대한수학교육학회지<학교수학>제3권 제2호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.3, No.2, 423~445 September 2001

다각형의 둘레와 넓이에 관한 수업 아이디어

이 경 화 (청주교육대학교)

Ⅰ. 들어가는 말

다각형은 초등학교 1학년부터 5학년까지 계속해서 등장하는 초등학교 수학의 중심 내용 가운데 하나이다. 학생들은 수학적 대상으로서의 다각형을 구체물, 반구체물, 수학적 정의 등을 통하여 다루면서 그 다양한 성질을 배운다. 다각형의 넓이와 둘레는 각각의 다각형에 대한 탐구를 종합하고 보다 고차의 수학적 조작 또는 시각에 의하여 정돈하는 기회를 학생들에게 제공한다. 그러나 넓이를 구하는 방법, 둘레를 구하는 방법이 각각 공식화될 수 있기 때문에 그 의미를 충분히 탐구하지 않고 공식을 암기함으로써 종종 학습 실패의 원인이 되기도 한다. 미국의 한 연구에서는 학생들이 공식에만 의존하여 직사각형의 넓이를 구함으로써 정사각형의 넓이를 구하지 못하였음을 보고하기도 하였다. 조사대상이었던 7학년 학생들은 '가로 곱하기 세로'라는 공식에 따라 직사각형의 넓이는 50% 정도가 맞게 구하였지만, 정사각형은 가로와 세로가 구분되지 않으므로 정답율이 10%에 불과하였다고 한다(Kouba et al., 1988; 강문봉 외, 1999, p. 517에서 재인용)[1].

본 고에서는 다각형의 넓이와 둘레에 관한 수업에서 공식 자체보다는 공식이 나오게 된 배경에 주목하고 그 의미를 충분히 살리기 위하여 노력하며 수학적 사고 과정에 초점을 둔 수업 자료를 제시하고자 한다. 우리의 수업 환경에서 도입하기 어려운 면이 전혀 없는 것은 아니지만 대부분의 경우에 약간의 수정·보완만 거친다면 적용에 크게 무리는 없을 것으로 생각한다. 특히, 현실적으로 부진아나 우수아를 위한 지도 자료를 별도로 제작하기 어려운 교사들에게 참고 자료로 활용되기를 기대한다.

---

1) 우리 나라의 경우, 이런 식의 결과가 나올 것 같지는 않다. 교과서에서 정사각형의 둘레의 길이를 별도로 다루고 있으며, "한 변의 길이 곱하기 4"라는 공식으로 정돈해주기 때문이다. 한편, 교과서에서는 정사각형의 둘레의 길이를 구하는 방법을 직사각형의 둘레의 길이를 구하는 방법과 연결하지 않고(또는 그로부터 추론해내지 않고) 독립적으로 다루면서 연결의 책임을 교사에게 맡기고 있다.

Ⅱ. 교육과정과 교과서 분석

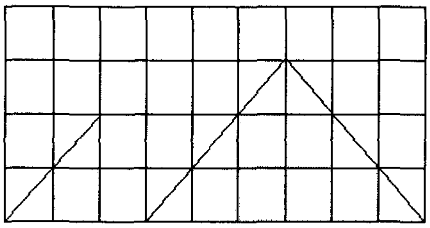
제 6차 교육과정에서는 다각형의 둘레와 넓이를 4학년 2학기와 5학년 1학기에 걸쳐서 다루고 있으며, <표 1>과 같이 총 15차시 분량으로 수업 내용을 학습하도록 하였다. 그러나 제 7차 교육과정에서는 5학년 가단계와 나단계로 다루는 학기를 하나씩 늦추었으며, 총 18차시(무게의 단위를 다루는 차시를 제외한 것임)에 걸쳐서 수업하도록 하고 있다.

<표 1> 넓이와 둘레에 관한 신·구 교육과정 비교

6차 교육과정		7차 교육과정	
학년	차시별 내용	학년	차시별 내용
4-2	1. 직사각형 및 정사각형의 둘레 2. 넓이 비교 및 넓이의 단위 1㎠ 3. 직사각형 및 정사각형의 넓이 4. 1㎠ 단위와 도형의 넓이 구하기 5. 삼각형의 넓이 이해 6. 삼각형의 넓이 구하기 7. 삼각형의 밑변 또는 높이 구하기 8. 복잡한 도형의 넓이 구하기	5-가	1. 직사각형의 둘레의 길이 2. 도형의 넓이 3. 직사각형의 넓이 구하는 방법 4. 1㎠와 1㎡ 의 관계 5. 직사각형을 이용하여 도형의 넓이 구하기 6. 평행사변형의 넓이 구하는 방법 7~8. 삼각형의 넓이 구하는 방법 9. 삼각형의 넓이를 이용하여 밑변과 높이 구하기 10. 재미있는 놀이, 문제해결 11~12. 수준별 학습
5-1	1. 평행사변형의 넓이 2. 둔각삼각형의 넓이 3. 사다리꼴의 넓이 4. 마름모의 넓이 5. 다각형의 넓이 6. 큰 넓이의 단위 7. 연습	5-나	1. 사다리꼴의 넓이 알아보기 2. 마름모의 넓이 알아보기 3~4. 넓이의 단위 알기 5. 무게의 단위 알기 6. 재미있는 놀이, 문제해결 7. 수준별 학습

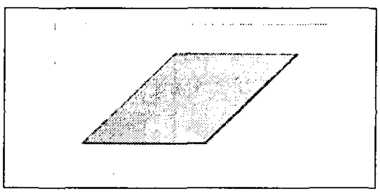
제 6차와 제 7차 교육과정 모두 둘레의 길이는 직사각형과 정사각형의 경우에 대해서만 간략하게 다루며, 대부분의 시간을 넓이의 지도에 할애하고 있다. 넓이의 지도 내용 요소는 큰 차이가 없으나, 다루는 순서와 방법에 있어서는 약간의 차이가 발견된다. 제 6차 교육과정에서는 직사각형과 정사각형의 넓이를 구한 다음 바로 삼각형의 넓이를 구하도록 하고 있는데 반하여, 제 7차 교육과정에서는 평행사변형의 넓이를 다룬 후에 삼각형의 넓이로 넘어가고 있다.

제 6차 교육과정에서의 삼각형의 넓이에 대한 설명은 <그림 1>로 출발한다(교육부, 1997, p. 93).

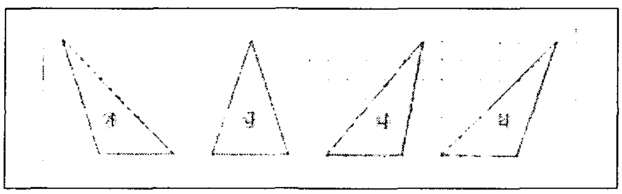


<그림 1>

<그림 1>의 왼쪽 아래에 있는 삼각형의 넓이는 $2\,cm^2$, 오른쪽 삼각형의 넓이는 $9\,cm^2$ 임을 확인하도록 한다. 이어서 역시 그림을 통하여 직각삼각형의 넓이는 직사각형의 넓이의 반이 된다는 것을 확인하고 이를 일반화하여 삼각형의 넓이에 대한 공식을 이끌어낸다. 둔각삼각형의 넓이는 이러한 흐름에서 설명되기 어렵기 때문에 그 다음 학기의 학습 내용으로 한다. 이에 반하여, 제 7차 교육과정에서는 직사각형의 넓이를 배운 후에 바로 평행사변형의 넓이를 배우도록 하고 있다. 도입 방법은 역시 <그림 2>와 같이 모눈종이 위에서 넓이를 계산하는 것이다(교육부, 2001, p. 93). 이어서 평행사변형을 직사각형으로 변형함으로써 직사각형의 넓이와 연결한다. 삼각형의 넓이는 전적으로 평행사변형의 넓이와 관련지어 설명된다. 주어진 삼각형과 합동인 삼각형을 이용하여 평행사변형을 만들어보는 활동을 여러 차례 반복하면서 삼각형의 넓이는 평행사변형의 넓이의 반이라는 것을 확인한다. 이렇게 도입할 경우, 둔각삼각형의 넓이도 자연스럽게 설명되기 때문에 제 6차와는 달리 삼각형의 넓이에 관한 논의 속에 둔각삼각형의 경우도 포함시킬 수 있게 되었다. 그리하여 <그림 3>과 같이 밑변과 높이가 같은 삼각형의 넓이는 같다라는 성질도 완전하게 보다 부각시켜서 다루고 있다(같은 책, p. 100).



