때, 점 P의 자취는 어떤 도형인가?(그림제시)

> C. 그림과 같이 중심이 C인 원 위에 점 A와 원의 외부에 점 B가 있다. $\overline{AB}$의 수직이등분선과 $\overleftrightarrow{AC}$와의 교점을 P라 하자. A가 원 위를 움직일 때, 점 P의 자취는 어떤 도형인가? (그림제시)

> D. 그림과 같이 원 위에 임의의 세 점 A, B, C를 잡고 삼각형을 그린다. 이 $\triangle ABC$의 무게중심을 작도하여 P라 하자. A가 원 위를 움직일 때, 점 P의 자취는 어떤 도형인가? (그림제시)

다. 궤적탐구(2):

AB를 지름으로 하는 원주 위에 임의의 점 P를 잡는다. AP의 연장 위에 점 Q를 잡아 $\overline{BP} = \overline{PQ}$로 할 때, 점 Q의 자취를 구하여라.

라. 아폴로니우스의 원:

삼각형 ABC에서 각 A의 이등분선과 각 A의 외각의 이등분선이 직선 BC와 만난 점을 각각 D, E라 할 때 다음을 증명하라.

① 삼각형 ADE는 직각삼각형이다.

② 점 D, E는 선분 AB를 $\overline{AB}:\overline{AC}$로 각각 내분 및 외분하는 점이다.

③ 점 A는 DE를 지름으로 하는 원 위에 있다.

④ DE를 지름으로 하는 원 위의 임의의 한 점을 P라 할 때, $\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{AB}:\overline{AC}$이다.

(2) 활동 환경

학생들은 약 16㎡의 실내에서 장방형의 사각 테이블에 둘러앉아 동일하게 주어진 문제 상황을 각각 탐구하는 것으로 시작하였다. 한쪽 벽면에는 GSP가 설치되어 있는 PC가 2대 나란히 놓여져 있어서 학생들이 필요로 하는 경우에 언제든지 PC 활용이 가능하였다. 활동 장소와 시간, 환경은 매주 동일하였으며 학생들은 문제해결을 위하여 자주 토론을 하였다.

(3) 자료수집

본 연구를 위해 수집한 자료는 수업 및 문제해결 상황에서의 학생들의 대화를 녹음한 테이프와 비디오 테입, 학생들이 만든 GSP 스케치 파일, 연구자가 학생들의 태도에 관한 특기사항을 기록한 관찰기록노트, 그리고 문제풀이 시험지이다.

가. A/V 기록

매 활동 상황은 비디오로 녹화하였으며 학습 중에 일어나는 학습자간, 연구자와 학습자의 대화 및 행동을 별도로 녹음하였으며 학생들은 학습과정 및 문제해결 과정에서 떠오르는 모든 생각이나 의문점 등을 소리내어 생각하도록 하여 음성을 녹음하였다.

나. Sketchpad 파일

활동 중에 학생들이 만든 파일을 자료로 활용하였다.

다. 관찰 기록

녹음하기 어려운 표정이나 태도 등 특기할 만한 사항에 관하여는 학습 중에 관찰 도중 노트에 기록하였다.

라. 탐구 및 평가문제지

문제해결 활동지에 학생들이 기록한 풀이 과정을 자료로 사용하였다.

(4) 분석 방법

연구자는 학습 중에 학생들의 사고 과정을 녹화한 비디오테입, 관찰 노트에 기록한 학생들의 특기사항, 학생들이 직접 만든 Sketchpad 파일, 그리고 학생들이 시험지에 기재된 풀이 과정을 기초로 학생들의 사고과정을 질적으로 분석하였다.

Ⅳ 연구 결과

1. 탐구형 소프트웨어 활동 자료 개발

자료는 연구문제, 활동 문제, 탐구문제로 구분하여 개발하였다. 자료 개발 영역은 삼각형, 원, 원추곡선, 문제해결 등이며 다음과 같은 내용들이 자료에 포함되어 있다.[1)]

삼각형

이등변 삼각형의 성질/ 삼각형의 외심과 그 성질/ 삼각형의 내심과 그 성질/ 삼각형의 수심과 그 성질/ 삼각형의 무게중심과 그 성질/ 삼각형의 방심과 그 성질/ 삼각형의 결정조건과 작도/ 삼각형의 내각의 크기/ 삼각형의 외각의 크기/ 삼각형의 세 변 사이의 관계/ 삼각비의 탐구/ 특수각에 대한 삼각비/ 삼각비 사이의 여러 가지 관계/ 삼각형 닮음의 응용(1, 2)/ 삼각형의 중점연결정리와 그 역/ 닮은 도형의 넓이의 비

