大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 11 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XI, No.1, 113-121. July 2001

수학교육에서 직관적 모델에 관한 연구

이 대 현*

Ⅰ. 서론

"A=B, B=C이면 A=C이다" 또는 "모든 자연수는 후자를 갖는다" 등은 어떤 정당화나 형식적인 증명을 필요로 하지 않는 자명한 진술이다. 이와 같이, 어떤 진술이나 사실을 즉각적이고 자명한 사실로 인식하게 하는 것은 직관의 힘에 의한 것이다.

이러한 직관은 참된 지식의 원천으로 인식되기도 하고, 현상의 본질에 다다를 수 있는 정신 전략으로 받아들이기도 하며, 또한 그릇된 개념을 야기시키는 근원으로 인식되기도 한다 (Fischbein, 1987). 특히, 수학과 과학의 역사에서 직관은 지식을 산출하는 창의적인 활동의 필수조건으로 인식되고 있다(Poincare, 1905; 1908).

문제해결 과정이나 추론 과정에서 어떤 개념을 이해할 수 없을 때, 그 개념을 쉽게 이해하거나 문제해결에 직접적인 도움을 얻기 위하여 이 개념을 대체할 수 있는 대안물이 요구되는데, 이 대안물을 직관적 모델이라고 한다.

수학학습에서 직관적 모델은 발견의 도구로 이용되며, 생산적이고 창의적인 학습을 위한 강력한 원천이 될 수 있다. 이를 위하여, 모델들은 본질적으로 발견적이어야 한다(Fischbein, 1977). 이것은 주어진 문제가 모델에 관련된 형태로 전환된 후에, 단지 모델 그 자체의 규칙과 요소에 의해 문제의 해에 이를 수 있음을 의미한다.

직관적 모델에는 다이어그램 모델, 유추 모델, Paradigm 모델 등을 들 수 있다. 이들은 발견술적인 장치로서 유용하기 위하여 여러 가지 특징을 가져야 한다.

먼저, 모델은 높은 수준의 자연적이고, 일관되며, 원형과의 구조적인 대응을 나타내어야 한다. 또한, 인간의 정보처리 특징(공간적, 시각적 표현, 행동적 조작, 유한성 등)과 관련되어야 한다. 그리고 모델은 원형에 대하여 상대적 자율성을 갖추어야 한다(Fischbein, 1987). 이러한 특징으로 인해, 수학학습에서 직관적 모델은 추론 과정이나 문제해결 과정에서 유용한 해결 전략을 제공한다.

이에, 본 고에서는 수학교육에서 직관적 모델이 갖는 의의를 파악하고, 수학학습에서 직관적 모델의 역할과 구축 방안을 알아보고자 한다. 먼저, Ⅱ장에서는 직관적 모델의 의의와 직관적 모델의 역할에 대하여 알아보고, Ⅲ장에서는 다양한 직관적 모델의 종류에 대하여 알아본다. Ⅳ장에서는 시각화와 직관적 모델 사이의 관계에 대하여 알아보고, 끝으로 직관적 모델을 이용한 무한 등비급수의 합을 구하는 예시를 통하여 직관적 모델의 활용의 예를 들고자 한다.

* 전주공업고

Ⅱ. 직관적 모델의 의의

사람의 인지는 모호하거나 추상적인 개념, 원리, 법칙보다는 구체적이고 사실적이며, 직관적으로 수용 가능한 것들에 익숙하다. 그러나, 우리 주변의 사물이나 현상 등은 때때로 직접적인 접촉에 의하여 쉽게 이해되어지지 않는 것들이 많이 있다. 또한, 물리적인 현상이나 수학적인 개념, 원리, 법칙 등도 마찬가지로 그 자체로는 직접적인 인식을 통한 이해의 범주를 넘는 것들로 가득 차 있다.

이런 경우에 우리가 직관적으로 받아들일 수 없는 개념들을 직관적으로 수용할 수 있도록 매개체를 만들어 내게 되는데, 이 매개체를 직관적 모델이라고 한다.