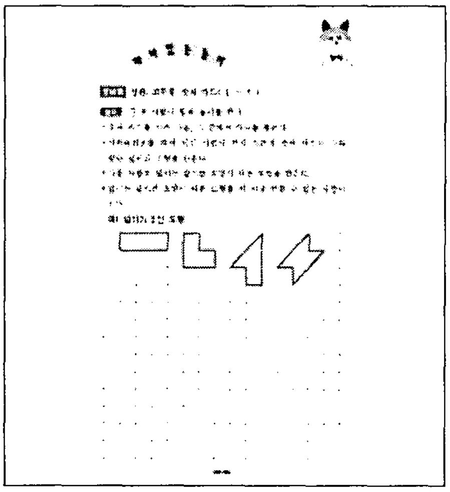
<그림 2>



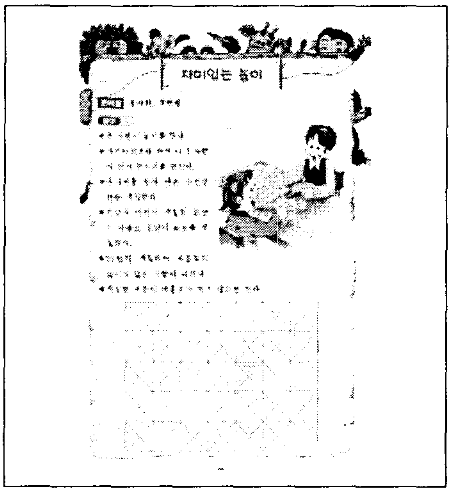
<그림 3>

제 7차 교육과정에 새로이 포함된 코너 가운데 놀이학습 자료는 제 6차 교육과정과의 차이를 가장 분명하게 드러낸다. 다음 <그림 4>는 제 7차 교육과정에 따른 실험용 교과서의 일부로서, 넓이가 1부터 6까지인 도형을 점판에 나타내도록 하는 놀이학습 자료이다(교육부,

2001, 5-가, p. 103). <그림 5>는 마름모의 넓이를 넓게 만드는 놀이학습 자료이다(교육부, 2001, 5-나, p. 102).



<그림 4>



<그림 5>

수업을 준비하는 교사로서는 이들 새로이 추가된 놀이학습 자료에 대한 이해도 중요한 과제가 되었다. 또한 이들 놀이학습 자료를 변형할 수 있는 안목도 교사의 전문성 속에 포함되고 있다. 놀이학습 자료가 아동으로 하여금 흥미롭게 수업 내용을 반성하고 정돈할 수 있도록 활용되지 않는다면 제 7차 교육과정 개정의 의의는 상당 부분 사라질 수도 있다.

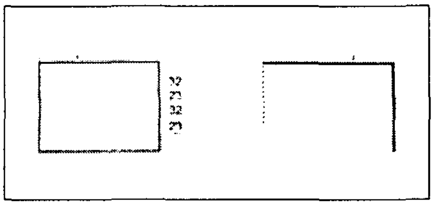
Ⅲ. 둘레의 지도 아이디어

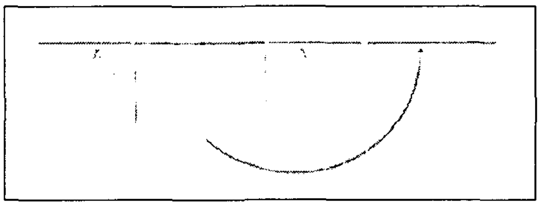
제 7차 교육과정에 따른 교과서에서는 직사각형의 둘레의 길이를 재어보도록 한 후에 "직사각형의 둘레의 길이를 구하는 방법을 말하여 보아라."라는 문제를 제시하고 있다. 교사용 지도서(5-가, pp. 200-201)에서는 "교과서에서 제시한 방법(가로와 세로의 합의 2배)은 실제로 직사각형의 네 변의 길이를 각각 더하는 것과 비교하면 대단히 편리하다고 말할 수 없을 것이다. 그러므로 교과서에서 제시한 방법을 하나의 공식으로 생각하여 강조할 필요는 없다. (중략) 학생들에게 반드시 교과서에서 제시한 방법만을 활용하여 길이를 구하도록 해서는 안 된다."라는 설명을 제시하고 있다. 제 7차 교육과정의 실시에 있어 가장 큰 어려움 가운데 하나는 이와 같이 교사 또는 학생들에게 맡겨둔 문제를 어떻게 해결할 것인가 하는

것이다. 이하의 첫 번째 절에서는 그 여러 가지 방법이라는 것이 어떤 것인가를 확인할 것이다. 학생들로부터 아무런 답이 나오지 않았을 때 이 자료를 참고하여 수업을 이끌 수 있을 것이다. 두 번째 절에서는 둘레의 길이라는 개념을 여러 도형에 확장하고 비교하는 경험을 통하여 공식이 아니라 둘레에 대한 개념적 이해를 보강하는 수업 자료를 소개할 것이다. 세 번째 절에서는 둘레의 길이를 탐구하면서 대수적 사고를 경험하고 표현하는 수업 자료를 제시할 것이다. 다각형의 둘레에 대한 풍부하고 흥미로운 수행평가 과제로 활용되기를 기대한다.

1. 둘레 개념의 도입과 과제 제시 방법

Charles Lovitt & Doug Clarke. (1992)는 <그림 6>, <그림 7>과 같이 세 가지 관점에서 직사각형의 둘레의 길이를 탐구하도록 한다. 먼저 <그림 6>의 첫 번째 그림처럼 네 변의 길이를 측정하여 모두 더하도록 한다. <그림 6>의 두 번째 그림에서는 길이가 같은 변이 각각 2개씩 있음을 발견하여 좀더 간단한 계산 방법으로 정돈하도록 하고 있다. 이 방법은 현재 우리의 교과서에 제시되어 있는 것이다. 세 번째로, <그림 7>과 같이 직사각형의 변의 길이를 직사각형과 별도로 대상화하고 그 길이의 합에 주목하도록 한다. 이 방법은 직사각형 뿐 아니라 삼각형을 비롯한 다른 다각형의 경우에도 적용할 수 있으며 결국 둘레의 길이라는 독립적인 수학적 사고의 대상에 주목하게 하는 효과가 있다(p. 421).

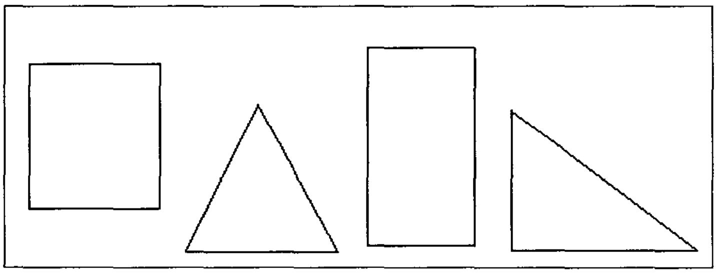

<그림 6>


<그림 7>

위와 같이 도입한다면 정사각형의 둘레의 길이를 별도로 다루지 않고 다양한 다각형의 둘레 속에 포함시켜서 학습하도록 할 수 있다는 장점이 있다. 수업에 이 자료를 적절히 활용한다면 둘레의 길이와 그것을 구하는 방법에 대하여 설명하는 데 도움이 될 것으로 기대한다.

2. 둘레의 간접 비교

연필과 볼펜의 길이는 한쪽 끝을 맞추어 나란히 놓거나 세워서 직접 비교할 수 있다. 넓이의 경우도 서로 겹쳐봄으로써 상대적인 크기를 비교할 수 있다. 실제로 학교수학에서 길이나 넓이 개념을 지도할 때에는 이러한 직접 비교 방법을 개념 지도에 활용하고 있다. 그러나 도형의 둘레의 길이는 그러한 직접 비교 방법을 적용할 수 없다. 서로 다른 도형의 둘레를 비교하기 위해서는 길이의 독립성, 가법성을 이용하여야 하는 바[2], <그림 8>의 여러 도형의 둘레의 길이도 매개물, 이를테면, 테이프 자를 이용하여 각 변의 길이를 잰 후 그 합을 비교하여야 한다. 결국 서로 다른 대상의 둘레의 길이를 비교하기 위해서는 측정에 전적으로 의존하여야 한다는 것을 알 수 있다. 현재 우리의 교과서에서는 이러한 측면이 자세히 다루어지지 않고 있다. 이 부분은 교사의 설명에 의하여 살아나지 않으면 현재로서는 다루어지기 어려운 수학적 성질이다.

