大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 11 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. XI, No.1, 89-102. July 2001

컴퓨터 환경에서 초등학교 기하 지도에 관한 고찰

이 종 영*

Ⅰ. 서론

1940년대 중반 컴퓨터가 발명된 이래로 컴퓨터는 사회의 모든 영역에 널리 사용되어 컴퓨터 없이는 하루도 살아갈 수 없는 시대가 도래하고 있다. 수학에서도 컴퓨터로 말미암아 연구 문제의 성격과 수학의 탐구방법이 변화되고 있다. 컴퓨터의 빠른 계산 능력과 시각적 조작 능력은 수학적 대상을 시뮬레이션 할 수 있는 실험실 환경을 제공한다. 또한 컴퓨터가 대량의 정보를 처리할 수 있게 됨에 따라 여러 학문 분야에서 정보의 분석에 요구되는 수학적 아이디어를 제공하는 새로운 분야의 수학, 예를 들면 이산수학 등이 새롭게 각광을 받고 있다. 뿐만 아니라 종래와 같은 연역적 증명이 아닌 방대한 사례의 처리 능력을 바탕으로 하는 새로운 종류의 증명이 받아들여지고 있으며, 컴퓨터의 그래픽 처리기능을 바탕으로 한 프랙탈과 같은 새로운 연구분야도 생겨나고 있다(Corune, 1991; NCTM, 1989).

또한 컴퓨터는 수학 교수-학습 과정에서 제기되는 여러 가지 어려움을 극복하기 위한 대안으로 생각되어 특히 기존 수학적 개념 지도의 어려움을 경감할 수 있는 방안에 대한 연구가 광범위하게 진행되고 있다. 컴퓨터의 다양한 기능, 특히 시각화 기능은 추상적인 수학적 내용을 시각화하여 지도할 수 있을 뿐만 아니라 그 시각화가 학생들의 직접적인 경험이나 통제를 통해 이루어질 수 있다는 점에서 수학 학습의 어려움을 완화시켜 준다. 이를 형식적인 증명이나 개념 학습의 전 단계에서 그래픽이나 애니메이션, 시뮬레이션을 통한 직관적인 탐구 활동은 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있다. 컴퓨터의 이용으로 산술교육을 종래의 계산 기능 위주에서 사고력 중심으로 옮겨갈 수 있게 되었다.

컴퓨터는 또한 기존의 여러 수학 교수 · 학습 이론을 쉽게 적용할 수 있는 환경을 제공하여 준다. 가령 수학을 지도할 때 한 가지 개념에 대한 다양한 표상을 제공하여 한다는 지각적 다양성의 원리와 지도하려는 개념을 구성하고 있는 요소 중 본질적인 요소는 그대로 두고, 비본질적인 부분은 다양하게 변화시키는 경험이 필요하다는 수학적 다양성의 원리를 컴퓨터 환경에서는 쉽게 구현할 수 있다.

이러한 변화와 희망으로 Bork(1980)는 2000년까지 거의 모든 교과 영역과 모든 수준에서 주요한 학습 방법이 컴퓨터와 상호작용을 통하여 가능할 것이라고 예견하였지만, 2000년이 지난 현재 우리의 수학 교육 영역에서 컴퓨터 활용은 미미한 상황이다. 1980년대 후반에 LOGO 언어가 국내에 도입되었지만 국내 초등학교에서 사용은 거의 전무한 것으로 보인다.

* 전주교육대학교

최근 들어 수학 학습을 개선하기 위해 현장교사들을 중심으로 Geometer's Sketchpad(GSP), Cabri Geometry 등과 같은 탐구형 소프트웨어들이 도입되어 수학 교수·학습에 이용하려는 움직임이 활발해지고 있으며, 초등학교에서도 이를 이용하려는 연구가 나오기 시작하였다(임근광, 1999. 하경미, 2001).

본 논문에서는 GSP와 같은 탐구형 소프트웨어의 배경이론이 되는 기존의 여러 수학 교수·학습 이론을 살펴보고, 컴퓨터를 효율적으로 사용할 수 있는 방법을 살펴본 후, 컴퓨터 환경에서 구현되는 도형의 특성과 이를 이용한 기하지도의 실제에 관한 분석을 하려고 한다.

II. 컴퓨터 기반 수학교수-학습 환경 배경 이론

1. Piaget의 반영적 추상화 이론

반영적 추상화는 논리-수학적 지식 획득의 심적 메카니즘이다. 피아제는 일단의 지각할 수 있는 대상으로부터 단지 그 공통성질을 이끌어 내는 것을 경험적 추상화(abstraction empirique)라고 부르고, 행동과 조작의 일반적인 조정으로부터의 추상화를 반영적 추상화(abstraction réflechissante)라고 부르고 있다(Beth & Piaget, pp.188-189). 피아제도 유치원과 초등학교의 수학교육에서 활동적 교수법의 중요성을 무엇보다 강조하고 있지만, 반영적 추상화에 내재하는 활동의 역동성은 유치원과 초등학교뿐만 아니라 모든 수준에서 수학 학습의 중심이 되어야 한다. 그러나 피아제심리학에 그 이론적 근거를 두고 있다고 주장하고 있는 많은 활동주의적 교수 학습 이론에서는 활동의 의미와 관련된 학습의 메카니즘에 대한 충분한 이해가 결여되어 있기 때문에 종종 단순한 경험론에 빠지는 경우가 있다고 한다(우정호, 1998, p.16-17). 대상에 대한 구체적 활동과 함께 혹은 그것 이상 중요한 것은 내적 재구성, 즉 행동과 그 결과에 대한 반성임을 간과해서는 안된다.

이와 같은 교수학적인 문제점이 컴퓨터 환경에서도 드러날 수 있다.

컴퓨터와 수학교육을 연구하는 학자들은 추상적인 수학 개념을 컴퓨터를 통해 구체화시키는 것으로서 컴퓨터의 유용성을 들고 있다. 그들은 컴퓨터는 구체적인 것과 형식적인 것을 분리하는 경계를 옮겨 놓으며, 형식적 과정을 통해서만 접근 가능한 지식이 컴퓨터를 통해 구체적으로 접근될 수 있다고 주장한다(Papert, 1980, p.21). 컴퓨터를 통해 제시되는 수학적 개념은 학생들의 직접적인 경험이나 통제를 통하여 다루어질 수 있어, 학생들의 학습의 어려움을 완화시켜 줄 수 있지만, 이런 대상에 대한 구체적 활동만 강조하고, 그것의 내적 재구성 그리고 그 결과에 대한 반성이 없다면, 반영적 추상화가 아니라 경험적 추상화가 일어날 가능성이 있다.