일반적으로 모델은 원형보다 인간의 사고의 성격에 보다 잘 적응되어지며, 원형의 추상적이거나 불확실한 것 그리고 암시적인 것 보다 구체적이고 확실하며 실용적으로 다루기가 편리한 특성을 가진다. 그러나, 모델은 원형에 대하여 특징이나 관계, 과정 면에서 원형이 갖는 정보를 갖추어야 한다.

이런 면에서 직관적 모델이 갖추어야할 조건을 다음과 같이 열거할 수 있다(Fischbein, 1977, 1987).

첫째, 모델은 원형과의 동형구조를 바탕으로 원형에 충실하여야 한다. 두 체계가 동형구조를 가진다는 것은 한 체계에서 만들어진 해나 개념이 다른 체계에서도 그대로 반영됨을 의미한다. 또한, 그 역도 성립한다. 그러므로 원형과 동형인 모델을 이용하며, 원형의 관점에서 다루어질 문제나 개념을 모델의 관점에서 해석함으로써 쉽게 주어진 목적에 도달할 수 있다.

둘째, 모델은 원형에 대하여 상대적인 자율성을 갖고 있어야 한다. 자율성을 갖는 모델은 원형에 의해 제기된 문제를 해결하기 위하여 단지 모델에만 의존할 수도 있다. 그러나 때때로, 원형에 적절하지 않은 모델의 속성으로 인하여 모델에서의 해석이 원형의 본질에 대한 왜곡을 초래할 수도 있다. 예를 들어, 점은 추상이고 차원이 없는 실체라고 정의한다. 그럼에도 불구하고 수학의 역사에서 점에 대한 오개념을 야기 할 수 있는 모델들이 사용되어졌다. 이러한 점의 모델을 "두 점은 한 직선을 결정한다"와 같은 명제를 이해하는데 적절한 도움을 주지만, "길이가 다른 두 선분 위의 점들의 집합들이 서로 동치이다"라는 사실을 학습자들이 직관적으로 받아들이기 어렵게 한다.

셋째, 모델은 인간의 정보처리 특성과 부합되어야한다. 문제해결자가 직관적 모델을 이용하여 문제를 해결할 때, 모델은 해에 대한 영감을 주기도 하고, 암시를 주기도 한다. 모델을 통하여 얻어지는 해에 대한 영감의 촉발은 직관적 모델이 인간의 자연적인 정신구조에 적합하여야 가능하다. 인간은 공간적이며 시각적인 표상을 선호하고, 무한보다는 유한적인 개념을 쉽게 인지한다. 따라서, 직관적 모델도 이러한 특성을 갖추어야 하고, 이러한 측면에서 개발되어야 한다.

이와 같은 특성을 갖춘 직관적 모델은 문제해결이나 생산적인 사고 과정에서 중요한 역할을 한다. 이것은 추상적이고, 불확실하며, 우리의 사고의 폭을 넘는 무한의 대상을 사고하는 것보다 쉽게 지각할 수 있고, 구체적으로 다루고, 우리의 사고 영역 내에서 다룰 수 있는 도구를 이용하는 것이 문제해결이나 사고에 유용함을 의미한다.

수학적 개념의 형성에서 그 개념의 정확한 의미를 파악하기 위하여, 가능한 다양한 구체물을 제시하는 것이 좋다(Dienes, 1960). 이 같은 '지각적 다양성의 원리'의 측면에서, 직관적 모델은 수학적 개념을 구체적이고 다양하게 변

화시킴으로써 학생들의 수학 학습에 중요함을 암시한다.

III. 직관적 모델의 종류

모델은 추상적 모델과 직관적 모델로 구별할 수 있다(Fischbein, 1987). 로케트를 쏘아 올릴 때 t초 후의 로케트의 높이를 나타내는 2차 함수식과 같이, 수학적인 관계를 나타내는 공식이나 함수들은 구체적인 실제 현상에 대한 추상적인 모델이다.