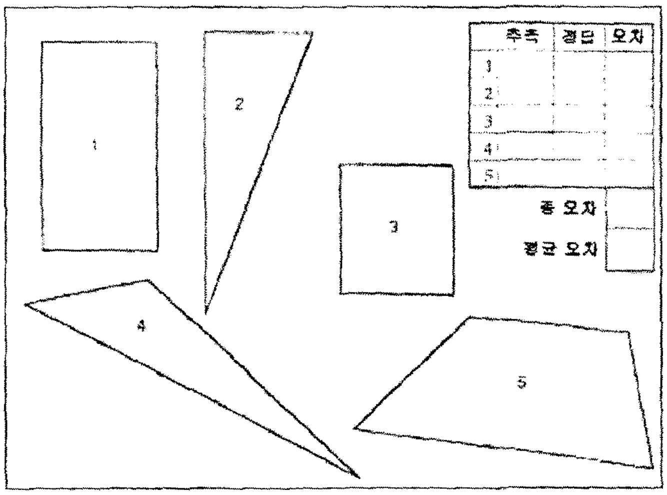


<그림 8>

C. W. Schminke(1981)는 <그림 8>을 제시하고, 학생 스스로 도형을 선택하도록 한 후에 주어진 테이프 자로 둘레의 길이를 측정하되, 각 변의 길이를 테이프 자에 표시한 후, 다른 학생들의 측정 결과와 비교하도록 하는 수업을 제안하였다. 이는 <그림 7>과 비슷한 접근이다. 실제로 Charles Lovitt & Doug Clarke(1992) 역시 같은 의도에서 둘레의 길이에 관한 수행평가 과제를 다음 <그림 9>와 같이 제시하였다. 학생들은 어림을 통하여 또는 길이

2) 양은 그것이 소속된 물체와는 독립된 개념이므로 다른 물체로 대치 가능하다는 것이 양의 독립성이다. 이 성질 때문에 양을 매개물이나 계기를 사용하여 수치화하고, 그 수치를 비교하면 양의 대소를 판별할 수 있다. 또한, 같은 종류의 양에 대하여 반드시 물체의 합에 해당하는 양이 얻어질 때 두 양은 덧셈 가능하다고 하며, 가법성이 만족되는 양이라고 한다. 길이, 넓이, 부피, 들이, 무게, 시간, 각도 등이 가법성을 만족시키는 양이다(강지형 외, 1999, pp. 256-257).

를 재는 도구를 이용하여 여러 도형의 둘레의 길이를 추측하고 확인하며 오차를 줄이거나 효율적으로 측정하기 위한 전략을 고안하여야 한다(p. 422).



<그림 9> 둘레의 길이에 관한 과제

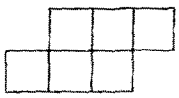
3. 대수학습과의 연결

다각형의 둘레의 길이는 위에서 살펴본 바와 같이 직사각형이나 정사각형 등의 경우를 제외하면 수학적으로 또는 계산식으로 명쾌하게 정돈되지 않으며 전적으로 측정활동을 필요로 한다. 그러나 넓이에 비하여 초등학생으로 하여금 수학적 추론, 특히 대수적 사고를 경험하고 표현하도록 하는 소재로는 더 적합한 측면을 가지고 있다.

1) 대수적 사고의 경험과 표현 1

먼저 문제상황을 다음과 같이 구성하면 학생들로 하여금 대수적 사고를 경험하게 할 수 있다(NCTM, 1989, p. 149).

문제: 정사각형의 타일을 이용해서 다음 그림에 타일을 붙여 둘레의 길이가 18인 새로운 모양을 만들 수 있는가? (타일은 모서리가 닿도록 붙여져야 한다.)



<그림 10>

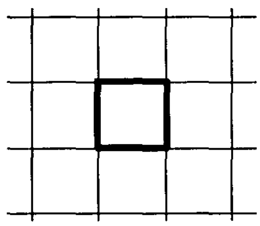
학생들이 발견할 수 있는 바는 이를테면, 두 변만 닿게 붙이면 둘레의

길이가 변하지 않는다는 것, 한 변만 닿게 붙이면 둘레의 길이는 2만큼 증가한다는 것, 세 변이 닿게 붙이면 둘레의 길이가 2만큼 감소한다는 것 등이다. 이러한 발견 내용을 대수식을 이용하여 표현할 수 있으며, 이러한 학습을 통하여 둘레의 길이가 공식 속에 갇히지 않고 다양한 상황을 표현하는 도구로 이해될 수 있을 것이다.

2) 대수적 사고의 경험과 표현 2

직사각형의 둘레의 길이를 구하는 방법에서 핵심적인 요소는 가로의 길이와 세로의 길이이며, 똑같은 길이가 두 번씩 반복된다는 것이다. 이를 염두에 두면 도형의 둘레와 관련된 또다른 추론 활동을 할 수 있다.

문제: 오른쪽 <그림 11>의 도형을 가로와 세로 방향으로 한 칸씩 늘리면 둘레의 길이는 4cm에서 8cm로 변한다. 만약 두 칸씩 늘리면 둘레의 길이는? 세 칸, 네 칸을 늘릴 때 둘레의 길이가 어떻게 변하는지 확인하여 설명하여라.



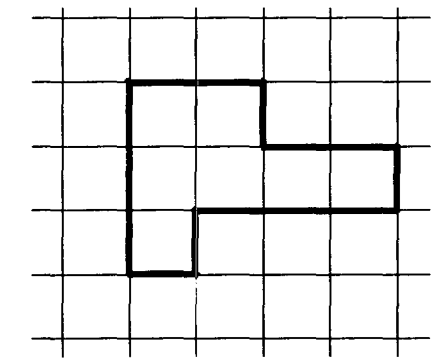
<그림 11>

처음에 제시하는 도형의 모양을 바꾸거나 가로와 세로 방향으로 늘리는 양을 다르게 할 수도 있다. 이 문제 역시 대수적 사고와 표현을 필요로 한다.

3) 대수적 사고의 경험과 표현 3

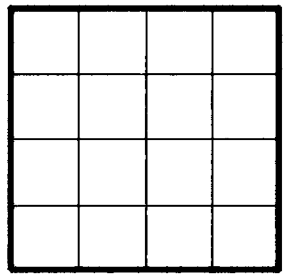
다각형의 둘레의 길이를 다양한 상황에서 통제하는 경험은 측정값으로서의 길이 개념과 수학화된 독립된 대상으로서의 둘레 개념을 분리하여 이해하고 음미하는 기회를 제공할 것이다. 학생들을 두 그룹으로 나누거나 개별 활동 소재로 활용할 수 있다.

한 칸이 1cm인 모눈종이 위에 <그림 12>와 같은 도형을 그릴 수 있다. 이 때, 이 도형의 둘레의 길이는 14 cm이다. 둘레의 길이가 이와 같이 14cm인 도형을 5개 그려보도록 한다. 물론 먼저 그리는 팀 또는 학생이 이긴다. 둘레의 길이를 고정한 후 학생들의 다양한 작품을 모집하여 전시하는 것도 좋은 방법이다. 그러나 대각선을 포함시키지 않으면 다양한 모양이 나오기 어렵다. 이 경우에는 한



<그림 12>

가지 모양을 제시하고 그와 둘레의 길이가 같은 도형을 만들도록 하면 될 것이다. 간단한 조건 아래 다양한 수학적 대상을 만드는 경험은 학생들에게 수학에 대한 새로운 느낌을 가지게 할 수 있으며 그 나름의 성취감을 맛보게 할 수도 있다.