컴퓨터와 학생의 인터페이스가 너무 익숙하면 학생들은 자신의 조작 활동에 대한 명확한 인식 없이 학습이 이루질 수 있어 단순한 시행착오를 통한 학습이 될 수 있다. 가령 GSP에서 마우스를 통한 조작은 학생들이 어떤 행동으로 컴퓨터 화면상에 도출된 결과를 얻었는지 이해하는데 어려움을 줄 수 있다. 이는 메뉴의 'Undo' 항목을 클릭하여 자신의 행동을 재현함으로 어느 정도 극복될 수는 있으나 근본적인 처방은 되지 못한다. 따라서 컴퓨터를 이용한 수학 학습 환경에서 학생들이 자신의 이전 행동을 분명하게 인식할 수 있는 장치가 필요하다. 프로그래밍 환경에서는 학생들의 행동이

프로그램이라는 형태로 저장되고 이를 수시로 살펴볼 수 있기 때문에 자신의 이전 사고와 행동을 명확하게 인식할 수 있다. 따라서 GSP와 같은 탐구형 소프트웨어에서 대상의 조작을 '프로그램' 형태로 하게 되면 어느 정도 이 문제는 해결 될 것으로 보인다.

또한, 학생들의 정신적인 결정 과정이 이루어지고, 이를 마우스나 키보드를 사용한 실제적인 행동을 통해 컴퓨터를 조작하였을 때, 시각적 이미지가 나타나는 시간도 고려하여야 한다. 화면에 역동적인 시각적 이미지가 나타나는 시간이 빠르다면 학생들은 자신의 정신적인 결정과 화면의 피드백을 연결시키지 못하고 사고의 초점이 컴퓨터 화면상에만 주어지게 된다. LOGO에서 거북이의 속도는 아동의 인지 수준에 맞게 천천히 움직여서 아동들이 원하는 모양의 그림을 그려준다. 이처럼 컴퓨터 화면상에 수학적 대상과 정보가 출력되는 시간을 더디게 하여 학생들이 자신의 사고와 행동을 컴퓨터 화면상의 출력물과 관련시킬 수 있는 시간을 갖도록 하는 것이 모든 수학교육용 소프트웨어에서도 필요하다.

피아제의 인지발달 이론은 균형이론이며, 반영적 추상화도 균형화의 한 메카니즘이다. 이 관점에서 보면 탐구활동의 동기유발 요인은 불균형에서 찾지 않으면 안 된다. 불균형은 갈등을 초래하고 갈등은 주체를 자극하여 현재의 상태를 뛰어넘어 새로운 해결을 모색하려고 하는 몸부림이다. 불균형은 반영적 추상화를 강조한 재구성의 원천이 되는 것이다. 이 사고방식에 따르면 갈등을 야기하는 학습 상황이 수학 학습의 원동력이 된다. 이것이 시사하는 바는 컴퓨터가 수학 지도에 의미있게 사용되려면, 단지 어떤 사실을 컴퓨터를 통해 보여주는 것이 아니라 기존의 학생의 인지 구조 속으로 동화될 수 없는 교수학적 상황을 제공하여 학생들에게 인지적 갈등을 유발하고 이를 해소하기 위한 과정으로 수학 지도를 진행한다면, 피아제의 이론에 맞는 수학 학습에 근접할 수 있을 것이다.

아동이 컴퓨터 환경에서의 행동이 과연 '내면화되고 가역적인' 조작으로 구성되는지, 그렇지 않으면 단순히 '자극-반응적인' 행동으로 실행되는지의 여부는 피아제 이론을 교육에 접목시킬 때 중요한 관건이다. 언어는 대상의 특성을 내면화화는 수단이 되며, 언어는 인식을 촉진하는 기능을 가지고 있다(홍진곤, 1999). 따라서 학생들이 컴퓨터를 이용한 활동을 언어로 표현해보는 많은 기회를 가져 자신들의 활동을 내면화시킬 수 있는 기회를 제공하는 것이 중요하다.

2. Dienes의 수학 학습 원리

Dienes는 아동이 구체적 자료를 사용하는 놀이 활동에 기초한 수학 실험실적 접근과 관련된 수학교육 이론 정립에 결정적으로 기여하였다. 그의 이론을 뒷받침하는 네 가지 수학 학습 원리로 역동성의 원리, 구성의 원리, 수학적 다양성의 원리, 지각적 다양성의 원리를 제시하고 있다(Dienes, 1960; Lesh, Post & Behr, 1985).

Dienes의 학습 원리는 실제 교실 수업에 성공적인 영향을 끼치지 못하였는데, Lesh, Post & Behr(1985)는 그 이유로, 구체적 자료가 사용되더라도 교실 안에서의 시범 교수로만 사용되었고 따라서 학생은 구성자라기보다 수동적 관찰자 입장에 그쳤으며 사용되는 모델이 타당하지 못했다는 점, 그리고 Dienes 이론의 강조점인 '자료를 가지고 하는 활동의 반성'보다 구체적 자료의 사용에 지나치게 주목한 점 등을 지적하고 있다. 이를 피아제 이론을 빌려 표현

하자면, '반영적 추상화' 대신 '경험적 추상화'를 강조한 결과로 볼 수 있다.

특정 수학적 개념에 대한 다양한 경험은 그 개념을 학습하기 위한 훌륭한 토대가 될 수 있지만 학생들이 세계를 바라볼 때에는 자신이 소유하고 있는 상식과 직관을 사용하므로, 수학적 개념과 관련된 다양한 경험을 하더라도 학생들은 자기가 이미 알고 있는 것만을 바라볼 수 있기 때문에 우리가 학생들이 바라보기를 원하는 부분을 경험하지 못할 가능성이 있다(Fishbein, 1987).