원

원과 비례/ 원주각과 중심각/ 원주각과 그 응용/ 원과 사각형/ 중심각과 호의 길이/ 원주각과 호의 길이/ 호도법/ 접선과 현/ 할선과 접선

원추곡선의 탐구

문제해결

최단 거리 1: 정삼각형 내부의 1점에서 꼭지점에 이르는 거리의 합/ 삼각형 내부의 한 점에서 꼭지점에 이르는 거리의 합/ 직사각형 내부의 1점에서 꼭지점에 이르는 거리의 합/ 상자 표면에서의 최단 경로

궤적의 탐구: 아폴로니우스의 원과 그 응용/ 원추곡선/ 리마송

최단거리 2 : 타원

2. 탐구용 소프트웨어의 활용 효과

개발된 활동 자료 가운데 탐구문제들을 중심으로 대학생들에게 소프트웨어를 활용하여 문제를 해결하게 하였는데, 그 과정에서 몇 가지 주목할 만한 소프트웨어 활용 효과들이 발견되었다.

효과 1 : GSP의 측정과 작도 기능은 자신의 추측을 확인하고 새로운 정리를 발견할 수 있도록 돕는다.

삼각형의 무게중심에 관한 정리를 3차원으로 확장시키면 사면체의 한 꼭지점에서 (대변의 중점 대신에) 마주 보이는 삼각형의 무게중심을 연결한 선분이 한 점에서 만날 것이라고 유추할 수 있다. 학생들은 삼각형을 사면체로, 대변의 중점을 마주 보이는 면의 무게중심으로 바로 확장하였다. 그리고 이 때 교점은 삼각형의 경우처럼 각 선분을 2:1로 내분할 것이라고 추측하였다(아래 대화 2). 그러나 GSP를 활용하여 이 상황을 작도한 결과 학생들은 2:1로 내분할 것이라는 자신들의 추측이 옳지 않음을 확인하게 되고 추측을 수정하여 새로운 정리를 발견할 수 있게 된다.

1 T: 무게중심에 관한 정리를 3차원으로 확장하면 어떻게 말할 수 있을까? 삼각형, 세 중선, 2:1의 비는 각각 어떻게 될 것 같은가?

2 S: 삼각형이 입체가 되면 사면체? 꼭지점과 대변의 중점을 연결한 선분은 꼭지점과 마주 보이는 면, 삼각형의 무게중심으로? (학생들은 종이에 사면체를 그리고, 네 꼭지점에서 마주 보이는 삼각형의 무게중심을 각각 연결하였다.) 이것들이 한 점에서 만나고... 그 비는 2:1이다? 이게 맞나? (학생들은 공간에 좌표축을 설정하여 교점의 좌표를 구하려다가 식이 복잡해지자 당황하였다.)

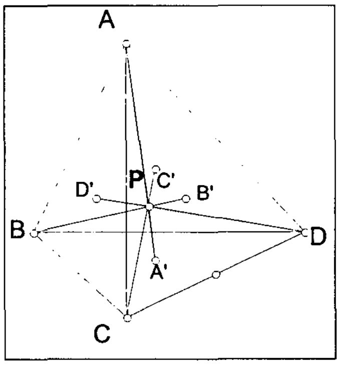
3 T: 작도를 해서 추측이 맞는가 확인할 수 있을까? (S2가 GSP로 작도를 시작하여 사면체의 겨냥도를 그린다.<그림 1>)

4 S2: 무게중심하고 .....연결하고.. (S2가 사면체의 각 면의 무게중심을 작도하고 마주 보이는 꼭지점과 각각 연결한 다음 꼭지점들을

1) 활동자료들은 별도의 책자로 발간될 것이며, 본 논문에서 이에 대한 상세한 언급은 제외시키기로 하였다. 이 논문에서 학생들에게 제시된 문제들은 본 연구에서 탐구 문제로 개발된 활동의 일부이다.

이리저리 움직여 본다. S2는 무게중심을 작도하기 위해 각 면에 그은 중선들은 화면에 나타나지 않도록 숨기기를 하였다. 나머지는 컴퓨터 모니터 앞에 모여 서서 이를 지켜본다)

5 S3: 이것도 네 선분이 한 점에서 만나네... 그러면 이것(네 선분)도 각각 2:1로 내분하는 점이 교점이 된다는 말인데...

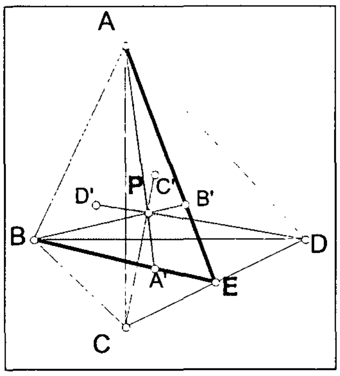


<그림 1>

학생들은 교점이 각 선분을 2:1로 내분할 것이라고 추측하였으며(2번, 5번), 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 증명하던 앞서의 방법(한 선분을 2:1로 내분한 점을 나머지 선분들도 지나게 된다는 것을 앞서의 활동에서 이미 보였음.)을 적용하여 네 선분이 한 점에서 만난다는 것을 보이려고 하였다.