직관적 모델은 벡터의 크기를 나타내기 위하여 유향선분을 이용하거나, 확률, 조합문제를 해결하기 위하여 수형도를 이용하는 것과 같이 지극히 감각(특히, 시각)에 의존하는 모델이다. 주로, 직관적 모델은 실제 현상을 직접적으로 반영하는 것이 아니고, 실체의 추상적인 해석, 즉 추상적 모델에 근거를 둔다. 이 관계를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

실제현상	---->	추상적 모델	---->	직관적 모델
낙하하는 물체의 현상	---->	이차함수	---->	그래프

그러나, 직관적 모델이 항상 추상적 모델에 바탕을 두는 것은 아니다. 복소수의 합을 나타내기 위한 평행사변형 모델은 형식적인 정당화가 이루어지기 전에 수학자들이 발견한 사실을 직관적으로 이해하는데 도움을 준다. 이 모델은 복소수 연산의 합리성을 인식할 수 있도록 하기 위하여 기하학적 표현으로 직접 고안해낸 모델이다.

직관적 모델에는 유추 모델, 다이어그램, Paradigm 모델 등을 들 수 있다.

1) 유추 모델

유추 모델은 원형과 모델이 서로 다른 두개의 체계에 각각 속하는 모델이다. 유추는 두 체계간에 공통적이고 구조화된 닮은 점이 있다는 면에서 평범한 닮음과 구별된다. 이것에 대하여 Gick과 Holyoak은 다음과 같이 진술하고 있다.

> 유추하는 사고의 본질은 사상-한 정보가 갖는 측면사이에 일련의 일대일 대응을 찾는 것-의 절차에 의하여 한 상황에서 다른 상황으로 지식을 전이시키는 것이다
>
> (Gick & Holyoak, 1983, p. 2).

유추 모델은 두 체계간의 외형적인 닮음을 고려하면서, 서로간의 공통적이고 구조적인 성질을 확인하려 한다. 그러나, 모든 성질이 서로 공통적일 필요는 없다. 또한, 유추가 항상 겉의 닮음에 근거하지는 않는다.

수학에서 유추 모델은 수학적 추론 활동에 자주 등장한다. 한 학생이 직사각형의 넓이가 (밑변)×(높이)임을 안다면, 그는 이 풀이의 원리를 평면도형의 밑변의 길이를 입체도형의 밑면의 넓이가 되는 각기둥이나 원기둥의 부피에 자연스럽게 확장할 수 있다. 비슷한 유추적 전이가 삼각형에서 각뿔이나 원뿔로, 사다리꼴에서 각뿔대나 원뿔대로 일어날 수 있다.

그러나, 유추 모델은 수학 학습에서 그릇된 개념의 원인이 되기도 한다. 반점으로서 점을 인식하거나 띠로서 선을 인식하는 유추모델은 선분의 길이가 다른 두 선분 위의 점들이 일대일 대응이라는 사실을 받아들이는데 어렵게 한다. 점이 실제적으로 물리적 반점이라면 길이가 긴 선분이 더 많은 점을 갖고 있게 된다. 그러나, 유추 모델에서 이용된 점은 물리적 존재가 아니기 때문에, 우리는 형식적인 추론을

통해서 선분의 길이가 다른 두 선분 위의 점들이 일대일 대응이라는 사실을 이해해야 한다.

2) 패러다임 모델

삼각형에 대하여 지도할 때, 우리는 정삼각형이나 직각삼각형과 같은 특정한 형태의 삼각형의 특성에 치우쳐서 삼각형의 성질을 언급하지 않는다. 오히려 삼각형의 일반적인 성질을 파악하기 위하여 임의의 예각 삼각형을 주로 선택한다.

이와 같이, 어떤 개념의 의미를 파악하거나 해석할 때, 중요한 역할을 하는 예시나 고려되는 대상의 하부 모임을 패러다임 모델이라고 한다.

그러나, 패러다임 모델이 단순한 예시는 아니다. 또한, 모든 예시나 모델이 반드시 패러다임 모델은 아니다. 이것은 어떤 개념의 일반적인 성질을 정의해야 할 때, 우리는 그 개념의 패러다임 모델인 특별한 예시에 의해 그 개념의 성질을 조작하고 영감을 받아야 하며, 또한 패러다임 모델을 전체 모임의 대표로 받아들여져야 함을 의미한다.