특히 탐구형 소프트웨어의 이론적 배경으로 여겨지는 수학적 다양성의 원리는 지도하려는 개념과 관련된 필수적인 요소는 그대로 둔 채, 관련이 없는 비본질적인 요소는 다양하게 변화시키는 경험을 학생들이 하여야 한다는 것이다. 이 이론의 적용은 학생들에게 시각적인 경험의 제공이 필수적이다. 그러나 장 의존적 인지 특성을 지닌 학습자는 시각적 자료를 처리하는데 어려움을 갖고 있다. 그렇기 때문에 정보 해석에 필수적이고 중요한 부분을 색상을 이용하여 도드라지게 만들면 도움이 될 것이라고 생각하여 볼 수 있다. Dwyer와 Moore(1991)는 색상 처리(color coding) 실험을 통하여 색상 처리를 이용한 시각적 처리는 장 독립적 학습자와 장 의존적 학습들 사이에 나타나는 학습 성취도의 차이를 줄일 수 있다고 밝히고 있다. 그러나 Merrill과 Bunderson(1981)은 오용된 색상은 오히려 학습에 부작용을 일으킬 수 있음을 주목해야 한다고 지적하고 있다. 전달하고자 하는 화상정보의 핵심 부분을 강조하기 위해서 혹은 그림의 서로 다른 부분들 간의 구별을 위하여 색상을 사용하는 것은 분명히 효과적이지만 무조건 색상 처리가 장 의존적 학생들의 학습에 항상 큰 도움을 줄 것이라고 믿는 것은 잘못된 생각이다. 전달하고자 하는 학습 내용이 무엇인지를 분석하고 혹시 색상 처리가 학습 내용을 오도하거나 복잡하게 만들지는 않을지에 대해 세밀하게 검토하여 보는 자세가 필요하다. 이는 Dienes의 수학 학습 원리를 적용한 교수학습 자료를 컴퓨터 환경에서 구성할 때 반드시 염두에 두어야 할 사항이다.

또한 Dienes의 지각적 다양성의 원리는, 지각적으로는 다르지만 구조적으로는 동일한 다양한 구체적인 경험을 통해 개념을 형성해야 한다는 것이다. 이는 컴퓨터를 통해 지도하려는 수학적 개념을 제공하는 것뿐만 아니라 그전에 학생들의 비컴퓨터 맥락을 통해 주어진 수학적 개념을 제공하는 것이 필수적임을 시사하는 것이다. 가령 평행사변형의 개념을 컴퓨터를 통해 제공하기 전에 학생들은 나무젓가락 등 구체물을 이용하여 평행사변형을 만들어보거나 종이 위에 다양한 평행사변형을 그려보거나 살펴보는 경험이 필요하다. 그러나 학교 현장에서 컴퓨터가 이용되는 상황을 관찰하여 보면 교사는 시종일관 컴퓨터를 이용한 수학적 대상을 학생들에게 보여준다. 오늘날 수학교육의 문제점 중의 하나가 교실에서의 수학과 일상생활에서의 수학 사이에 커다란 괴리가 있다는 것이다. 또한 현장 교사, 예비교사, 초등학교 학생들을 대상으로 컴퓨터를 이용하여 수학을 지도하다보면 교실에서의 수학과 컴퓨터 환경에서의 수학을 별개로 여기는 경우가 종종 있다. 가령 로고 언어를 지도하면서 기본 명령어인 'FD'와 'RT, LT' 지도 후에 정삼각형을 그려보게 하는 과제를 제공하면 이들 중 몇몇은 정삼각형의 한 내각의 크기 60도임을 알면서도, 정삼각형을 그리기 위해 회전각을 45도를 사용한다. 이들이 정삼각형의 한 내각이 60도임을 모르는 것이 아니라 컴퓨터 환경에서 수학적 활동시 교실에서의 수학을 염두에 두지 않고 직관적인 판단이나 시각적인 판단으로 사

고 활동을 하고 있음을 시사하는 것이다. 따라서 컴퓨터만을 이용한 수학적 대상의 제공은 우리가 지도하려는 수학과 컴퓨터 환경에서 지도는 수학을 별개인 것으로 학생들이 취급할 가능성이 있다. 따라서 현장 교사는 수학적 대상을 컴퓨터에서만 보여주는 것이 아니라 비컴퓨터 맥락에서의 수학적 대상을 학생들에게 제공하여 주고, 두 수학적 대상이 공통의 구조를 가지고 있음을 학생들이 인식하도록 도와주는 것이 필요하다.

3. van Hiele의 기하 학습 수준이론

van Hieles에 따르면 수학적 사고 활동이란 경험의 세계를 조직하는 활동으로, 한 활동에서 경험을 정리하는 수단이 새롭게 경험의 대상으로 의식되어 그것을 조직화하는 활동이 이루어지면서 그 다음 수준으로의 비약을 하게 되는 과정을 반복하게 된다. 이는 <표 1>과 같이 요약된다.

<표 1> van Hieles의 기하 학습 수준 이론

	0	1	2	3	4
대상	주변의 사물	도형	성질	명제	논리
수단	도형	성질	명제	논리	

초등학교 저학년에서 기하지도의 목표는 시각적 수준(0수준)의 아동을 분석적 수준(1수준)으로 수준 상승을 시키는 것이다. 다시 말해 기본적인 도형을 그 구성 요소인 변이나 각, 꼭지점 등을 가지고 판단하는 것이 아니라 시각적 외관을 가지고 판단하는 아동이 그 도형의 기본 구성 요소를 가지고 사고하도록 이끌어주는 것이 목표이다. 이렇게 0수준에서 1수준으로 수준 상승은 로고 프로그래밍 과정이 효율적일 수 있다. 왜냐하면 로고에서는 그 도형을 이루는 구성요소인 변과 각에 주목하지 않고서는 도형을 그릴 수 없기 때문에 도형을 시각적 수준에서 파악하는 경향이 있는 학생에게 분석적 수준에서 도형을 바라보도록 하는데 일조할 수 있을 것이기 때문이다. 그러나 로고에서 과제를 수행할 때, 많은 학생들이 분석적인 전략보다는 시각적인 전략이 우세하고 사용되고 있다는 연구결과가 있다(Hillel & Kieran, 1987). 이는 단순히 컴퓨터 환경에서 도형을 다루는 활동이 학생들이 분석적 사고를 하도록 이끄는 것이 아니라 교사의 교수학적 노력이 필요함을 시사하는 것이다.

초등학교 고학년에서의 기하 지도의 목표는 직사각형의 길이는 같다든지, 마름모의 대각의 크기가 같다는 등의 성질을 말할 수 있지만, 도형과 그 성질 사이를 명확히 관련지을 수 없는 1수준의 아동을 도형의 성질과 도형사이의 관계가 연구의 대상이 되고 명제가 정리수단이 되는 2수준으로 수준 상승키는 것이다.

이를 돕기 위해 로고 언어에서는 절차의 사용이 필수적이다. 정사각형을 그리는 절차와 직사각형을 그리는 절차의 비교가 두 도형 사이의 관계를 파악하는데 일조할 수 있다. 특히 GSP와 같은 탐구형 소프트웨어의 역동적 기하는 직사각형의 꼭지점이나 변의 길이를 조작함으로써 두 도형사이의 관계 혹은 한 도형의 성질을 발견하고 이를 그 도형과 관련시키는데 도움을 줄 수 있다.