정사면체에서 네 선분이 한 점에서 만난다는 것을 지필 환경에서 그림을 그려보고 증명을 시도하던 학생들은 그림이 복잡해지자 좌표를 이용하려고 하였다. 그러나 이 방법 역시 복잡한 수식을 조작해야 하는 것으로 나타나자 학생들은 당황해 하였다(2번). 이 때, 좌표를 설정하는 대신 종합적 방법을 적용하는 것이 어떻겠느냐는 연구자의 제안에 학생들은 GSP로 상황을 작도하였고(그림1), 학생들은 모니터 상에 나타난 겨냥도를 조작하며 변화를 관찰하여 증명의 실마리를 찾으려 하였다(이 때까지 선분의 비는 2:1로 믿고 있음.).

6 S2: 이것은 눈에 보인다고 생각하고... 선마다 색을 달리 칠하자. (S2는 각 꼭지점에 기호를 붙이고, 보이는 곳은 색을 달리 설정하였다. (그림 참조)) 이제 $\overline{AP}:\overline{PA}$가 2:1인 것을 어떻게 보이냐?



<그림 2>

학생들은 AA′와 BB′의 교점을 P 라 할 때, $\overline{AP}:\overline{PA'}=2:1$인 것을 보이면 된다고 생각하고 있었고 이를 위하여 GSP 화일에 그림과 같이 보조선 AE, BE를 그려 넣었다. 그리고 삼각형 ABE가 한 평면으로 드러나도록 색을 칠하였다(<그림 3>).

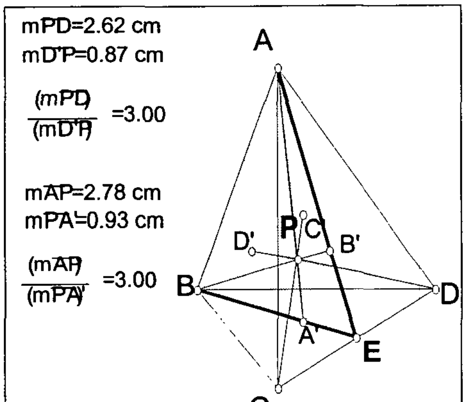
이 과정에서 이들은 삼각형 ABE에 주목하게 되고, AE, BE가 각각 사면체의 면을 이루는 삼각형의 중선이며 B′와 A′는 $\overline{AE}$와 $\overline{BE}$를 2:1로 내분함을 즉각적으로 인식하였다. 그러나 여전히 점 P 가 각 선분을 2:1로 내분하는 것으로 생각하였고 그림에서 이를 확인하려고 하였다.

7 S1: 야, 이게($\overline{AB'}:\overline{B'E}$) 2:1이고 이게($\overline{CA'}:\overline{A'E}$) 2:1이니까 여기($\overline{AP}:\overline{PA'}$)도 2:1이라고 말할 수 있냐? (이때 S2가 각 선분의 길이를 측정하기 위해 선분 AP와 PA′를 선분으로 지정하고 길이를 측정하기 위하여 계

산기를 화면에 나타낸다.)
8 S4: 야, 계산기 누르는 단축키가 뭐냐? ...(중략)...
9 S2: 길이를 재보자.
10 S1: 겨냥도인데 길이가 같냐?
11 S2: 아니, 비가 같아.
12 S4: 아 그러면 이게 2:1이 되는구나. (두 길이와 비의 값이 계산기로 측정되어 화면 좌측상단에 나타난다.(<그림 3> 참조)
13 S2: 어~, 3:1이다.
14 S1, S4: 뭐? 3:1이라고? (중략)....
15 S2: 맞다! 하하(웃음), 이게 2:1이니까,.. ($\overline{AB}:\overline{A'B'}$가 3:1이 됨을 상기시킨다.).
16 S1, S3, S4: 아 그렇구나! 2:1이 아니네...

학생들은 나머지 두 선분 BB′, CC′에 대해서도 교점 P가 각각을 3:1로 내분하는 것을 측정을 통해서 확인하고 자신들의 추측을 수정하였다.

여기에서 학생들이 정리를 발견하고 증명하는 과정은 별개의 것이 아니고 동시적인 것으로 나타나고 있음을 알 수 있다.