패러다임은 Kuhn이 사용한 의미와 비슷하다. "이 용어를 선택함으로서 나는 실제 과학의 몇몇 인정된 사례들이-법칙 · 이론 · 응용 · 기기법 등을 모두 포함하는 사례들-그로부터 과학연구의 특정한 정합성의 전통이 생겨나는 모델을 제공한다는 것을 시사하고자 한다(Kuhn, 1962, p. 10)." 단지, Kuhn의 경우는 사회-역사적 측면에 이 용어를 사용하였고, 패러다임 모델의 경우는 개인적이고 주관적인 경험을 주로 언급한다. 두 경우 모두 언어학적 의미로는 보편성의 과정을 지원하는 모델과 예시를 의미한다.

수학적 추론이 과정에서 패러다임 모델이 어떤 역할을 하는가에 대하여 Hershkowitz와 Vinner의 연구는 좋은 예가 된다(Fischbein, 1987 재인용). 다양한 삼각형에서 삼각형의 높이를 구하도록 요구받은 학생들 중에서 이등변삼각형의 경우는 정답률이 높은 반면, 직각삼각형이나 높이를 나타내는 선이 삼각형 외부에 있는 경우의 정답률은 매우 낮았다. 이것은 삼각형 높이에 대한 개념이 특별한 표상에 근거하여 그들의 인지적 결정에 강한 영향을 미치고 있음을 의미한다.

때때로, 학생들이 어떤 정의를 명확히 안다고 할지라도 이 정의에 관련된 패러다임에 의해 부과되는 속박을 끊지 못한다. 이것이 문제해결의 오류의 원인이 되기도 한다. 예를 들면, $x+yi$가 복소수의 일반적인 형태이며, $y=0$일 수 있다는 것을 알면서도 2나 -5 같은 수가 복소수라는 것을 받아들이는 것을 꺼려하며, 자연수와 정수로 생각하려 한다.

그렇지만, 패러다임은 직관적 이해의 원천으로서 중요한 역할을 한다. 패러다임은 생산적 사고의 원천이다. 문제는 패러다임에 의해 제안된 개념의 경계가 사람의 경험이나 정보에 따라 다를 수 있다는 것이다. 그러므로 학생들은 개념의 의미와 더불어 정의에 대한 정확한 학습이 이루어져야 한다. 또한, 개념이 관계된 패러다임을 확인하고, 그 개념에 부착된 개인적 표상과 정확한 정의 사이의 비교를 통하여 패러다임과 정의의 일반성과의 관계를 일치시키도록 해야 한다.

3) 다이어그램 모델

다이어그램 모델은 하나의 개념 체계인 원형에 대하여, 이 원형의 이치에 맞게 인위적이고 의도적으로 만들어진 모델을 의미하며, 벤다이어그램, 수형도, 히스토그램 등이 이에 속한다. 특히, 다이어그램 모델은 직관적 인지의 전체

성과 즉시성에 기여한다.

다이어그램은 원형과 동형이며, 또한 원형에 비해 상대적 자율성이 뛰어나므로 문제해결에서 발견적인 모델로 이용되어 진다. 즉, 우리가 어떤 상황에서 주어진 문제를 다이어그램으로 변형하여 해결한 후 다시 주어진 상황에 맞게 해석할 수 있다.

벤다이어그램은 집합 사이의 관계, 연산, 성질 등에 대한 직접적인 시각적 표현을 제공한다. 그렇지만, 벤다이어그램을 집합론에 풍부하게 이용하기 위해서는 벤다이어그램이 표현하는 개념의 의미를 명확하게 파악해야만 한다. 예를 들어, 부분집합에서 이용되는 '속한다'는 용어는 일상에서 사용되는 실제적 의미와 같은 의미로 쓰지 않는다. A⊂B는 A＝B일 때도 A는 B에 '속한다'는 의미로 쓰이지만, 실제로는 이렇게 쓰이지 않는다. 부엌은 집의 부분집합이지만, 부엌은 집의 성질을 갖지 않으며, 부엌이 동시에 부엌이거나 집은 아니다.