특히, 반힐레 기하학습 수준이론의 제2수준은 도형의 성질과 도형 사이의 관계를 언어적인 진술 즉 명제를 수단으로 하여 정리하는 수준으로 기하 지도시 귀납적 접근을 취해야 한다. 새로운 사실을 발견하고 창조하는 과정은 귀납적인 생산활동으로 초등학교 고학년과 중학교 저학년에서 강조되어야 할 수학의 성격이

다. 뛰어난 시각화 기능과 역동성을 가진 컴퓨터는 발견의 도구로 사용될 수 있다. 또한 수준의 비약은 각 수준에서의 언어의 확장과 관계가 있다. 따라서 발견의 수단으로 컴퓨터가 사용될 때에는 주어진 수학적 사실을 확인하는 것도 중요하지만 학생들 스스로 발견한 바를 언어적으로 표현해보는 많은 기회를 가져야 할 것이다.

반힐레 기하학습 수준이론의 제3수준은 제2수준에서 도형의 성질과 도형 사이의 관계를 파악한 바, 즉 언어적 진술이 정리의 대상이 되어 논리를 정리 수단으로 하여 이를 정리하게 되는 수준이다. 이 수준에서 지도되는 기하는 연역적 특성을 가지고 있다. 연역적인 기하를 지도하기 전에 가장 중요한 지도 내용은 공리, 정의, 정리, 증명의 의미와 역할을 이해하는 것으로, 이는 반힐레 기하학습 수준 이론을 판단할 때 3수준의 도달 여부를 판가름하는 준거로 연역적인 기하를 배울 때 반드시 지도되어야 하는 내용으로 실제적으로 주어진 명제를 증명할 수 있는 능력만큼이나 중요하다.

초등학들에게 연역적인 기하를 지도하기에 학생들의 발달 수준을 고려할 때 적절하지 않지만 그렇다고 해서 정의와 증명 등의 필요성과 역할 등의 내용을 취급하지 않을 수는 없을 것이다. 컴퓨터를 이용하여 기하를 지도할 때, 기하의 모든 내용을 귀납적인 접근 방식으로 지도할 때, 교사들이 이런 점들에 주의하여야 할 것이다.

III. 컴퓨터 환경에서의 도형의 특성과 기하지도의 분석

1. 컴퓨터 환경에서 도형의 특성

연필로 종이 위에 그리던지 아니면 종이가 없던 시절에 막대기로 모래 위에 그렸던 직선은 물리적인 실체로 존재한다고 할 수 있지만, 수학에서 다루는 직선은 이런 실제의 추상화를 통해 얻을 수밖에 없는 이상적이 수학적 대상이다. 종이나 칠판에 그려진 도형들은 그 '물리적인' 실체뿐만 아니라 그 '물리적인 실체'가 나타내는 기하학적인 관계가 나타내는 추상적인 관계까지를 포함하고 있지만, 물리적인 그림 속에서 추상적인 기하학적인 관계를 파악하는 것이 기하를 배우는 학생들에게는 쉽지 않은 일이고, 여기서 초기 기하 지도의 어려움이 생긴다(Laborde, 1991). 가령 직사각형의 정의에 따라 직사각형을 칠판에 그렸다면 그림 속에서는 정사각형이 아닌 직사각형만을 바라 볼 수 있을 뿐이다. 그러나 컴퓨터 환경에서 그려지는 도형은 이런 기존 환경에서 그리던 도형과는 질적으로 다르다.

LOGO언어나 GSP와 같은 소프트웨어 환경에서 도형은 메뉴 선택, 명령어 입력 등 컴퓨터와의 의사 소통을 통한 명시적인 조작을 통해 구현된다. 이런 의사소통 과정은 그리려는 도형의 정의를 컴퓨터에 알려주는 과정이며, 도형을 이루고 있는 구성요소간의 관계를 명확히 설정하는 과정이다. 그림을 처리하는 많은 페인팅 프로그램과의 차이점이 바로 그러한 점이다. 그리고자 하는 도형과 그 도형을 이루고 있는 요소들 간의 관계에 대한 이해와 서술이 필요하며, 이는 학생들이 도형을 단순한 물리적인 존재로 보는 시각적인 수준에서 도형을 이루는 구성 요소에 사고의 초점을 두게 되는 분석적인 수준으로 이행하는데 도움을 줄 것이다. 이러한 점이 반힐레 기하 학습 수준이론에 비추어 볼 때, 0수준의 학생들에게 1수준으로 수준 상승을 하도록 도와줄 때, 컴퓨터가 제공할 수 있는 좋은 경험이 될 것이다.

수학적인 도형은 기본적으로 가변성을 가지고 있다. 가변성이란 도형은 그것을 구성하고 있는 불변적인 관계를 보존하면서 다른 구성요소는 변화 가능하다는 의미이다. 가령, 두 쌍의 대변이 각각 평행한 평행사변형은 두 쌍의 대변이 평행하다는 관계는 변하지 않은 채, 다른 구성 요소, 예를 들면 네 변의 길이 등을 자유롭게 변화시켜 정사각형, 마름모, 직사각형을 얻을 수 있지만 이것들 역시 평행사변형이 된다(Laborde, 1991). 이는 종이 위에 혹은 칠판 위에 그려진 도형이 쉽게 나타낼 수 없는 도형의 특성으로, 컴퓨터 환경에서는 도형의 이런 특성이 쉽게 구현된다. GSP와 같은 탐구형 소프트웨어에서는 도형 속에 내재되어 있는 가변성에 입각하여 도형의 다양한 측면을 구체화시킬 수 있다. 다시 말해 도형의 가변적인 요소가 수정되었을 때 불변적인 요소의 관계는 보존하면서 여러 가지 그리고 무한한 그림들을 만들어 낼 수 있다. 이는 딘즈의 수학 교수·학습 원리 중 하나인 수학적 다양성의 원리를 구현할 수 있다. 그리고 로고 언어에서 도형의 가변성의 구현은 입력 변수가 들어 있는 절차의 사용이 필수적이다. 다음은 직사각형을 그리는 로고 절차로 두 입력 변수에 어떤 값을 입력하는가에 따라 정사각형 혹은 정사각형이 아닌 직사각형이 될 수 있다.

```
TO RECTANGLE  :H :V
    REPEAT 2 [ FD :H RT 90 FD :V RT 90]
END
```

종이 위에 그려진 직사각형은 크기 고정된 직사각형의 하나의 예에 불과하지만 입력 변수가 사용된 절차는 임의의 크기를 갖는 직사각형과 더불어 정사각형까지 만들 수 있다. 또한 화면에 그려진 물리적인 그림뿐만 아니라 도형의 구성 요소 사이의 관계를 타이핑 된 절차를 통해 볼 수 있다.