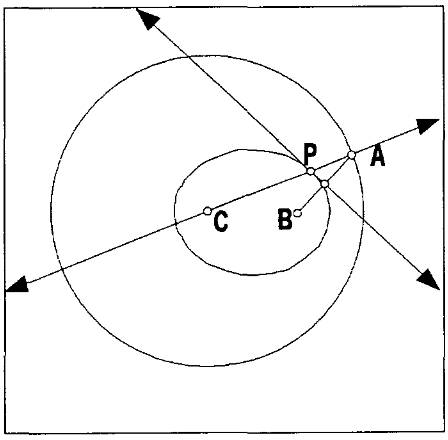


<그림 3>

효과 2 : GSP의 시각화와 조작 기능은 증명의 방법을 발견하도록 돕는다.

학생들은 문제의 조건을 만족하는 도형을 작도하는 과정을 통하여 해당 도형과 관련이 있는 성질을 시각적으로 재인식하게 되어 문제해결에 직접적으로 이를 수 있는 실마리를 찾을 수 있다.

이같은 예는 여러 과정에서 발견된다. 한 예로, 궤적을 구하고 이를 정당화하는 문제에 있어서 GSP를 활용한 문제상황의 시각화가 증명의 방법을 쉽게 발견하도록 하였다. 학생들은 궤적탐구 1A에서 조건을 만족시키는 점P의 궤적이 타원임을 정당화하는 과정에서 GSP를 이용한 작도 <그림 4>를 통하여 $\overline{CP}+\overline{BP}$의 크기가 원의 반지름인 $\overline{CA}$의 길이로 일정하다는 사실을 곧 바로 증명에 사용하였다.



<그림 4>

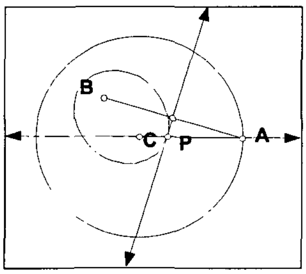
또 코만디노의 정리를 증명하는데 있어서 GSP로 작도한 3차원의 겨냥도, 특히 그림 <그림 3>에서 AE와 BE의 작도는 도형의 요소들 사이의 관계를 발견하고 증명하는 데 결정적으로 도움을 준 것으로 나타났다. 동적인 변화를 가능하게 하는 소프트웨어의 시각화 기능은 복잡한 3차원 겨냥도에서 학생들로 하여금 삼각형 ABE에 주목할 수 있게 하였고 결국 이것이 정리의 완성과 증명이 가능하도록 이끌었다.

효과 3 : 탐구형 소프트웨어는 문제해결을 도울 뿐 아니라, "~이면 어떨까?" 또는 "~이 아니면 어떨까?"라는 사고를 자연스럽게 유도하여 탐구의 장을 확장시킨다.

궤적탐구 문제1B에서 중심이 C인 원 위에 한 점 A와 원의 내부의 한 점 B가 있을 때 직선 CA와 선분 AB의 수직이등분선의 교점을 탐구하는 문제(궤적탐구 1B)에 대하여, 학생들은 지필환경에서 몇 개의 점을 찍어 보고 4명 중 1명만이 타원이라고 하였고, 3명의 학생들은 그 궤적이 원일 것이라고 추측하였다.

17 S1: 이거 타원이다.
18 S2: 내 생각에는 원인 것 같아.
19 S1: (확신있는 어조로) 아니! 만일 점 B가 점 C에 일치한다면 동심원이 되지!

S1은 이미 $\overline{BP}+\overline{CP}$가 일정함을 주어진 그림을 통해 인식하고 점 P의 자취가 타원임을 확신하고 있었다. 나머지 학생들은 S1의 설명으로 자신들의 추측이 잘못된 것 같다는 것을 직감하였고 이를 확인하기 위하여 S2가 GSP로 문제상황을 작도하여 컴퓨터 모니터에서 P의 자취<그림 5>를 관찰하였다.



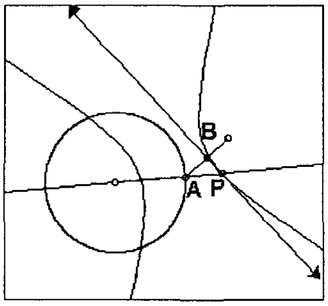
<그림 5>

20 S1: 아~, 초점이 되네!
21 S3: 아~, 합이 일정하구나!

S1과 S3는 그림에서 각각 점 B와 점C가 초점의 역할을 하고 있는 것과 BP와 CP의 길이의 합이 원 C의 반지름으로 일정하다는 사실을 발견하였다. 학생들은 계속하여 점 B의 위치를 움직여 보면서 B의 위치에 따라 모니터상에 타원의 모양이 달리 나타나는 것과 점 B가 점 C와 일치할 때 원이 된다는 사실을 발견하였다.

점 B의 위치에 따라 자취가 타원 또는 원이 된다는 사실을 발견한 학생들의 탐색은 여기에서 그치지 않았다.