<그림 13>

또한, 오른쪽 도형의 둘레의 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$인 도형을 그리도록 문제를 만들 수도 있다. 넓이에 대한 비율적 사고에는 학생들이 익숙하지만 둘레의 길이에 대해서는 낯설기 때문에 새로운 경험을 제공할 수 있다. 제시된 도형의 변의 길이를 문자로 표시하는 것은 문제를 해결하는 데 중요한 역할을 한다.

Ⅳ. 넓이의 지도 아이디어

직사각형, 정사각형, 삼각형 등 현재 학교수학에서는 그 넓이를 각각 공식화할 수 있는 도형만 다루고 있으며, 대부분의 경우 공식 적용에 필요한 길이들이 제시되어 있다. 일부 학생들은 주어진 숫자를 공식에 대입하는 것으로만 넓이 학습을 이해하기도 한다. 공식의 암기와 계산 절차의 수행에 그치지 않고 다양한 추론을 경험하게 하는 수업 자료가 필요한 것은 이 때문이다. 이하에서 소개하는 수업 자료는 이러한 맥락에서 구성된 것이다.

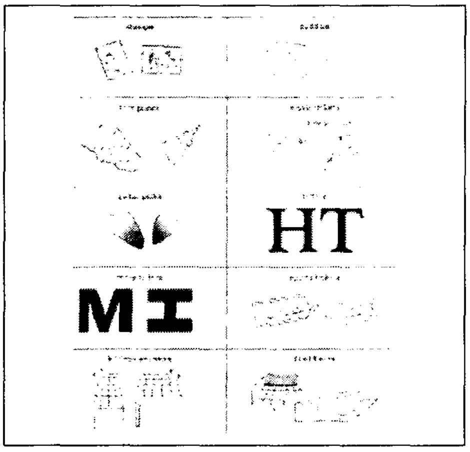
1. 넓이에 대한 감각을 중시하는 수업

넓이는 일상 생활에서 이미 사용되는 개념이기 때문에 수학 수업에서는 수학적인 특성에 주목하여야 하는 것으로 생각되기 쉽다. 그러나 많은 연구에서는 넓이를 수학화되기 이전의 수준, 이를테면 감각에 가까운 수준에서 충분히 탐구할 것을 주장한다. 예를 들어, Besty Franco는 다양한 문제상황에서 넓이에 대한 감각을 키우고 그것을 수학적으로 정돈하는 경험을 수업 자료로 제시하였다. 주요 내용의 요소와 전개 순서는 우리 교과서와 크게 다르지 않으나 각 단계에서 제공하는 활동이 보다 풍부하므로 수업을 계획하는 교사에게는 참고할 만한 자료이다(Besty Franco, 1995, pp. 1-27).

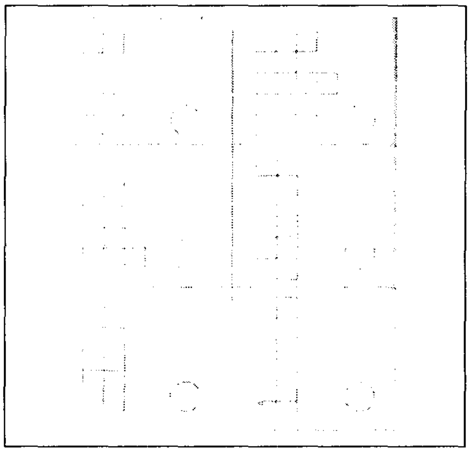
1) 직관적인 넓이 비교와 넓이의 정의

Besty Franco는 먼저 서로 다른 크기의 엽서, 조개 껍질, 찢어진 종이, 영화표, 문자, 마루바닥 등 다양한 그림 자료를 제시한 후 "표면이 더 큰(covers more surface)" 물건을 고

르도록 한다(<그림 14> 참고>). 구체물은 모두 입체이기 때문에 평면 도형에 대한 측정값으로서의 넓이를 잘못 이해하지 않도록 하기 위하여 자료를 그림으로 제시하는 것으로 보인다. 이어서 타일의 개수를 세어 크기를 비교하도록 함으로써 앞으로 넓이 비교의 주요 방법을 암시한다(<그림 15> 참고). 자연스럽게 단위 넓이 개념이 연결된다. 이제 "표면에 대한 측정값(a measure of a surface)"으로 넓이를 정의한다[3].



<그림 14>


<그림 15>

2) 넓이의 측정과 수학화

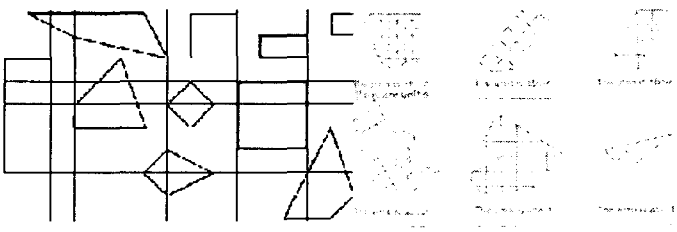
실제 책상 윗면의 넓이, 의자 윗면의 넓이, 책의 넓이, 방바닥, 천정, 벽면, 자신의 손바닥, 등의 넓이를 측정하도록 한다. 신문, 편지봉투, 지우개, 노트 등 넓이의 측정에 이용되는 도구는 다양하게 열어 놓는다. 다만 측정 결과를 표시함에 있어서는 단위를 무엇으로 하였는지, 그 단위가 대략적으로 몇 번 사용되어야 하는지 등을 주의 깊게 표시하여야 한다는 것을 강조한다. 이러한 활동을 반성하고 논의한 후, 모눈종이가 도입된다. 여기서 모눈종이는 수학 또는 정확성의 상징이다. 지금까지의 활동에 수학적 성질을 부여하고 수학적 성질로서의 넓이를 이해하기 위한 중요한 도구인 것이다. 먼저 학생들은 모눈종이 위에 각자 자신의 손을 올려놓고 그린 후 넓이를 어림한다. 실제로 손을 마주 대고 비교한 것과 모눈종이를 이용하여 넓이를 구한 것을 비교하도록 한다. 모눈을 세는 원칙에 따라 측정값이 달리 나올

3) 제 7차 교육과정에 따른 교과서 실험본에서는 도형의 넓이를 별도로 정의하지 않고, "어느 직사각형이 더 넓은지 비교하여 보아라.", "도형의 넓이를 비교하여 보아라."라는 표현을 통하여 넓이 개념을 도입한다(교육부, 2001, 수학 5-가, pp. 82-83).

수 있으며 부정확한 정도가 다르므로, 어떻게 하여야 넓이에 대한 보다 나은 추측을 할 수 있는지 논의한다. 이제 팀 프로젝트를 다음과 같이 제시한다:

・2명에서 4명으로 이루어진 팀이 함께 과제를 해결한다. ・준비물: 신문, 가위, 자 또는 테이프 자, 커다란 봉투 ・오른쪽 정사각형을 "1-센티미터-정사각형"이라고 부른다. 각 변의 길이를 재어 보아라. □ 이와 같이 각 변의 길이가 1 cm인 정사각형의 넓이는 "1-제곱-센티미터"라고 한다. ・다른 종이에 1-센티미터-정사각형을 그린 후 잘라서 신문에 대고 "200-제곱-센티미터" 타일을 만들어라. 신문을 여러 번 접어서 겹치게 한 후 자르면 다양한 모양과 크기의 타일을 만들 수 있을 것이다. ・각 팀에서 만든 신문 타일을 이용하여 가능한 한 정확하게 수학책, 책상, 교탁의 넓이를 측정한다.