그러나 컴퓨터 환경에서 구현되는 도형이 기존 환경에서 그려지는 도형에 비해 좋은 점만을 가지고 있는 것이 아니다. 특히 GSP에서 도형을 그리기 위해서는 도형을 이루고 있는 요소들 사이의 관계 - 수직, 평행, 교점 - 등을 적절히 사용하여야 하는데, 초등학교 학생들은 기본 도형을 배운 후에 이런 관계들을 학습하게 되므로 학생들이 직접 도형을 작도한다는 것은 교육과정상 불가능하며 교사가 제공하는 교수물을 통해서 도형을 다룰 수밖에 없다.

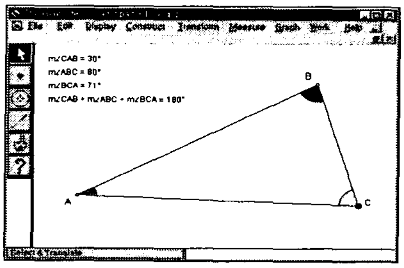
또, 기존 환경에서 도형은 도형의 모든 요소가 동일한 성질을 갖게 되지만 컴퓨터 환경에서 특히 GSP 등과 같은 탐구형 소프트웨어서 사용되는 도형은 그 구성 요소가 작도되는 순서에 의해 서로 다른 성질을 가질 수 있다. 평행사변형이 있다고 할 때, 한 꼭지점을 마우스로 이동하면 도형 전체가 이동하고, 다른 꼭지점을 이동시키면 평행사변형의 크기가 줄어들고, 어떤 꼭지점은 이동할 수 없을 수 있다. 또한 도형의 새로운 구성 요소를 이전의 어떤 요소들의 관계를 통해 작도하였는지에 따라 그 성질이 달라지므로, 그 도형을 작도한 사람은 그 관계를 알 수 있지만 다른 사람은 모르기 때문에 많은 시행착오를 겪어야 하며, 이런 시행착오 속에서 그 기하학적 관계를 작도한 사람이 의도하지 않았던 상황이 초래될 수 있다. 그런 이유로 GSP를 이용하여 학생들에게 기하 지도를 할 때, 교사가 의도하지 않았던 많은 상황이 초래된다.

2. 탐구형 소프트웨어의 각과 선분의 길이 측정 기능에 관한 분석

<그림 1>은 GSP의 각의 크기 측정 기능을

이용한 삼각형의 내각의 합의 지도하는 방법 중의 하나이다.

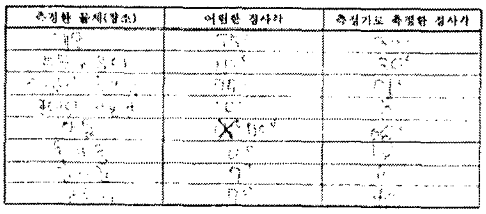
삼각형의 내각의 합이 180° 임을 지도하는 가장 쉬운 방법은 Geometer's Sketchpad의 각의 측정 기능을 이용하는 것이다. 삼각형 ABC는 마우스를 이용하여 변형시켜도 내각의 합이 180° 로 불변임을 알 수 있다. 여기서는 삼각형의 내각의 합이 180° 임을 학습하는데 아동의 사고 과정이 전혀 필요 없다. 아동이 할 수 있는 것은 단지 마우스를 통해 삼각형의 모양을 변화시키는 것일 뿐이다. 이는 컴퓨터에 의존하는 학습이 될 가능성이 크다.



<그림 1>

GSP의 각의 크기 측정 기능과 선분의 길이 측정 기능의 사용은 필연적으로 소수의 사용이 수반된다. <그림 2>는 초등학교 6학년 학생이 수업시간에 만든 경사각 측정기를 이용하여 주변의 여러 경사를 가진 물체들을 측정한 결과이다. 여기서 볼 수 있는 것처럼, 소수에 관해 학습한 초등학교 6학년 학생들도 실제 상황에서 각의 크기를 측정하거나 선분의 길이를 측정할 때, 소수점 이하는 무시하는 경향이 있다. 경사각의 측정기의 오차를 측정하기 위해 소수점의 사용을 강요하여도 학생들은 소수를 사용하다가 자연스럽게 소수점 이하를 무시해버린다. GSP의 측정 기능에서 소수의 사용은 학생들의 이런 속성에 반하는 것이다[1]. 학생들의 이런 경향이 GSP 등과 같은 탐구형 소프트웨어에서 소수의 사용을 하지 말아야 한다는 것이 아니라 그것이 학생들의 자연스런 성향에 어느 정도 반한다는 것이다.

또한 컴퓨터 환경에서 소수의 사용은 필연적으로 소수 첫째 자리나 둘째 자리에서 반올림한 근사값의 사용을 필연적으로 요구한다. 이는 이등변 삼각형의 두 밑각의 크기가 같다던가 평행사변형의 두 대각의 크기가 같다던가 혹은 삼각형의 내각의 합이 180도가 된다던가 하는 사실을 지도할 때, 문제가 될 수 있다.



<그림 2> 초등학교 6학년 학생의 실제 상황에서 각의 크기 측정의 예

가령 이등변 삼각형을 GSP에서 작도한 후 두 변의 길이를 변화시켰을 때도 두 밑각의 크기가 같은지를 살펴볼 때, 이등변삼각형이더라도 두 밑각의 크기가 다르게 표시되는 경우가 있다. 또한 <그림 3>처럼 두 평행선 사이의 거리를 지도할 때, 거리가 최소가 될 때, 두 평행선을 지나는 직선이 두 평행선과 수직이 됨을 보여주고자 할 때, 평행선과 한 직선이 이루는 각의 크기를 반올림하는 소수점 이하의 자리를

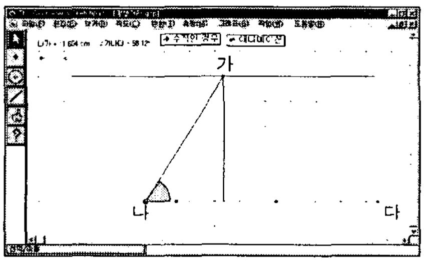
1) 혹은 반대로 생각할 수 있다. 학생들이 소수의 사용에 어려움을 겪는 것은 일상생활에서 소수를 의미 있게 사용해볼 기회가 적기 때문이라고 생각할 수 있어, 컴퓨터의 사용이 소수를 사용할 기회를 제공한다는 점에서 의미있는 것으로 간주할 수 있다. 그러나 Geometer's Sketchpad 등과 같은 탐구형 소프트웨어서 소수의 사용은 학생들이 하는 것이 아니라 컴퓨터에 의해 제공된 결과만을 관찰하는 것에 지나지 않는다. 소수의 사용이 필수적인 로고 과제를 제공하는 것은 이런 점에서 의미가 있을 것이다.