22 S2: 점 B가 밖으로 가면 어떻게 되나? (컴퓨터를 조작하던 학생(S2)이 갑자기 질문을 제기하며 점 B를 원 밖으로 끌어냈다(22번). 그러자 BA 의 수직이등분선이 선분 AC와 교점이 나타나지 않게 되었고, 이에 한 학생이 (이미 작도한) 선분 AC를 직선 AB로 대체할 것을 하였다.)
23 S2: 아~! 안 만난다.
24 S1: 선분을 연장하면 만날 것 같은데... (선분을 직선으로 연장하자 궤적이 드러났다<그림 6>.)
25 S2:… 아~ 쌍곡선이 된다.
26 S3: 왜 그러냐?



<그림 6 >

학생들은 자취가 쌍곡선이 되는 이유를 진지하게 논의하기 시작하였고, 곧 그림으로부터 답의 타당성을 규명하였다. "…이면 어떨까?" 하는 질문으로 학생들은 그 다음 활동으로 재

시하려했던 "궤적문제 1C"로 자연스럽게 이동하게 된 것이다.

효과 4 : 학생들은 익숙한 상황보다는 다소 생소한 상황에서의 탐구에 소프트웨어를 사용한다.

본 연구에서 문제를 탐구하는데 소프트웨어를 가장 유용하게 활용한 경우는 코만디노의 정리의 내용을 추측하고 증명할 때와 궤적문제를 해결할 때였다. 특히 문제의 조건에 따라 작도한 점을 동영상으로 처리하였을 때 만들어진 궤적은 궤적의 모양을 확인하도록 하였을 뿐 아니라 왜 궤적이 그러한가 하는 이유를 거의 동시에 시각적으로 발견할 수 있도록 돕는다. 학생들은 기하 문제해결에 있어서 소프트웨어를 사용하는 것에 대하여 매우 소극적이었다.

3. 대학생들의 기하 추론 능력과 소프트웨어 활용에 대한 태도

1) 학생들의 기하 추론 능력

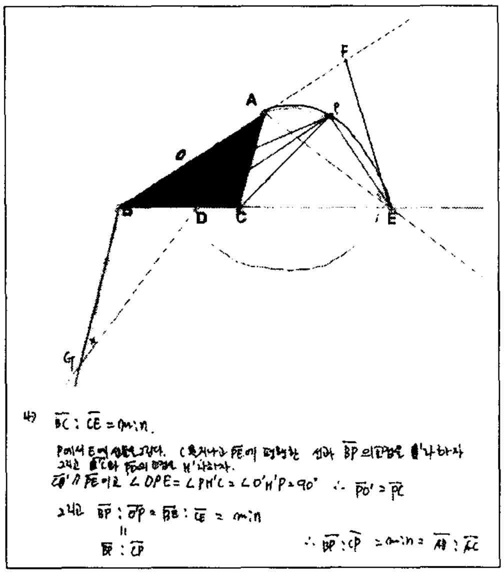
소프트웨어를 사용할 수 있는 환경에서 이루어진 4회의 탐구 활동을 통하여 대학생들의 기하 추론 능력이 매우 제한적임을 발견할 수 있었다. 기하 추론 능력에서 발견된 몇 가지 특성을 요약하면 다음과 같다.

첫째, 학생들의 종합적인 증명 능력이 매우 제한적이었다. 학생들은 이미 내용을 알고 있는 정리를 증명하는 데 어려움을 겪었으며, 증명의 방법 자체를 탐색하기보다 증명에 대한 자신들의 기억을 되살리려고 노력하였다. 이는 중등학교에서의 증명 교육이 매우 기계적으로 이루어졌음이 의미하는 것으로, 그 한가지 예를 무게중심에 관한 정리(탐구문제1)를 증명하는 과정에서 발견할 수 있다. 연구자는 이 정리가 중학교 3학년 수학교육과정에서 그 내용과 증명이 함께 다루었기 때문에 대학생들에게 평이한 문제라고 생각하였고 이를 3차원으로 확장하는 부분에 탐구의 초점이 있을 것으로 예상하였던 문제이다. 그러나 연구자의 기대와 달리 학생들은 이 문제를 해결하는데 가장 많은 시간을 소요하였다.

둘째, 학생들은 해석적 접근에 매우 익숙해 있었으며 거의 모든 문제에서 좌표를 설정하여 문제를 해결하려고 하였다. 학생들은 중등학교 교육과정에서 종합적 방법으로 먼저 증명을 더 간단히 해결할 수 있는 문제들, 예를 들어 삼각형의 무게중심에 관한 성질과 궤적이 타원이 되는 궤적문제 1A에서도 모든 학생들이 처음부터 좌표축을 설정하여 풀이를 시도하였다. 학생들은 궤적 1A의 식을 특정 좌표축을 설정하여 $y=x^2/2k+k/2$로 구하여 이를 근거로 궤적이 포물선이라고 답을 한 후에 자신들이 임의로 설정하여 구한 답을 일반화할 수 있는가의 여부를 스스로 질문하였다.