그러므로, 벤다이어그램의 이용은 직관적인 표현과 더불어 집합론에서 이용되는 개념과 관계들의 능동적인 이해가 동시에 요구된다. 이용되는 개념에 대한 충분한 이해가 선행되지 않으면 오히려 벤다이어그램의 이용에 더 어려움을 느낄 수도 있다.

순열의 문제를 해결하기 위해 유용한 모델로 수형도가 이용되어진다. 그렇지만, 수형도를 이용하기 위해서는 각 원소가 부채꼴 모양으로 배열된다는 개념적 이미지를 배워야 한다. 또한, 얻어진 수형도에서 가능한 모든 배열의 모임을 찾을 수 있도록 학습해야 한다. 단지, 수형도만이 순열 문제해결의 열쇠는 아닌 것이다.

그래프는 원형과 모델사이의 직접적인 유사성이 없으며, 원형의 성질에 의한 관념에 의해 변환되는 다이어그램 모델이다. 예를 들면, 위로 쏘아 올린 물체의 실제적 현상과 이를 표현한 그래프 사이에 직접적이거나 감각적인 유사성은 없다. 그러나, 적절한 공리에 의하여 수들의 체계와 도형의 체계가 모순적이지 않고 내적으로 일관된 방법으로 변환되어진다. 사실 두 체계는 상호 독립적이지만 완전히 동형구조를 이룬다.

그래프를 이용하면 어떤 현상의 직관적 이해를 얻는데 유용하다. 그러나, 반대로 그래프가 갖는 내재적 특성(도형 체계)은 그 자체가 도형으로 표현되기 때문에 잘못된 해석의 근원이 되기도 한다. Janvier(1981)는 트랙을 운행하는 차의 속도와 거리에 관한 그래프 해석에서 피험자(중등학교 학생)들이 트랙의 구조와 그래프의 구조사이의 유사성으로 인하여 차의 속도와 거리에 관한 그래프에서 트랙의 구조를 이끌어 내는 질문에 어려움을 느낀다는 것을 발견하였다. 이것은 때때로 피험자가 경험한 수준에서 직관적 해를 구하는 것이 불가능한 예이다. 따라서, 그래프의 해석은 그 요소의 명확하고 체계적인 개념적 분석과 원형의 입장에서 각각의 의미를 파악해야 한다.

Ⅳ. 직관적 모델과 시각화

수학은 어떤 수학적 대상을 추상화하는 과정과 추상화에 의해 형성된 개념을 다루는 학문이다. 이러한 수학의 추상성의 특징으로 인해 수학적 개념은 학생들에게 쉽게 인식되어지지 않는다. 그러므로 수학 학습지도에서 추상적인 수학적 개념을 다룰 때, 구체물이나 지각의 인식에 도움이 되는 매개체를 이용하는 것은 효율적인 방안이 될 수 있다.

시각화는 이러한 의미에서 추상적인 수학적 지식, 개념, 원리, 법칙을 지도하는데 효과적인

방안의 하나이다. 수학적 시각화는 모호한 종류의 직관이나 이해에 대한 표면적인 대응이 아니라, 이해에 깊이와 의미를 주고, 문제해결에 믿음직한 안내자를 제공하며, 창의적인 발견을 고취시키는 마음의 눈에서 형성된 그림을 통한 직관이다(신동선, 류희찬, 1998).

공리주의의 창시자 Hilbert조차 "이중부등식 $a > b > c$와 함께 '사이에 있다'는 아이디어에 대한 기하학적 그림으로 직선 위에서 연속된 세 점의 그림을 항상 사용하지 않는 사람이 있겠는가? 함수의 연속성이나 집적점의 존재에 대한 어떤 어려운 정리를 완전히 엄밀하게 증명하도록 요구될 때 거듭 축소되는 선분이나 직사각형의 그림을 이용하지 않는 사람이 있겠는가?(Fischbein, 1987, p. 17 재인용)"라고 말하며, 수학적 개념의 시각화를 바탕으로 한 이미지의 역할을 강조하였다.