크게 하여 표시하면, 수직이 되는 점 가의 정확한 위치를 마우스를 이동하여 찾는 것은 불가능하다. 또한 소수점 이하의 자리를 한 자리 정도로 고정시키면, 시각적으로 수직이 되지 않아도, 컴퓨터 화면에는 직선과 평행선이 이루는 각이 직각이라고 표시되고, 또한 여러 점에서 직각이 표시된다. 이러한 두 가지 상황은 GSP 등과 같은 탐구형 소프트웨어를 사용하여 기하를 지도한 수업에서 학생들을 혼동시킬 요인이 될 수 있다.

이러한 실제적인 문제점 이외에도 각의 측정 기능을 이용한 기하 지도는 수학의 본질을 훼손할 위험성을 안고 있다. 평행선 공리와 관련된 삼각형 내각의 합은 비유클리드 기하가 발견되기 전까지 수많은 기하학자들을 괴롭힌 커다란 문제였다. 일화에 의하면 위대한 수학자 중의 한 사람인 Gauss는 삼각형의 세 꼭지점으로서 세 산의 정상을 이용하여 삼각형의 내각의 합을 실측하는 실험을 행하였다고 한다. 그러나 그 결과는 확정이 나지 않았다. 실제 실험은 실험 오차를 수반하기 때문이다. 만일 실험에서 사용된 측정 기구의 최대 오차가 0.01° 라면 삼각형 내각의 합이 179.99° 와 180.01° 사이에 있다는 것만을 결정할 수가 있지 삼각형 내각의 합은 정확히 알 수가 없다. 이는 초등학교 수학 수업 시간에 학생들이 각도기를 이용하여 삼각형의 내각의 합을 구할 때는 해당된다. 기하에서 정리는 아무리 정교한 자와 각도기가 존재하더라도 이를 가지고 증명할 수 없다. 오직 인간의 사고에 의해 증명될 수 있을 뿐이다. 그런데 위에서 살펴 본 GSP에서 제공하는 각의 측정 기능을 통한 삼각형의 내각의 합의 지도는 학생들의 사고가 아니라 컴퓨터에 의존하게 되므로 올바른 학습 상황이라고 볼 수 없다. 따라서 초등학교 기하뿐만 아니라 모든 수준의 기하 지도에서 GSP의 '각의 측정 기능'과 '선분의 길이 측정 기능'을 이용한 명제의 증명은 수학의 본질을 훼손할 가능성이 있다.

물론 GSP의 이런 기능이 필요 없는 것은 아니다. 모든 수준의 학교 기하에서 새로운 사실을 발견하고 창조하는 것은 그것의 연역적인 증명만큼이나 중요하다. 새로운 사실을 발견하고 창조하기 위해 '각의 크기 측정 기능'과 '선분의 길이 측정 기능'은 훌륭한 도구가 될 수 있다. 그러나 이는 발견의 수단으로 사용되어야지 그러한 사실을 증명하는 수단으로 사용되어서는 안 될 것이다. 이는 초등학교 기하 지도에서 컴퓨터를 이용할 때 교사들이 조심하여야 할 점 중의 하나일 것이다.

초등학교 기하지도시 탐구형 소프트웨어 사용시는 그 소프트웨어가 제공하는 각과 선의 길이 측정 기능보다는 컴퓨터 화면을 기본적으로 점판이나 모눈 종이로 처리하여 측정기능을 사용하지 않더라도 원하는 두 선분의 길이가 점의 개수를 세던가, 모눈 칸의 개수를 셈으로써 학생들이 같음을 발견하는 식으로 하는 것이 적절할 것이다. 예를 들어 <그림 3>에서 선분의 길이가 가장 작은 경우를 학생들이 점의 개수를 이용하여 판단하는 것은 불가능하지만 가장 작은 경우 그 선분과 평행선이 수직을 이룬다는 사실은 점판 위의 점들의 위치를 가지고 판단할 수 있다.



<그림 3> GSP를 활용한 두 평행사변형 사이의 거리의 지도

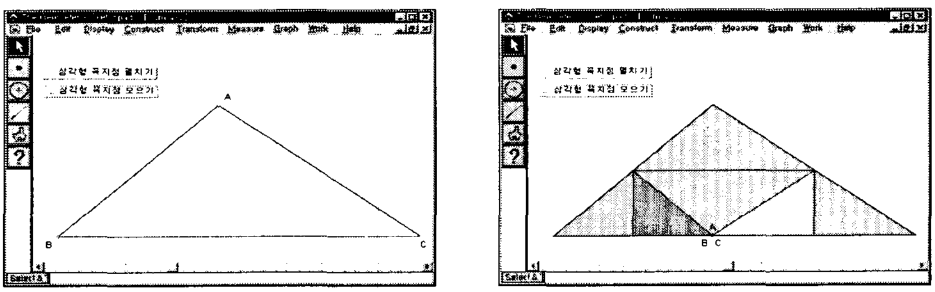
3. 탐구형 소프트웨어를 이용한 기하지도와 증명의 필요성 인식의 문제

<그림 4>는 삼각형의 내각의 합이 180도임을 보여주는 예이다. 이는 초등학교 수학 교과서에 나오는 내용을 GSP로 구현하여 본 것이다. 왼쪽 그림에서 『삼각형 꼭지점 모으기』 버튼을 더블 클릭하면 오른쪽 그림처럼 삼각형의 세 꼭지점이 한 변에 모여 세 내각이 평각을 만드므로 내각의 합이 평각이 됨을 직관적으로 알 수 있다. 삼각형의 세 꼭지점을 한 변 위에 평각이 되게끔 모으는 일은 간단한 일이 아니다. 모으려는 한 변과 마주보는 꼭지점에서 수선을 그어 만나는 점으로 모으면 된다. 실제로 초등학교 예비교사에게 종이로 오린 예각 삼각형을 주고서 꼭지점을 한 변 위로 모으라는 과제를 제시하여도 쉽게 모으지 못한다. 왜냐하면 한 변 위의 어느 점으로 모아야 하는지 그 기하학적인 관계를 파악하기 쉽지 않기 때문이다. 따라서 초등학교 교과서에는 한 변 위로 세 꼭지점을 모으는 것이 아니라 세 내각을 오려 평각에 모으도록 교과서 구성되어 있다.