이 프로젝트는 1 cm^2에 대한 이해와 감각을 학생들 스스로 시도하도록 하기 위한 것이다. 큰 넓이 단위의 필요성은 이 활동에 대한 반성을 통하여 자연스럽게 설명될 수 있을 것이다. 수학적 상황에서 넓이를 구하는 경험이 <그림 16>과 같이 제공된다.[4)]

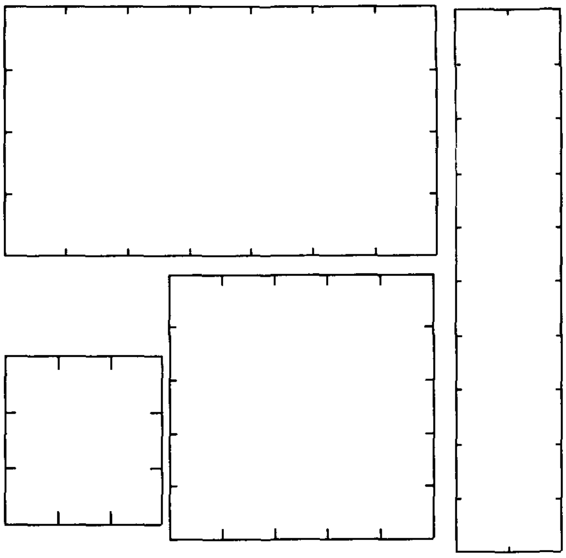


<그림 16>

3) 귀납에 의한 공식화

직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이가 넓이와 어떤 관련을 맺는지 살펴보기 위하여 <그림 17>과 같은 과제를 부여한다. 가로와 세로에 표시되어 있는 눈금을 기초로 주어진 직사각형의 넓이를 구하게 되는데, 처음에는 자를 이용하여 모눈을 완성한 후 모눈의 수를 계산할 것이지만 나중에는 모눈을 모두 그리지 않고도 가로와 세로의 눈금의 수만 구하여 넓이를 구할 것이다. 넓이 공식이 가로의 길이와 세로의 길이를 핵심 요소로 하여 만들어진다는 것을 알 수 있게 된다.

4) 앞의 그림은 모눈종이에 다양한 도형을 제시한 후, 넓이를 구하라는 것이고, 뒤의 그림은 찢어진 종이의 넓이를 어림하라는 것이다.



<그림 17>

이어서 학생들은 모눈종이에 <표 2>의 조건에 따라 여섯 개의 직사각형을 그린 다음 넓이를 구하여 기록한다. 가로의 길이와 세로의 길이를 곱하면 모눈종이의 눈의 수를 센 값과 같다는 것을 확인할 수 있다. 귀납적 추론에 의하여 가로와 세로의 곱이 곧 넓이임을 확인한다. 이 단계에서 제공할 수 있는 유사한 문제는 다음과 같다.

<표 2>

직사각형	가로	세로	넓이
①	8	3	24
②	6	2	
③	11	3	
④	4	4	
⑤	6	5	
⑥	12	4	

문제: 가로와 세로의 모눈 개수가 자연수가 아니면서 넓이는 12인 직사각형을 그려라.

2. 칠교판을 활용한 넓이 탐구 과제

널리 알려진 수학 교구 가운데 하나인 칠교판을 이용하여 넓이 문제를 만들 수도 있다. 칠교판 7개의 조각 가운데 가장 작은 삼각형의 넓이를 1로 정한다면 나머지 다른 도형의 넓이를 구할 수 있다. 뿐 아니라 넓이와 도형의 종류에 대한 조건을 바꾸면서 다양한 문제 상황을 구성할 수 있다. 간단하게 예를 들면 다음과 같다.

문제 1: 넓이가 15인 삼각형을 만들어라. 만들 수 없다면 그 이유는?

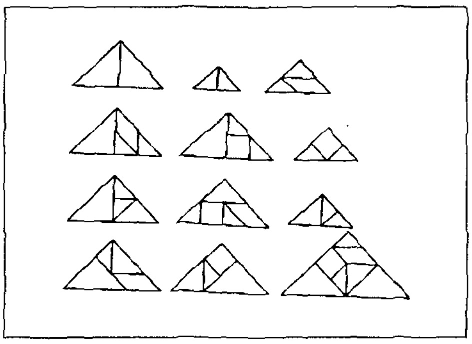
문제 2: 넓이가 4인 사각형을 만들어라. 몇 가지 종류가 가능한가?

문제 3: 넓이가 8인 육각형을 만들어라.

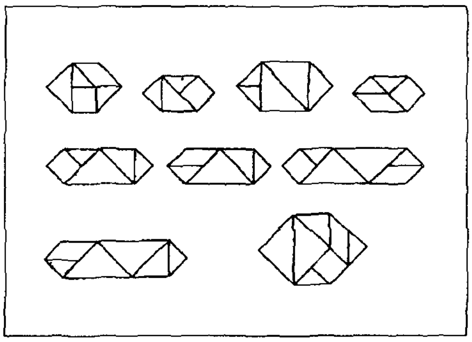
문제 4: 넓이가 16인 12각형을 만들어라.

칠교판 일곱 조각 가운데 다섯 개가 삼각형인데 이들 모두가 직각이등변 삼각형이다. 삼각형의 내각의 합이 180° 이고, 각 조각에 있는 내각의 크기가 45° , 90° , 135° 밖에 없기 때문에 새로이 만들어지는 삼각형도 직각이등변 삼각형 뿐임을 알 수 있다. 참고로 칠교판을 이용하여 만들 수 있는 삼각형의 종류는 <그림 18>과 같다. 이들 삼각형의 넓이는 2, 4, 8, 16이다. 그러므로 넓이 15인 삼각형은 만들 수 없음을 알 수 있다. 넓이가 4인 사각형을 만들기 위해서는 1+1+2, 즉 제일 작은 삼각형 2개와 사각형 1개를 사용하여야 함을 미리 생각하여야 한다. 우연에 의존하지 않고 이와 같이 넓이를 나타내는 수 사이의 조합을 생각하면 흥미롭고 빠르게 문제를 해결할 수 있다. 또한 넓이라는 독립된 값에 주목하는 효과도 꾀할 수 있다.

넓이가 8인 육각형의 경우에는 한 가지 더 고려하여야 할 것이 있다. 넓이가 8이기 때문에 사용하여야 할 조각의 수는 늘어났지만 여섯 개의 변이 나와야 하므로 각 조각의 변의 길이에도 관심을 가져야 하는 것이다. 어떤 변과 어떤 변의 길이가 같은지 다른지 어떻게 조각을 배열하면 같은 길이의 변을 만들 수 있는지 고려할 수 있어야 한다. <그림 19>와 같이 칠교판을 이용하여 다양한 방법으로 육각형을 만들 수 있다. 넓이가 8이기 때문에 1+1+2+2+2인 첫 번째 것이 구하는 답이다.



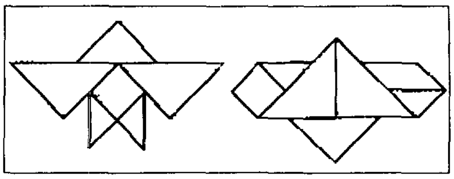
<그림 18>



<그림 19>

칠교판을 이용하여 다각형을 만들다보면 볼록 다각형 뿐 아니라 오목 다각형에도 관심을 기울이게 된다. 특히, 변의 수를 늘리다 보면 <그림 20>과 같이 오목 다각형을 만들게 된

다. 조각을 많이 사용하면 쉽게 변의 수를 늘릴 수 있을 것 같지만 실제로 그렇게 쉽지는 않다. <그림 20>의 두 번째 도형이 넓이가 16인 12각형이다.



<그림 20>

이와 같이 칠교판의 일곱 조각을 이용하여 넓이 문제를 만들면 구조가 간단하여 문제에 대한 이해가 쉬우면서도 고차적인 사고를 필요로 하는 문제를 만들 수 있다. 특히 선수학습의 결손이 심한 학생들의 경우 다른 계산 기능을 필요로 하지 않기 때문에 그 나름대로 수학적 사고를 경험하게 할 수 있다. 물론 위의 문제를 모두 해결하도록 하기보다는 조각들을 겹쳐보면서 각 조각의 넓이를 알아내고 한 가지 문제 정도를 해보도록 하는 것이 좋다.

3. 점판을 활용한 넓이 탐구 과제

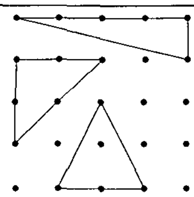
점판은 이미 우리 교과서에서도 활용되고 있는 소재이다. 도형과 측정의 지도에 있어 점판은 상당히 좋은 환경을 제공한다. 점판의 성질을 학생들로 하여금 이해시키는 것도 어렵지 않고 제작하기도 쉽기 때문에 수업에 적극 활용할 것을 권장한다.