이러한 의미에서, 시각화에 주된 역할을 하는 것이 직관적 모델이다. 예시한 여러 가지 직관적 모델들은 거의가 우리 감각의 하나인 시각화에 의존하고 있다. 시각화에 의한 직관적 모델은 특히, 수학과 과학 분야에서 때때로 창의적인 활동에서 중요한 역할을 수행해 왔다. 이에 대한 예시로 육각형 구조인 벤젠 분자의 원자의 배열을 발견한 Kekule의 일화를 들 수 있다. 문제에 대하여 집중하려고 시도하면서 그는 몇 년 동안 방황했다. 1865년 어느 오후에 그는 원자를 상상하고 다음과 같이 썼다.

> ......나의 눈앞에 요술을 부리고 있다. ..... 내 마음의 눈은 유사한 종류의 반복된 광경에 의하여 격렬하게 되었고, 다른 형태의 긴 사슬의 큰 구조를 구별하게 되었다. 그들 대부분은 가깝게 있었다; 모든 것은 뱀과 같이 움직였고, 꼬여 있었다. 갑자기 이것이 무엇이지? 뱀 한 마리가 그의 꼬리를 잡게 되었고, 전체 구조는 내 눈앞에서 흉내내듯이 꼬여 있었다. 빛에 의해 느끼듯이 나는 일어났다
>
> (Fischbein, 1987, p. 105 재인용).

이것은 벤젠 분자의 원자 배열과 유사한 구조인 고리와 같은 아이디어이다. 위의 예시와 같이, 문제해결 과정에서 문제를 해결하려고 노력하는 동안 번쩍이는 통찰에 의해 문제해결의 단서를 제공하는 것은 시각화에 바탕을 둔 직관적 모델의 힘인 것이다.

Ⅴ. 무한 등비급수의 직관적 모델 구축

직관적 모델의 본질적인 역할은 a)어떤 주어진 사실의 해석을 촉진시켜 주거나, b)원형의 사실에 따른 문제를 해결하도록 도와주는 것이다(Fischbein, 1977). 따라서, 모델은 발견술적 능력을 갖추어야 하고, 생산적 사고를 위한 생생한 요소들로 구성되어져야 한다. 문제해결에 유용한 모델이 되기 위하여, 직관적 모델은 그 자체로서 발생적이고, 내적으로 일관되고, 내적으로 잘 구조화되어져야 한다. 이것을 좀 더 자세히 살펴보면 다음과 같다.

먼저, 직관적 모델은 발생적이고 내적으로 일관되어야 한다. 정수의 개념과 산술적인 연산을 위한 모델로서 수직선이 이용되어진다. 수직선은 정수의 덧셈의 연산을 나타내거나, 정수를 수직선에 나타낼 때 유용하다. 때로 ½과 같은 유리수를 쉽게 나타낼 수 있다..

그러나, 좀 더 복잡한 유리수나 무리수의 경우는 정확히 점을 표시할 수 없으며, 이 때문에 정확하게 덧셈을 나타낼 수 없다. 유사한 경우는 곱셈의 경우에도 나타난다. 3×4 에서 적용되는 규칙이 $(-4) \times (-3)$의 경우에는 적용되

지 않으며, 새로운 관례를 세워야만 한다. 이런 면에서, 정수를 나타내기 위한 수직선 모델은 내적으로 일관되지 않았다.

반면에, "1, 2 두 숫자를 이용하여 얻을 수 있는 3 자리수는 몇 개인가?" 라는 질문은 수형도를 이용하여 쉽게 해결된다. 원형에 의해 제기된 문제는 직관적 모델에서의 문제로 바꾸어지고, 문제는 단지 모델에 의해 성공적으로 해결된다. 그리고 마지막 결론은 다시 원형에 대하여 해석하는 것이다. 여기에 이용된 관례는 예시한 문제와 같은 류에 속하는 모든 문제에 그대로 적용되어진다. 이와 같은, 발견술적인 직관적 모델은 내적으로 일관되고, 발생적이다(Fischbein, 1977).