세째, 기하추론에서 학생들은 엄밀성이 부족한 것으로 나타났다. 학생들은 증명이 복잡한 경우에 직관에 의존하여 부적절한 성질을 적용한 사례가 발견되었다. 삼각형 ABC에서 꼭지점 A를 지나고 선분 BC를 m:n으로 각각 내분, 외분하는 점을 지름의 양끝으로 하는 원(아폴로니우스의 원)을 작도하였을 때, B와 C에서 원 위의 임의의 점 P까지의 거리의 비($\overline{BP}$: $\overline{CP}$)가 역시 m: n이 된다는 것을 증명하는 문제(과제 4의 (4))에서 알려져 있지 않은 사실(증명 기록에서 4째 줄 끝을 사용하고 있다. 또 해석적 방법의 사용에 대해서도 해석적 방법을 적용한 경우에 평행이동이나 회전 등 합동변환이 도형의 모양과 성질을 보존하므로 이에 대

한 증명을 위하여 임의로 좌표를 설정하여도 동일한 결과가 보장됨에도 불구하고 특정 좌표축을 설정하여 얻은 식의 일반화 여부를 확인하려고 한 사례 등에서 증명 방법에 대한 엄밀성의 인식이 적절하지 않은 것으로 나타났다.



2) 소프트웨어의 역할에 대한 학생들의 인식

GSP는 수학적 사실을 제시하거나 탐구를 목적으로 사용될 수 있는데 이 연구에서는 GSP를 문제해결을 위한 탐구용으로 학생들이 선택적으로 사용하였다.

학생들은 수학 문제를 해결하는데 소프트웨어 등 도구나 실험에 의한 관찰이나 탐구보다 정신적인 해법을 더 중시하고 있음이 네 차례의 문제해결 과정과 면담 결과에서 드러났다. 즉 모든 문제의 해결에서 학생들은 소프트웨어를 사용하기보다 먼저 지필 환경에서 답을 추측하거나 증명 방안을 모색하려 하였다. 학생들은 그 후 자신들의 추측을 확인하기 위하여, 또는 문제해결의 실마리를 찾지 못하는 경우에 한하여 소프트웨어를 활용하여 소프트웨어 활용에 매우 소극적인 것으로 나타났다.

Ⅴ. 요약 및 논의

1) 요약

탐구형 소프트웨어는 사용자와 소프트웨어의 상호작용을 전제로 하며 사용자의 능력에 따라 얼마든지 다른 수준에서 활용될 수 있는 역동적인 소프트웨어이다. 본 연구 결과 탐구형 기하 소프트웨어 GSP는 몇 가지 사항에서 학습효과가 있었다. 첫 째, GSP는 익숙하지 않은 문제상황에서 정리를 추측하고 확인하며 증명의 방법을 발견하는 데 유용한 것으로 나타났다. 둘 째, 정리의 발견과 증명을 거의 동시에 이루어지게 하였다. 특히, 사용자가 문제의 조건에 따라 정확한 작도를 할 수 있는 상황은 정리의 발견과 증명의 방법을 거의 동시에 가능하게 하였다. 작도 도구로서 동영상을 제공하는 GSP는 특히 궤적문제 해결에 유용하였다. 동영상으로 궤적을 추측하게 할 뿐 아니라 정확한 작도가 타당화의 실마리를 제공해 주기 때문이다. 세 째, GSP의 즉각적인 역동성은 문제해결의 검토 단계에서 사용자로 하여금 "…이면 어떨까?"라는 질문을 자연스럽게 제기하도록 하여 탐구 활동의 장을 확장시키는 것으로 나타났다.

문제해결 과정에서 나타난 예비 수학교사들의 기하추론의 특징 가운데 하나는 이들이 종합적 관점보다는 해석적 관점에서의 문제해결을 크게 선호한다는 점이다. 또 종합적 관점에 따른 증명에 있어서 학생들은 이미 과거에 학습한 바 있는 정리의 증명을 새롭게 시작하려 하기 보다 과거의 학습했던 기억을 되살려내어 문제를 해결하려고 하였다. 여기에서 이들이, 과거 중·고등학교에서 종합적 증명을 학습하는 단계에서, 스스로 증명의 방법을 발견하거나 발견의 과정에 대한 고찰이 이루어지지 않은 채 이미 만들어진 증명을 답습하였다는 사

실을 알 수 있다. 거듭된 추측과 실험의 마지막 결과로 만들어진 증명을 그 발견 과정을 드러내지 않은 채 연역적으로 학생들에게 제시함으로써 학생들에게 의미상실과 기계적 학습을 초래한다는 유클리드적(종합적) 기하 학습의 취약점(우정호, 1998)을 재확인하게 하였다. 실제로 학생들은 제시되거나 조건으로부터 도출되지 않은 사실을 증명 과정에서 이용하는 등 종합적 증명 능력이 매우 제한적이었다.