1) 공식 음미의 기회 1

삼각형의 넓이 구하는 공식을 학습한 후에, 학생들은 주어진 삼각형을 분석하고 이해하는 것에서, 주어진 조건에 맞는 삼각형이 어떤 모양인지 추측하고 실제로 만들어내는 활동으로 이동할 수 있어야 한다. 특히, 넓이를 구하는 과정에서 밑변과 높이가 핵심적인 요소임을 이해하고 주어진 조건을 만족하도록 하기 위하여 각각을 어떻게 조정할 것인지 계획하여 실행할 수 있다.

5×5 점판을 준비하고 다음과 같은 문제를 각자 또는 협동학습으로 해결한다.

- 넓이가 2인 삼각형을 만들어 봅시다. 모두 몇 가지나 만들었습니까? 각각의 경우에 밑변과 높이의 길이를 확인해봅시다(두 못 사이의 간격을 단위 없이 1로 표시한다).
- 밑변의 길이가 3일 때 만들어지는 삼각형의 종류를 생각하고 넓이는 어떻게 나올 수 있는지 써라.
- 높이의 길이가 5인 삼각형의 종류와 이 조건에서 가능한 넓이의 크기는?



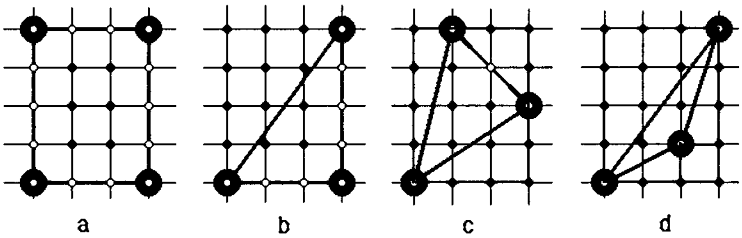
<그림 21>

이 점판에서 넓이가 1, 2, ⋯ , 10인 삼각형을 만들 수 있는지 불가능한 경우가 있다면 어떤 것인지 확인하는 것도 좋은 탐구 과제이다. 물론 왜 만들 수 없는지 그 이유를 찾아보도록 하여야 한다. 이 활동은 학생들로 하여금 삼각형의 넓이 공식, 특히 밑변과 높이의 변화에 대하여 좀더 주목하게 할 것이다. 이 과제를 약간만 변형하면 사각형에 대한 탐구 과제를 만들 수 있다.

2) 귀납 추론의 기회

널리 알려진 Pick의 정리[5)]를 상위권 학생들을 위한 탐구 과제로 구성할 수 있다. 다음 사이트에 가면 학생들이 직접 점판 위에 다각형을 만들고, 그 도형의 넓이를 확인할 수 있다. 학생들은 다각형의 경계에 있는 못의 수, 내부에 있는 못의 수, 넓이 사이의 관계를 확인하고 귀납적으로 추론함으로써 간결한 식으로 정돈할 수 있다:

http://www.cut-the-knot.com/ctk/Pick.html



<그림 22>

<그림 22>에서 확인된 바를 표로 나타내면 다음 <표 3>과 같다. 여기서 경계의 못의 수를 고정시키고 내부의 못의 수를 변화시키면서 넓이를 구하거나, 내부의 못의 수를 고정시키고 경계의 못의 수를 변화시키면서 넓이를 구하면 일정한 관계가 성립함을 알 수 있다. 경계의 못의 수를 고정시키고 내부의 못을 하나씩 늘려나가면 넓이가 1씩 증가한다는 것, 내부의 못을 고정시키고 경계의 못을 하나씩 늘려나가면 넓이가 0.5씩 증가한다는 것을 확인할 수 있다. 이들 정보를 체계적으로 관리하지 않으면 수학적으로 정돈하기 어렵고 결국 Pick의 정리도 발견하기 어렵다.

---

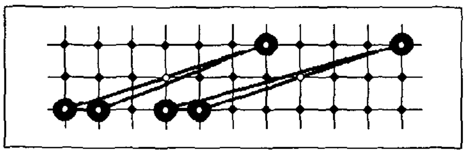
5) 점판에 만들어지는 다각형의 넓이에 관한 공식으로 A(P) = I(P) + B(P)/2 - 1 을 가리킨다 (A(P)는 만들어진 도형의 넓이, I(P)는 도형의 내부에 있는 못의 수, B(P)는 경계에 있는 못의 수).

<표 3>

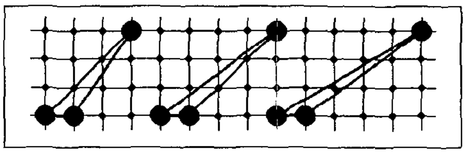
	경계의 못의 수	내부의 못의 수	넓이
a	14	6	12
b	8	3	6
c	4	4	5
d	3	2	2.5

3) 공식 음미의 기회 2

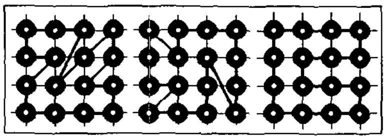
삼각형의 넓이를 구하는 공식은 직사각형의 넓이 공식에 비하여 그 타당성에 대한 직관의 역할이 미미하다. 삼각형의 변이나 내부에 어떤 조작을 가하여 얻어낸 공식이 아니라 평행사변형과의 관련을 통하여 얻은 것이기 때문이다. Pick의 정리를 학습한 후라면 삼각형의 넓이 공식에 대한 음미를 다른 각도에서 할 수 있다. 예를 들어, <그림 23>에 있는 두 삼각형은 밑변과 높이가 같으므로 넓이도 같다. 이것을 Pick의 정리에 근거하여 설명할 수 있다. 그림에서 확인할 수 있듯이 두 삼각형의 모양은 다르지만 경계에 있는 못의 수가 4개로 같으며 내부에는 못이 없다. 그러므로 넓이가 같은 것이다. 마찬가지로 <그림 24>에서도 밑변의 길이와 높이가 같은 세 삼각형의 넓이가 같은 것을 Pick의 정리로 설명할 수 있다.



<그림 23>



<그림 24>



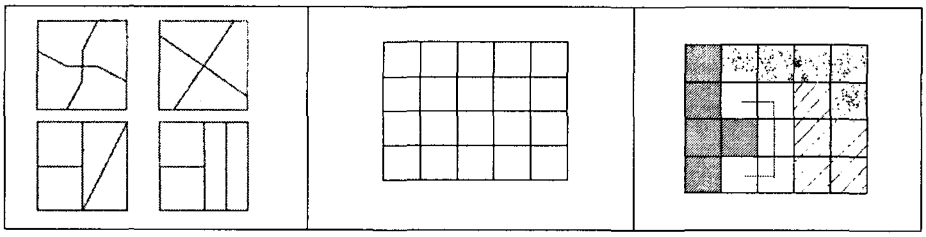
<그림 25>

<그림 25>의 세 도형 가운데 가장 넓이가 큰 것은 어느 것인가? Pick의 정리를 모른다면 각각의 넓이를 구하여야 할 것이다. 도형이 복잡할수록 넓이를 구하는 과정도 쉽지 않을 것이다. 그러나 Pick의 정리를 사용하면 이 세 도형의 경계에 있는 못의 수와 내부의 못의 수에 주목하고, 그 결과 모두 넓이가 같음을 쉽게 확인할 수 있다. 이 과제를 다소 변형하면 여러 가지 흥미로운 수행평가 문항을 제작할 수 있을 것이다 (http://www.cut-the-knot.com/ctk/Pick.html).

4. 여러 가지 넓이 관련 문제

1) 도형의 분할 문제

정사각형을 <그림 26>과 같이 넓이가 같은 4개의 도형으로 분할할 수 있다. 처음에는 합동인 도형으로만 분할하려고 하지만 점차 모양이 같지 않아도 넓이가 같을 수 있다는 것에 주목하여 다양한 답을 낼 수 있을 것이다. 만약 <그림 27>와 같이 모눈종이 위의 직사각형이 제시되었다면 다양한 방법의 분할이 또한 가능하다. 학생들에게는 직관적으로 넓이보다 합동인 도형으로의 분할이 익숙하기 때문에 이러한 경험은 그 나름의 의의를 가질 수 있다.