이렇듯 실제적으로 삼각형을 모으는 것이 대단히 어렵고, 난해한 수학 문제임에도 불구하고 GSP 등과 같은 탐구형 소프트웨어로 구현된 교수물을 많이 볼 수 있다. 이는 학생들이 왜 삼각형의 내각의 합이 180도인지를 생각할 기회를 주기보다는 삼각형이 내각의 합이 180도임을 컴퓨터의 권위를 빌어 합리화하도록 지도하는 것 밖에 되지 않는다.

초등학교 학생 수준에서 어떤 사실에 대한 증명을 기대하는 것은 아동의 인지 발달 단계나 반힐레의 기하 학습 수준이론을 생각해보아도 무리한 일이다. 그러나 학생들에게 증명의 필요성을 일깨워 주거나 컴퓨터 환경에서의 활동 혹은 결과물을 비판적인 시각으로 바라보게 해주는 일은 가능한 일이고, 이는 엄밀한 증명 활동 이전에 학생들에게 지도하여야 할 내용이다. 반힐레 기하학습 수준이론에서 학생들의 논리적 증명이 가능한 수준은 3수준이다. 이 수준에서는 엄밀한 증명의 필요성을 깨닫지 못하지만, 명제가 연구의 대상이 되어 명제 사이의 논리적 관계가 정리 수단으로 등장하여 공리, 정의, 정리, 증명의 의미와 역할을 이해하게 된다. 이러한 내용은 기존의 교수·학습 환경에서도 지도하기 어렵지만 컴퓨터를 이용하여서도 지도하기가 쉽지 않을 것이다.

특히 도형을 컴퓨터의 도움을 받아 작도하게 되는 GSP와 같은 탐구형 소프트웨어 환경에서는 그 작도의 타당성을 학생들 자신의 사고를 통해 얻는 것이 아니라 학생들이 컴퓨터에 부여한 권위와 신뢰로부터 얻을 가능성이 있기에, 기하 학습의 핵심인 증명의 필요성에 대한



<그림 4> 삼각형의 내각의 합이 180도임을 보여주는 예

학생들의 인식을 방해할 수 있을 것이다. 새로운 신세기를 위하여, 미국 NCTM이 준비하고 있는 STANDARD 2000의 『Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft』에는 다음과 같이 언급하면서 이런 문제점을 제시하고 있다.

> 공학적으로 꾸며진 교실에서는 수학적 추론의 발달을 위한 특정한 지지력과 도전거리를 제공한다. 공학은 학생들이 예를 선택하고 어떤 것에 대한 많은 예를 산출하는데 있어서 통제할 수 있게 해주며, 그럼으로써 예와 그 근본적인 아이디어를 알게 될 가능성을 제공한다. 학생들이 많은 예를 검토하여 패턴을 발견할 수 있게 됨에 따라 학생들은 자신이 발견한 패턴이 일반적인 것인지를 결정하는 방법을 발달시킬 필요가 있다. 공학은 학생들이 추측을 만들도록 도움을 줄 수 있지만 학생들이 더욱 형식적 정당화나 증명의 필요성을 아는 것을 어렵게 만들 수도 있다. (NCTM, 1998)

학생의 사고가 필요없는 시각적인 경험을 통해서 바라볼 수 있는 식으로 제공하여 준다면, 이는 학생들에게 단지 그 정리가 참이라는 신념만 강화시켜주게 되어, 연역적 기하에서 가장 필요한 '증명의 필요성'에 대한 인식을 학생들이 느끼지 못할 수 있다. 초등학교 기하는 학생들이 이후에 배워야할 기하의 출발점이지 종착점이 아니다. 따라서 초등학교에서 컴퓨터를 이용한 교수 자료를 학생들에게 제공할 때에는 학생들이 교수 자료를 비판적으로 바라보도록 하는 활동과 학생들의 직관적인 생각에 들어맞지 않는 자료도 아울러 제공하여 주는 것도 아울러 필요할 것이다. 특히 모든 증명이 초등학생에게 불가능한 것은 아니다. 반례를 찾아 증명하는 활동은 초등학생도 할 수 있는 증명활동이 될 수 있으며, 자신의 구체적인 경험을 통해 자신의 생각을 정당화하는 활동은 엄밀한 의미에서 연역적 사고와는 거리가 있지만 초등학생들도 할 수 있는 활동이다. 따라서 컴퓨터를 이용하여 수학적 사실을 단순하게 제시하여 주어진 사실을 받아들이도록 하는 것이 아니라 학생들 나름대로 그 사실을 정당화시켜 보는 활동도 아울러 필요할 것이다.

아울러 필요한 것이 학생들의 직관적인 생각과 배치되는 상황을 컴퓨터를 통해 제공하여 학생들에게 인지적 갈등을 야기하고 이런 갈등을 해소하도록 학생들을 고무시키는 일은 중요하다. 그러나 컴퓨터 뛰어난 계산 기능과 시각화 능력은 학생들이 수학적 사실을 직관적으로 이해하는데 도움을 줄 수 있으나 '인지 갈등'의 가능성을 줄여 학생 자신의 사고와 해동을 반성할 기회가 적어지고, 이는 '인지 갈등'과 이를 해소를 통한 사고 수준의 비약이라는 수학 교수의 목표에 도달하는데 장애가 될 수 있을 것이다.

V. 결 론

학생들은 도형을 물리적인 그림으로만 바라보아 그 그림이 나타내려는 기하학적인 관계에 주목하지 못하는 어려움을 겪는다. 컴퓨터 환경에서 도형은 그 도형을 구성하는 과정에서 그 도형이 나타내려는 기하학적인 관계를 의식하지 않고서는 구성할 수 없고, 또한 이렇게 구성된 도형은 그 도형을 구성하는 요소 중에서 비본질적인 부분을 자유롭게 변화시킬 수 있는 역동적인 도형이 된다. 컴퓨터 환경에서 도형은 학생들이 도형을 시각적 수준이 아닌 분석적 수준에서 도형을 파악할 수 있을 뿐만 아니라 도형 요소 사이의 관계에 대한 학습을 용이하게 하여 줄 수 있다. 이런 점에서 GSP와 같은 탐구형 소프트웨어는 새로운 기하학적 사

실을 발견하거나 창조할 수 있는 기회를 학생들에게 부여하여 초등학교 학생들에게 기하를 귀납적인 접근을 통하여 지도할 수 있는 훌륭한 교수·학습 공간이 될 수 있다.