2) 논의

새수학 시기에 한때 유클리드 기하의 전통적 가치가 부정되고 기하를 대수로 대체하려는 시도가 있었다. 그러나 유틀리드 기하는 기하적 사고를 통하여 일상적인 사고가 형식적인 사고로 전이가 일어나게 하며, 도형적인 직관이 작용하여 명제의 증명을 발견하게 하는 독특한 연역체계로서 학교 수학에서 중요한 의미를 갖는다(Thom, 1973; 우정호, 1998). 또한 유클리드 기하에는 학교 수학에서 학생들에게 도전이 될 만하며 수학적으로 의미있는 다양한 문제들이 포함되어 있다. 그러므로 유클리드 기하의 도야적 가치를 재조명하여 학교 수학에서 비중있게 다루어야 한다.

기하 학습수준에 대한 van Hiele에 따르면 유클리드 기하의 연역적인 체계를 이해하기 위해서는 도형의 요소에 주목하며 도형의 성질을 탐색하며 비형식적인 증명의 수준을 반드시 거쳐야 한다. 본 연구에서는 대학생들을 대상으로 하였기 때문에 명제의 발견과 증명 부분에 크게 초점이 맞추어져 있지만 중고등학교 수준에서 GSP는 소프트웨어의 특성 상 도형의 성질을 탐색하는 데 더없이 훌륭한 환경을 제공한다.

본 연구 결과 GSP는 탐구용 소프트웨어로서 유클리드 기하의 연역적 체계를 다루되 명제나 증명의 발견의 과정이 간과되지 않도록 정리의 발견과 증명에 학습자의 능동적인 참여를 가능하게 하는 것으로 나타나고 있다. 그러므로 학교 수학에서 기하 영역 지도에 있어서 탐구형 소프트웨어의 활용은 그 범위와 깊이를 확장시켜 줄 수 있다.

제 7차 수학과 교육과정은 이전의 어느 때보다 공학적 도구의 활용을 적극 권장하고 있다. GSP는 Taylor의 분류에 따르면 학습자와의 관계에서 컴퓨터를 개인교수(tutor)와 도구(tool)의 두 가지 역할로 사용이 가능하게 한다(Taylor, 1980). GSP를 파워포인트 등과 연계하여 개인이나 집단을 대상으로 하여 설명을 위한 제시용, 즉 직접적인 교수를 목적으로 사용이 가능하다. 그러나 본 연구에서는 사용자가 수학 탐구나 문제해결을 위한 도구로 사용하는 환경을 조성하였다. 수학 수업에서 문제해결이나 탐구를 목적으로 소프트웨어를 활용한다고 할 때 몇 가지 전제되어야 할 사항들이 있다.

첫째, 귀납추론에 관한 교사들의 가치 인식이 선행되어야 한다. 수학교육에서 소프트웨어의 활용은 수학활동에서 귀납추론의 중요성을 인식하는 데서 출발한다. 즉, 추측과 발견이 수학교육의 중요한 요소임을 전제로 한다는 것이다. 본 연구에서 예비 수학교사들은 순수 연역적 사고가 우선적이라 생각하여 가능한대로 소프트웨어의 활용을 매우 자제하고 있었다. 사후 면담결과 학생들은 기하문제를 해결하는데 소프트웨어의 도움을 받는 것이 수학적인 태도가 아니며 적절하지 않는 것으로 생각하고 있었다. 이러한 인식은 변화되어야 한다. 연역적 사고가 중요하며 발견의 결과들은 결국은 연역적으로 증명이 되어야 한다. 그러나 귀납적 탐구활동의 가치를 크게 고려하지 않는 경우 공학적 도구의 활용은 교사의 설명을 보조하는 제시용의 보조 도구로만 사용될 것이며 그러면

학생들은 여전히 유클리드 기하에서 정리나 증명이 발견되기까지의 고뇌를 경험하지 못할 것이기 때문이다.

둘째, 탐구용 소프트웨어들이 효과적으로 문제해결에 활용될 수 있는 적절한 문제들이 제시되어야 한다. 그 이유는 모든 경우에 소프트웨어가 유용한 것은 아니기 때문이다. 본 논문에 수록되지 않았으나 이 연구의 일부로 개발된 자료들은 이러한 면에서 기여하게 될 것이다. 동일한 소프트웨어라 할지라도 교과 내용(Roberts와 Stephen, 1999)과 활용 방법(Connell, 1998)에 따라 컴퓨터 소프트웨어의 활용 효과가 다르다는 연구 결과는 교육과정에 컴퓨터 도입을 논의할 때, 내용별로 구체적인 활용 방안들 개별적으로 논의되어야 함을 시사한다. 그러므로 수학의 모든 영역에서 소프트웨어를 사용할 때 수학적으로 의미있는 새로운 내용과 기존 내용에 대한 새로운 접근 방법 등 다양하고 풍부한 수학적인 사고를 경험할 수 있도록 풍부한 자료 개발이 여러 분야에서 필요하다.