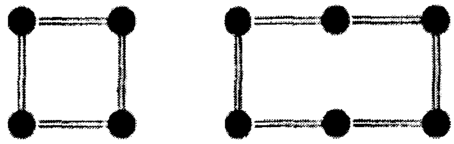


<그림 26> <그림 27> <그림 28>

<그림 28>은 <그림 27>의 직사각형을 넓이가 같은 4개의 도형으로 분할하라고 하였을 때의 한 가지 답이다. 만약 넓이가 같은 7개의 도형으로 분할하라고 하면 가능한가? 불가능하다면 왜 그런가? 학생들에게 이에 대하여 탐구하도록 하는 것도 수행평가의 과제가 될 수 있다.

2) 성냥개비를 활용한 문제

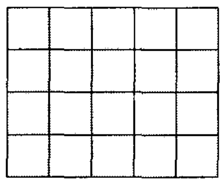
성냥개비는 수학 교구가 많지 않은 현재의 상황에서 그나마 수업에 활기를 불러일으킬 수 있는 재료이다. 물론 학생 통제의 문제는 언제나 교사의 몫으로 남는다. 아래 그림과 같이 성냥개비 4개로 만들어지는 정사각형의 넓이를 1이라고 하면, 성냥개비 6개로는 넓이가 2인 모양을 만들 수 있다. 성냥개비 12개로 넓이가 9, 8, 7, 6, 5, 4인 모양을 만들어 보도록 할 수 있다(이용률, 1998, p. 178).



<그림 29>

3) 둘레의 길이가 고정되었을 때 최대 또는 최소 넓이를 가지는 도형 찾기

오른쪽 그림의 도형의 둘레는 18이다. 이와 같이 정사각형 타일을 이용하여 둘레가 18인 직사각형을 만들 때 넓이가 최대 또는 최소인 것을 찾을 수 있다(NCTM, 1989, p. 150). 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 놓으면, 둘레의 길이는 2a + 2b 이며 넓이는 ab로 표현된다는 것을 확인할 수 있을 것이다. 여기서 a + b = 9라는 것을 활용하여 ab값의 변화를 표에 기록하고 그 결과에 터하여 구하는 문제를 해결할 수 있다. 중학교 수준에서는 이차함수의 최대, 최소 문제로 보다 적극적으로 탐구될 수 있는 문제이며, 초등학교에서는 구체적인 수값을 기록하여 문제를 해결할 수 있으나 고차의 사고를 필요로 하기 때문에 비교적 상위권에 속하는 학생들에게 적합한 문제로 보인다.



<그림 30>

4) 넓이가 고정되었을 때 최대 또는 최소 둘레를 가지는 도형 찾기

이번에는 반대로 넓이가 고정된 도형의 둘레의 길이를 변화시켜볼 수 있다. 현재 제 7차 교육과정에 따른 교과서의 「재미있는 놀이, 문제해결」 코너에서 다루고 있는 문제도 넓이를 고정시켜놓고 여러 가지 도형을 그려보도록 하고 있다. 이 놀이는 2명씩 짝을 지어 하도록 되어 있으나 각자 1부터 6의 넓이를 가지는 여러 도형을 그리도록 할 수도 있으며, 다음과 같이 변형할 수도 있다.

문제: 넓이가 3인 도형 가운데 둘레의 길이가 최대인 것, 최소인 것은?

둘레의 길이가 최대이려면 다각형의 변의 수가 늘어나야 하며, 대각선을 많이 활용할 수 있어야 한다. 학생들은 여러 가지 도형을 그려보고 서로 비교하면서 간단하지만 의미 있는 추론을 경험할 수 있다.

Ⅴ. 교사를 위한 탐구 과제

교사는 언제나 잘 가르치기 위하여 고민한다. 그러나 가르치는 일은 단순하지 않기 때문에 늘 복잡하고 모호한 결론을 경험하게 된다. 본 고에서도 다각형의 둘레와 넓이에 관한 수업 아이디어를 가능한 한 풍부하게 제시하고자 노력하였지만 여전히 교사에게 많은 고민거리를 남겼다. 결국 완전한 수업은 언제나 불가능하며 교사는 끊임없이 학습자로 살아야 하는 것이다. 이하에서는 다각형의 둘레와 넓이에 관한 여러 가지 문제를 자유로이 제시하고자 한다. 이들 문제에 대한 교사 자신의 탐구는 수업에 직접적인 영향을 미치지 않을 수도 있으나 장기적으로는 분명히 교사 자신 뿐 아니라 그 교사로부터 배우는 학생, 수업의 분위기 등을 바꾸는 원동력이 될 것이다.

1. 유클리드 원론에서의 둘레와 넓이

먼저 원론에서 둘레 또는 경계는 "어떤 것의 끝"으로(정의 13), 도형은 "둘레나 둘레들에 둘러싸인 것"(정의 14)으로, 다각형은 "직선들로 둘러싼 도형"(정의 19)으로 정의된다. 원론에서 첫 번째로 증명한 명제는 "유한한 길이의 선분으로 정삼각형을 만들 수 있다"(정리 1)이다. 먼저 삼각형을 구체물로 도입한 후, 삼각형의 구성 요소로서의 변, 삼각형을 이해하는 수단으로서의 둘레를 도입하는 학교수학의 관점은 원론의 관점과 정반대의 것임을 확인할 수 있다.

원론의 1권과 2권에서는 도형의 넓이에 관한 다양한 논의를 제시한다[6]. 현재 학교수학에 반영되어 있는 것도 있고 전혀 반영되지 않은 것도 있다. 이하에서는 그 가운데 넓이 개념의 도입과 전개의 주요 흐름을 보여주는 1권의 내용을 소개하고자 한다[7].

[원론 1권의 넓이 관련 논의]

<명제 34> 평행사변형에서 대변의 길이는 같고, 대각의 크기도 같다. 이 때 대각선은 넓이를 이등분한다.

<명제 35> 공통 밑변을 가지는 두 평행사변형이 있다. 그 밑변의 대변이 한 직선 위에 있다면 이 두 평행사변형의 넓이는 같다(<그림 31> 참고).

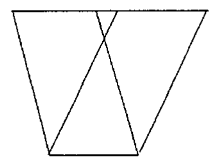
---

6) 이해를 돕기 위하여 「이무현 역 (1997)」 에 제시된 내용을 현대적인 용어로 바꾸어 제시할 것이다.

7) 2권에서는 직사각형과 정사각형의 넓이에 관한 흥미로운 내용이 제시되어 있다. 예를 들어, "임의의 다각형이 주어졌을 때, 그것과 넓이가 같은 정사각형을 만들 수 있다"(정리 14)와 같은 문제는 교사로서 도전해볼 만하다.

<명제 36> ~ <명제 40>은 <명제 35>와 유사하게 두 평행선 사이에 놓인 평행사변형들, 삼각형들의 넓이가 각각 같다는 것, 또는 넓이가 같으면 평행선 사이에 놓여 있다는 것을 다루었다.

<명제 41> 밑변이 같고 같은 평행선 사이에 놓여 있다면 평행사변형의 넓이는 삼각형 넓이의 2배이다.



<그림 31>

<명제 42> ~ <명제 45>는 주어진 삼각형과 같은 넓이의 평행사변형을 작도하는 등, 넓이에 대한 조건을 주로 평행사변형에 반영하여 작도하는 것을 다루고 있다.

<명제 47>과 <명제 48>은 모두 피타고라스 정리와 관련되며 넓이 개념을 사용하여 증명한다.

원론에서는 도형의 넓이에 관하여 다양한 추론을 시도하고 있으며, 이 때 "두 평행선 사이에 놓인 삼각형, 평행사변형"은 핵심적인 논의 대상이고 추론의 근거였음을 알 수 있다. 이와 같은 논의는 본고에 소개된 활동들과 밀접한 관련을 맺는다.

2. 질문들

다각형의 둘레의 길이와 넓이에 대한 학생들의 질문은 다양한 각도에서 제기될 수 있다. 때로는 교사를 난처하게 하는 질문도 있다. 이에 대한 설명을 어떻게 하고 있는지 또는 할 것인지 생각해볼 필요가 있다.

1) 넓이가 0인 선분이 모여서 어떻게 넓이가 0이 아닌 면을 만드는가?