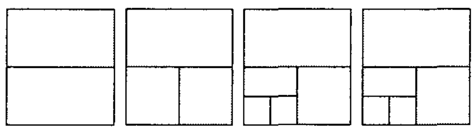
다음으로, 직관적 모델은 내적으로 구조화되어야 한다. Klein 4원군은 내적으로 구조화된 성질을 갖는 직관적 모델의 예이다(Fischbein, 1977). Klein 4원군은 평면 위에 있는 직사각형(정사각형이 아님)을 공간 변형으로 생각할 때, 이 직사각형의 중심 O를 지나는 직선을 축으로 하는 삼차원 공간의 회전 중에서 이 직사각형을 그 자신에 겹치도록 하는 회전 전체의 집합이다.

Klein 4원군은 주어진 모델을 통하여 시각에 의한 조작으로 직관적 이해가 가능하다. 이 모델은 대칭이동에 기초를 두고 있으므로, Klein 4원군의 원소들의 연산은 대칭이동으로부터 자연적으로 추출되어진다. 특히, 군의 원소들은 직관적 모델에 의한 대칭이동 법칙에 따라 연산에 대하여 닫혀있으며, 형식적으로 구조화된 체계를 이룬다. 이와 같이, Klein 4원군의 직관적 모델은 내재적으로 구조화된 특징으로 인해, Klein 4원군의 형식적 관계를 직관적으로 이해할 수 있게 한다.

기술한 바와 같이, 그 자체로서 발생적이며, 내적으로 일관되고 구조화된 직관적 모델의 예로 무한 등비급수의 직관적 모델을 예시하면 다음과 같다. 시각화한 방법을 이용한 직관적 모델을 이용하면 무한 등비급수의 합을 산술적인 방법에 의존하지 않고 계산할 수 있다. 다음의 예를 보자.

아래 그림과 같이, 주어진 사각형을 이등분하여 하나는 색칠하고, 나머지 하나는 빈칸으로 남겨 놓는다. 이 과정을 한없이 계속하면 빈칸의 넓이는 점점 0에 가까워지고, 따라서 위 식의 값은 1이 됨을 알 수 있다.

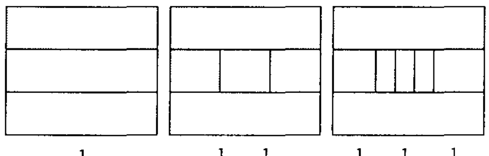
☞ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=1$



$\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$ $\quad$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}$ $\quad$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}$

아래 그림과 같이, 주어진 사각형을 삼 등분하여 하나는 색칠하고, 하나는 남겨두고 나머지 하나를 삼 등분한다. 이 과정을 한없이 계속하면 색칠한 부분의 넓이는 원래 사각형 넓이의 반이 되고, 따라서 주어진 식의 값은 ½이 됨을 알 수 있다.

☞ $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots=\frac{1}{2}$



$\frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}$ $\quad$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}$

아래 그림과 같이, 주어진 사각형을 사 등분하여 하나는 색칠하고, 두 개는 남겨두고 나머

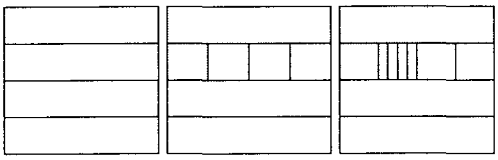
지 하나를 사 등분한다. 이 과정을 한없이 계속하면 색칠한 부분의 넓이는 원래 사각형 넓이의 ⅓이 되고, 따라서 주어진 식의 값은 ⅓이 됨을 알 수 있다.

또한, 위의 세 가지 예를 통하여

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\cdots=\frac{1}{n-1}$$

이 됨을 알 수 있다.