세째, 탐구용 소프트웨어를 활용하는 경우 사용자가 소프트웨어야 대한 활용 방법을 충분히 익혀야 한다. 도구를 다루는 자체가 미숙한 경우에 소프트웨어가 도구로서의 역할을 담당하지 못할 것이기 때문이다.

참고문헌

강순자, 고상숙 (1999). 공간능력을 신장하기 위한 기하학습자료개발: GSP를 이용한 정다면체 구성. 수학교육학 연구발표대회 논문집 (대한수학교육학회 추계), 493-505

고상숙 (1997). 컴퓨터를 이용한 기하학습과정. 수학교육학 연구발표대회 논문집(대한수학교육학회 추계), 255-261.

나희경, 박종률 (1999). GSP를 이용한 공간도형 지도. 수학교육학 연구발표대회 논문집 (대한수학교육학회 추계), 255-286.

류희찬 (1998). 탐구형 소프트웨어를 활용한 '열린' 수학교육. 열린수학교육의 이론과 실제: 수학교육학 연구발표대회 논문집(대한수학교육학회 수학교육 연구 발표회). 167-181.

류희찬, 조완영 (1999). 탐구형 소프트웨어를 활용한 기하학습내용의 구성방안 탐색. 수학교육학 연구발표대회 논문집(대한수학교육학회 추계), 227-253

신동선, 류희찬 (1998). 수학교육과 컴퓨터. 경문사.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부

이정열 (1999). Geometer's Skechpad 활용 학습자료 적용을 통한 평면기하학습의 효과: 중학교 2학년을 중심으로. 한국교원대학교 대학원석사학위논문

장경윤 (1995). 역동적인 기하 학습을 위한 소프트웨어의 특징. 1995년 전국 수학교육 연구발표회 프로시딩 (1995. 5. 13, 서원대학교), 169-172.

전영국 (1999). 수학교육용 소프트웨어의 활용에 관한 질적연구. 학교수학(대한수학교육학회지), 제 1권, 제 2호, 433-449

전영국과 주미 (1998). 기하문제해결에서의 GSP를 활용한 탐구학습신장. 대한수학교육학회 논문집, 제 8권, 제 2호, 605-620.

Benett, Dan. (1996). *Exploring geometry with the Geometer's Sketchpad.* Berkely, CA: Key Curriculum press.

Connell, M. L. (1998). Technology in Constructivist Mathematics Classrooms. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching,* 17(4) 311-38.

Hoyles. C. (1987). Geometry and the computer environments, In J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran, (Eds), *Proceedings of the Eleventh International Conference of PME, vol. 2,* 60-66.

Manoucherhri, A. Enderson, M., & Pugnucco, L. (1998). Exploring geometry with technology. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(6), 436-442.

MSEB & NRC (1989a). *Everybody Counts.* Washington, D.C.: National Academy Press

MSEB & NRC (1989b). *Reshaping School Mathematics: A Philosophy and framework for Curriculum.* Washington, D.C.: National Academy Press.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School mathematics.* Reston, VA.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA.

Robert & Stephen (1999). Moving Instruction to the Web: Writing as Multi-Tasking. *Technical Communication Quarterly.* 8(3), 319-36.

Thom, R (1970). Modern Mathematics: Educational and Philosophical Error? In T. Tymoczco. (ed.). (1998). *New directions in the philosophy of mathematics.* Priceton, NJ: Princeton University Press. pp.67-78.

Developing Exploratory Activities with Geometer's Sketchpad and Its' Efficacy on Geometric Reasoning of College Students

Chang, Kyung Yoon (KonKuk University)
Whang, Woo-Hyung (Korea University)
Lee, Joong Kwoen (Dongguk University)

This study was designed to develop investigation- and exploration- activities on Euclidean geometry with an exploratory type software, Geometer's Sketchpad, and to gain insights into the geometric reasoning abilities of college students working with the software. A package of Euclidean geometric activities with GSP was developed and four college students worked on the several activities with GSP and their geometric reasoning process were analyzed.

Results indicated that GSP helped students solve problems in the several ways: to make conjectures and discover theorems by providing precise construction and measurement; to discover their proofs by providing the visual images and its manipulation; and to make students easily apply "what-if" strategies and expand and deepen their activities. Students' geometric reasoning was highly depended on analytic methods and their abilities with synthetic methods were shown very limited.