이 질문은 "길이가 0인 점들이 모여서 길이가 0이 아닌 선분을 어떻게 만드는가?"와 일맥상통한다. 수학을 계속 배운다고 해서 알게되는 것도 아니기 때문에 교사로서는 무어라고 대답하기가 곤란하다. 아마 대부분의 교사들이 "그렇게 정하지 않으면 안 되니까"라는 식의 대답을 하고 있을 것이다. 이 질문에 대한 간접적인 논의는 사실 대부분의 기하학 책에서 찾아볼 수 있다. 학생들에게 들려줄 수 있는 수준의 설명은 아니지만 다음과 같은 논의를 교사로서 확인하고 음미할 필요가 있다:

유클리드의 기하학은 우리의 현실 세계, 곧 우리가 살고 있는 공간을 설명해 주는 기하학이지만 반드시 그런 것만은 아니다. 그의 기하학에는 현실 세계를 떠난 추상적 세계를 반영하는 예가 있는데, "점"이라는 개념이 그것이다. 유클리드의 점은 크기가 없어 우리가 눈으로 확인할 수 없는 무정의 용어이다. 그러나 이 점들이 연속적으로 모여 있는 대상을

선으로 정의하고 있다. 곧 선은 두 점을 연결하는 무한 개의 점들의 모임으로 두께가 없는 대상이다. 실제로 우리는 이 개념에 들어맞는 대상을 주위에서 발견할 수가 없다. … 이렇듯 그의 기하학에 등장하는 대상들은 우리의 눈이나 손으로 지각할 수 있는 구체적인 사물이 아니라, 두께도 없고 색깔도 없으며 물체가 갖는 특성인 분자들의 결합력이나 어떤 구조도 갖지 못한 무형의 것들이다. 단지 인간의 머리 속으로만 지각할 수 있는 추상적인 존재라는 말이다(박영훈, 2000, pp. 65-66).

2) 왜 삼각형의 넓이와 직사각형의 넓이를 구하는 방법이 다른가?

이 질문은 Dr. Math라는 유명한 Q/A 코너에서 힌트를 얻어 작성한 것이다. 학생들의 질문 가운데에는 이와 같이 너무 당연해서 대답하기 곤란한 것도 있다. 길이를 재는 방법은 도형에 상관없이 같은데 삼각형과 직사각형, 사다리꼴의 넓이를 구하는 방법은 다르다는 것이 학생 입장에서 이해하기 어려울 수 있다. 이에 대한 답을 대략적으로 쓰면 다음과 같다:

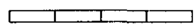
삼각형의 넓이와 직사각형의 넓이를 구하는 것은 서로 다른 문제이기 때문에 풀이 방법이 물론 다르다. 구하는 답이 다르므로 그 답을 얻는 풀이 방법도 당연히 다르다. 다른 방법으로 다음과 같이 설명할 수도 있다. (직사각형을 그림으로 제시하고 대각선에 의하여 삼각형 2개로 분할되는 것을 확인하도록 한다. 삼각형 2개의 넓이가 곧 직사각형의 넓이임을 설명한다.) 여기서 삼각형의 넓이를 직사각형의 넓이 구하는 공식에 의하여 구하면 잘못된 답을 얻는다. 앞의 그림에서 각 삼각형의 넓이는 전체 직사각형 넓이의 절반임을 알 수 있다 (http://forum.swarthmore.edu/dr.math/problems/harris4.30.96.html).

넓이에 대한 직관이 분명하게 발전되지 않기 때문에 이러한 질문이 생길 수 있다. 어떤 도형의 넓이에 대한 어림은 어떤 선분의 길이에 대한 어림에 비하여 분명히 어려운 문제이다. 다양한 도형 각각의 넓이를 구하는 것은 각각 새로운 문제상황이며, 주어진 조건과 새로이 탐구를 통하여 얻은 정보를 바탕으로 하여야 하는 것이지 간단하게 알고리즘으로 정돈되는 것이 아니다.

3) 다각형의 둘레의 길이와 넓이 사이에는 어떤 관계가 성립하는가?

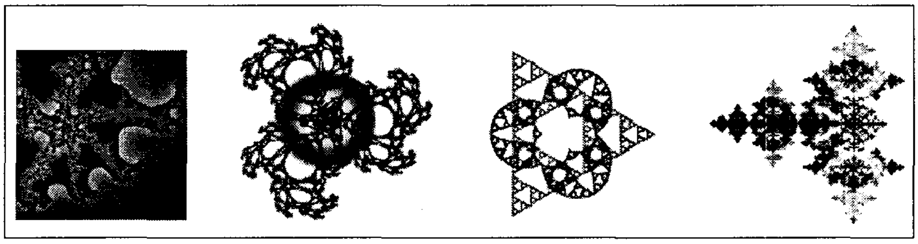
다각형의 둘레의 길이와 넓이 사이에는 특별한 관계가 성립되지 않는다. 그럼에도 불구하고 둘 다 평면 도형을 대상으로 하는 측정 활동의 결과를 나타내기 때문에 학생들은 종종 어떤 관계를 찾는다. 이 질문 역시 Dr. Math에서 자주 다루어지고 있으며, 그 곳에서 제시하는 답은 다음과 같다:


<그림 32>


<그림 33>

<그림 32>는 둘레의 길이가 10인 직사각형이다. 이것을 <그림 33>과 같이 좌우로 잡아 늘이면 둘레의 길이는 같은데 넓이는 줄어든다는 것을 확인할 수 있다. 이렇게 하면 넓이가 0에 가깝고 둘레의 길이는 10인 도형도 만들 수 있다. 둘레의 길이와 넓이 사이에는 특별한 관계가 성립되지 않는다는 것을 알 수 있다.
(http://forum.swarthmore.edu/dr.math/problems/jessica.5.1.01.html).

학생들에게 당장 설명하기는 어렵지만 곡선의 길이는 무한이면서도 그 곡선이 그리는 도형의 넓이는 0인, 그러나 평면을 아름답게 덮는 프랙탈 도형에 대하여 교사들은 관심을 가져도 좋을 것이다. 이하의 그림들은 모두 한 사이트에서 제공하고 있는 것이다(http://astronomy.swin.edu.au/pbourke/fractals/). 이들 도형을 보면 수학적 논리에 의하여 정의된 넓이 개념과 직관적으로 가지게 되는 넓이 개념 사이의 큰 간격을 확인할 수 있다.


<그림 34>

Ⅵ. 맺는 말

수업을 준비하는 것은 언제나 어렵다. 고려하여야 할 요소가 너무나 많기 때문이다. 충실하게 준비해도 실제로 수업을 하고 나면 아쉬움이 남게 마련이다. 본 고에서는 다각형의 둘레와 넓이에 관하여 교사에게 참고가 될만한 자료들을 거칠게 구성해 보았다. 이 자료가 수업에 얼마나 도움이 될 것인가 하는 것은 전적으로 신중하고 세밀한 교사의 태도와 실천에 달려 있다. 지혜로운 적용과 그 결과에 대한 반성으로 의미 있는 수정・보완이 이루어지기를 기대한다.

참고문헌

강문봉 외 (1999). 초등 수학 학습지도의 이해. 서울: 양서원.

강지형 외 (1999). 초등수학교육. 서울: 동명사.

교육부 (1997). 수학 4-2. 국정교과서주식회사.

______ (1997). 수학 5-1. 국정교과서주식회사.

______ (2001). 수학 5-가 (실험용). 대한교과서주식회사.

______ (2001). 수학 5-나 (실험용). 대한교과서주식회사.

박영훈 (2000). 아무도 풀지 못한 문제. 서울: 지호.

이무현 역 (1997). 기하학원론 -가-. 서울: 교우사.

이용률 (1998). 지도원리와 사례. 서울: 경문사.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics,* 구광조, 오병승, 류희찬 공역 (1992). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향, 서울: 경문사.

C. W. Schminke (1981). *Math Activities for Child Involvement(3rd ed).* Allyn and Bacon, Inc.

Charles Lovitt & Doug Clarke (1992). *The Mathematics Curriculum and Teaching Program: Activity Bank.* vol. 1. Carlton: Curriculum Development.

Besty Franco (1995). *Key to Measurment.* Berkeley: Key Curriculum Press.

http://astronomy.swin.edu.au/pbourke/fractals/

http://forum.swarthmore.edu/dr.math/problems/

http://www.cut-the-knot.com/ctk/Pick.html