☞ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots=\frac{1}{3}$



$\frac{1}{4}$　　　$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}$　　　$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}$

Ⅵ. 결론

수학은 어떤 수학적 대상을 추상화하는 과정과 추상화에 의해 형성된 개념을 다루는 학문이기 때문에, 학생들은 수학적 개념을 쉽게 이해하지 못한다. 그러므로 수학 학습지도에서 추상적인 수학적 개념을 다룰 때, 구체물이나 지각의 인식에 도움이 되는 매개체를 이용하는 것은 효율적인 방안이 될 수 있다. 이에, 직관적 모델은 문제해결 과정이나 추론 과정에서 어떤 개념을 직관적으로 이해할 수 없을 때, 그 개념을 쉽게 이해하거나 문제해결에 직접적인 도움을 얻기 위하여 구안된다.

직관적 모델은 유추 모델, 다이어그램, 패러다임 모델 등을 들 수 있다. 일반적으로, 모델은 원형보다 인간의 사고의 성격에 보다 잘 적응되어지며, 구체적이고, 확실하며, 실용적으로 다루기가 편리한 특성을 가진다. 또한, 모델은 발견술적 능력을 갖추어야 하고, 생산적 사고를 위한 생생한 요소들로 구성되어져야 한다. 문제해결에 유용한 모델이 되기 위하여, 직관적 모델은 그 자체로서 발생적이고, 내적으로 일관되고, 내적으로 잘 구조화되어져야 한다.

이에, 본 고에서는 수학교육에서 직관적 모델이 갖는 의의를 파악하고, 수학학습에서 직관적 모델의 역할과 구축 방안을 알아보았다. 먼저, 직관적 모델의 의의와 직관적 모델의 역할에 대하여 알아보고, 다양한 직관적 모델의 종류에 대하여 알아보았다. 또, 시각화와 직관적 모델 사이의 관계에 대하여 알아보고, 끝으로 직관적 모델을 이용한 무한 등비급수의 합을 구하는 예시를 통하여 직관적 모델의 활용의 예를 제시하였다.

수학은 상급학년으로 나아갈수록 더욱 추상화되어짐으로써, 구체물이나 교구의 이용이 어려워진다. 따라서, 수학 개념의 이해를 돕기 위한 다양한 방안의 모색이 필요하다. 이에, 직관적 모델을 이용한 시각화 방법은 하나의 대안으로 제시될 수 있다. 직관적 모델은 수학 학습에서 발견의 도구로 이용되며, 창의적인 사고를 조장할 수 있는 발견술적인 장치로 여겨진다. 그러므로, 계속적으로 다양한 영역에서 직관적 모델의 구안에 노력해야 할 것이다.

참고문헌

신동선, 류희찬 (1998). 수학교육과 컴퓨터. 서울: 경문사.

Dienes, Z. P. (1960). *Building up mathematics*. Hutchinson Educational, LTD.

Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 8, 153-165.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach.* D. Reidel Publisching Company, Dordrecht Netherlands.

Gick, M. L., & Holyoak, J. K. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, 15, 1-38.

Janvier, C. (1981). Use of situations in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 113-122.

Kuhn, T. (1962). *The Structure of Scientific Revolutions(2nd ed.).* Chicago: University of Chicago Press.

Poincaré, H. (1905). *La Valeur de la Science.* 김형보 (역) (1983). 과학의 가치. 서울: 단대출판부.

Poincaré, H. (1908). *Science et Méthode.* 김형보, 오병승 (공역) (1982). 과학의 방법. 서울: 단대출판부.

A Study on Intuitive Model in Mathematics Education

Lee Dae-Hyun (Jeon-ju Technical High School)

The purpose of this paper is to investigate the significance and the role of intuitive model and the example of its development. Intuitive model is the tools of intuition in mathematics and the sources for the creative learning mathematics. It consists of the analogical model, paradigmatic model and diagrammatic model.

Intuitive model must have a number features in order to be really useful as heuristic devices. It must present a high degree of natural, consistent and structural correspondence with the original. It must also correspond to human information processing characteristics and enjoy a relative autonomy with respect to the original.

Sometimes, the difficulty in learning mathematics stems from the abstractive characteristics of mathematics. So, we have to assist students' learning using the intuitive model that reveals the concrete representation and various changes of mathematical concepts, rules and principles.