그러나 이러한 역동적인 기하 학습 환경이 어떤 기하학적인 정리를 탐구하거나 주어진 기하 문제를 분석적으로 관찰하는데 사용되는 것이 아니라 단지 기하학의 어떤 정리를 시각적으로 확인하는 수준에서 사용된다면, 학생들이 초등학교 이후의 연역적인 기하를 학습할 때, '증명의 필요성'에 대하여 인식을 하는데 방해가 될 수 있다. 또한 GSP에서 탐구의 수단이 되는 '각의 크기 측정 기능'과 '선분의 길이 측정 기능'의 지나친 사용은 학생들의 사고에 의한 기하 학습이 아니라 컴퓨터에 의존하는 학습이 될 수 있으며, 컴퓨터의 한계로 인한 근사값 처리로 교수학적인 문제점을 야기할 수 있다. 뿐만 아니라 수학의 본질을 훼손할 위험성을 갖게 된다.

또한 학생들에게 컴퓨터를 통해 직관적으로 옳게 보이는 시각적 경험만을 제공하거나 컴퓨터 환경에서 신속하게 이루어지는 시각적인 피드백은 컴퓨터의 권위를 빌어 학생들에게 수학적 사실을 주입하는 것이 될뿐만 아니라, 학생들이 자신이 행한 활동과 사고를 반성할 기회를 앗아가 버릴 수도 있다. 학생들이 컴퓨터에 부여하는 권위와 신뢰는 컴퓨터가 제공하는 결과에 대한 맹신을 하게 되고, 이는 학생들이 '인지 갈등'을 겪을 기회를 앗아가, 자신의 사고와 행동을 반성하여 보다 높은 수준으로 학생들의 사고가 비약할 수 있는 경험을 제공하는데 잠재적인 문제점을 노출할 수 있다.

이와 같은 논의를 통하여 초등학교 기하를 지도할 때 교사들이 주의할 점과 앞으로 연구가 필요한 점을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 컴퓨터는 수학적 사실을 증명하기 위한 도구가 아니며, 새로운 사실을 발견하기 위한 수단으로 우리의 사고 과정을 돕는 하나의 도구에 불과하며 결국 사고하고 주어진 결과의 옳고 그름을 판단하는 것은 우리 인간의 몫임을 학생들에게 분명히 이해시킬 필요가 있다.

둘째, 컴퓨터 환경에서 학생들이 자연스럽게 얻는 경험은 이후의 수학 학습의 개념적 출발점이 될 수 있지만, 그 경험의 강제성과 지속성 때문에 학생 마음속에 사라지지 않고 오래 남아 이후의 형식적인 수학 학습을 하는데 방해 요인이 될 수 있다. 컴퓨터 학습 환경이 학생들에게 제공할 수 있는 독특한 경험이 무엇인지를 살펴보고, 이런 경험이 학생들의 수학 학습에 좋지 않은 영향을 줄 가능성은 없는지 그리고 이런 경험을 적절한 교수학적인 처방을 통해 효율적으로 이용할 수는 없는지에 대한 연구가 계속되어야 할 것이다.

셋째, 컴퓨터 환경에서 학생들이 행하는 조작들의 결과에 대한 반성과 학생들 자신의 사고에 대한 반성이 일어날 수 있는 상황의 조성과 학생들이 사고 수준을 높일 수 있게 되는 갈등 상황을 조성하는 일은 결국 교사가 컴퓨터를 이용하여 수학을 지도할 때 갖게되는 커다란 몫이 될 것이며, 이런 방향으로 심층 연구가 요구된다.

참고문헌

우정호 (1998). schemes의 구성과 반영적 추상화. 김연식 교수 정년퇴임논총, pp.3-22.

임근광 (1999). 초등 기하학습에서 CabriII 활용에 대한 연구. 한국교원대학교 석사학위 논문.

하경미 (2001). 탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 탐구활동에서 초등학교 5학년 학생들의

상호작용에 관한 사례 연구. 한국교원대학교 석사학위논문.

홍진곤 (1999). 반영적 추상화와 조작적 수학 학습-지도. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

Balacheff, N. (1991). Artificial intelligence and real teaching. In C. Keitel, & K. Ruthver (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology.* Springer-Verlag.

Barbin, E. (1991). The reading of original texts: How and why to introduce a historical perspective. *For the Learning of Mathematics*, 11(2).

Bork, A. (1980). Learning trough graphics, In R. Taylor (Ed.), *The computer in the school: Tutor, tutee, tool.* New York: Teachers College Press.

Corune, B. (1991). The computer: Some changes in mahtematics teaching and learning, In D. Ferguson (Ed.), *Advanced educational technologies for mathematics and science*(pp.687-708). New York: Springer-Verag.

Dienes, Z. P. (1960). *Building up mathematics.* New York: Hutchinson Education Ltd.

Dwyer, F. M. & Moore, D. M. (1991). Effects of color coding on visually oriented test with students of different cognitive styles. *The Journal of Psychology,* 125(6), 677-680.

Fishebein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics.* Dorrecht: D. Reidel Publishing Company.

Hoyles C. (1991). Developing Mathematical Knowledge Through Microworlds. In A. J. Bishop (Ed), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching.* Kluwer Academic Publishers.

Laborde, C. (1991). The Computer as part of the learning environment: The case of Geometry. In C. Keitel, & K. Ruthven (Eds), *Learning from computers: mathematics education and technology.* Springer-Velrag.

Merill, P. F. & Bunderson, C. V. (1981). Preliminary guidelines for employing graphics in instruction. *Journal of instructional* Developement 4, 2-9.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mahtematics.* Reston, VA: the Author.

National Council of Teachers of Mathematics (1998). *Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft.* Reston, VA: the Author.

Papert, S. (1980). *Mindstorm: Children, computers and powerful ideas.* NewYork: Basic Books.

A Study on the Teaching Elementary Geometry Using the Computer

Chong-young Lee (Chonju National University of Education)

Computer has been regarded as an alternative that could overcome the difficulties in the teaching and learning of mathematics. But the didactical problems of the computer-based environment for mathematics education could give us new obstacles.

In this paper, first of all, we examined the application of the learning theories of mathematics to the computer environment. If the feedbacks of the computer are too immediate, students would have less opportunity to reflect on their thinking and focus their attention on the visual aspects, which leads to the simple abstraction rather than the reflective abstraction. We also examined some other problems related to cognitive obstacle to learn the concepts of geometric figure and the geometric knowledge.

Based on the analysis on the problems related to the computer-based environment of mathematics teaching and learning, we tried to find out the direction to use computer more adequately in teaching and learning geometry.