

공간과제의 지도 방안에 관한 연구

- '2-가'와 '3-가' 단계의 공간감각 기르기 소 영역을 중심으로 -

한 기 완 (풍덕초등학교)

1. 서론

기하는 우리가 살고 있는 세계를 질서 정연한 방법으로 표현하고 설명하는데 도움을 준다. 또 기하에 대한 지식, 관계 및 통찰은 일상 생활에 유용하며, 수학의 다른 주제와 밀접한 관계를 맺고 있기 때문에 아주 중요하다. 아동들은 원래 기하에 관심이 많으며 흥미를 느끼며 기하 능력이 종종 數기능을 증가하기도 한다.

20세기 초의 수학교육 근대화운동 이후 오늘날까지 유클리드 원론을 근간으로 하는 기하 교육을 개선하려는 줄기찬 노력이 계속되어 왔다. 그러나 수학교육현대화 열풍이 지나간 지금도 그 지도 내용과 지도 방법에 대한 뚜렷한 개선 방안이 제시되지 못하고 혼미한 상태가 지속되고 있다. 그 원인은 무엇보다도 기하학의 내용과 관점이 매우 다양화되어 기하 교육에 대한 견해가 일치되기 어려운 상황이 야기되었기 때문이다(우정호, 1998). Freudenthal(1973)은 '기하란 무엇인가?'라는 질문에서, 역사적으로 볼 때 가장 높은 수준에서 연역적으로 조직된 기하만이 기하라고 불리는 수학의 특정 분야를 총칭하는 것처럼 여겨져 왔지만, 교육적으로 의미 있는 기하는 가장 낮은 바닥 수준에서의 기하이며 그것은 학생이 살고, 움직이고, 숨쉬는 그런 공간을 학생들이 이해하는 것으로 연역적 체계로써의 기하를 가르치기보다는 공간을 이해하는 측면에서 기하 교육이 이루어져야 함을 강조했다(pp.401-511). 이러한 변화에 따라 1980년 ICMI 보고서에서는 수학교육 목표의 하나로서 공간 능력이 개발되어야 한다고 주장하고 있다. 공간 능력은 우리가 가지고 있는 고유의 기하학적 세계를 해석하고, 이해하는데 필요한 것으로 2차원과 3차원의 도형과 그들의 특징에 대한 직관과 통찰, 도형 사이의 상호 관계를 인식함으로써 촉진될 수 있다. 따라서, 수학에서 기하를 가르치는 목적 중에 하나를 공간 능력의 신장이라고 본다면 일차적으로 공간감각을 개발해야 한다.

공간감각은 공간 지각력 또는 공간 시각화를 포함하고 있으며 부분적으로는 환경과 사물에 대해 갖게 되는 직관이라고 말할 수 있다. NCTM(1989)에서도 도형의 변화를 공간 감각의 중요한 측면으로 보고, 초등학교에서는 비형식적인 방법으로 일상생활에서 접하는 대상과 다른 구체적 자료를 사용한 조사, 실험, 탐구를 통하여 여러 위치에서 도형을 시각화하고, 그려보고, 비교하는 활동을 강조하고 있다.

우리나라에서도 이러한 시대적 조류를 반영하여 7차 교육과정(교육부, 1997)에서 공간 감각을 기르기 위하여 1-나 단계에서 점판에서 평면도형 만들기, 2-가와 3-가 단계에서 도형 옮기기, 뒤집기, 돌리기, 3-나 단계에서 거울에 비치는 상 관찰하기, 4-나 단계에서 주어진 도형으로 여러 가지 모양 만들기, 5-나 단계에서 여러 가지 모양으로 주어진 도형 덮기, 그리고 6-가 단계에서는 주어진 나무를 쌓기 나무로 만들기 등을 지도내용으로 선정하여 교과서에 그 내용을 반영하고 있다.

이와 같이 제 7차 수학과 교육과정에 따른 영역별 주요 내용 변화 중에 하나는 도형 영역에 공간감각을 기르기 위한 여러 가지 활동을 체계화하여 추가하였다는 점이다. 그러나 공간감각 개념에 대한 명확한 분석 및 공간과제에 대한 지도 방안에 대한 연구가 부족한 실정이다. 7차 교육과정에서 공간감각을 기르기 위한 학습 내용이 처음으로 도입되다 보니 일선 현장에서는 공간감각 영역을 지도하는데 많은 어려움을 겪고 있다. 실제로 교육과정 해설서에조차도 공간감각에 대한 정확한 용어의 정의도 없이 공간감각이라는 말을 사용하고 있으며, 단계별 공간과제의 구성에 있어서도 수준이 고려되지 않고 제시되어 있는 경우가 있다. 또한, 외국에서 연구한 내용을 단편적으로 소개하다 보니 공간감각을 기르기 위한 공간과제의 개발 및 지도 방법에 대하여 정확한 논리적 전개를 찾아보기가 힘들다. 그러나, 공간감각을 기르기 위해서 어떠한 과제를 어떠한 전략을 사용해서 어떻게 가르쳐야 하는지는 아주 중요한 문제이다. 이에 대해 나귀수(1996)는 수학 문제 해결에서 '공간적 과제'를 구성하는 요소와 문제 해결 전략이 어떤 상황에서 공간적 전략으로 간주될 수 있는가에 대한 보다 심층적인 연구의 필요성을 제기하면서, 수학교육자들이 어떤 특별한 풀이 전략이 성격상 공간적인가 아닌가를 결정하는 기준과 또 어떤 전략이 어느 정도로 공간적인가를 결정하는 절차에 대해서 합의하여 공간적 전략이 사용될만한 공간과제들을 고안해야 하며 아울러 공간적 과제의 지도방법을 개발할 필요가 있다고 주장한다.

공간과제를 체계적으로 분류한 학자는 Wattanawaha로 그의 공간과제에 대한 DIPT 분류 체계는 공간적 과제가 요구하는 사고의 차원(Dimension), 내면화(Internalization)의 정도, 과제의 답이 제시(Presentation)되어야 할 양식, 과제가 요구되는 사고의 유형(Type)의 네 가지의 독립적인 특성으로 요약될 수 있다는 가정에 근거하고 있다(Clements, 1983). 이와

같은 분류에 의해서 공간과제를 만든다면 효과적으로 공간감각을 기를 수 있을 것이다.

본 연구는 우선 문헌 연구를 통해서 공간감각에 대한 개념을 분석하고, 이를 바탕으로 공간감각을 기르기 위한 공간과제의 지도 방안을 고찰하여 7차 교육과정에서 제시하고 있는 공간감각 영역에 대한 구체적인 교수-학습 지도 방법을 모색하는데 그 목적이 있다.

II. 이론적 배경

1. 공간감각

19세기 페스탈로찌에 의해 도형지도의 도야적 가치가 강조되고, 20세기 초에 Treutlein에 의해서 직관기하의 교육적 가치가 주장된 이래 오늘날 도형의 개념과 그 성질에 대한 비형식적인 지도는 초등학교 수학과 중학교 저학년 수학의 중요한 내용이 되었다(우정호, 1998). 그러므로, 학교에서 가르치는 기하는 공간 지각력의 배양, 물리적 세계에 대한 이해, 다른 수학적 개념의 표현 수단인 기하학적 언어, 연역적인 이론 체계 등 기하의 여러 측면과 여러 가지 접근 방법이 균형 있게 고려되어야 한다.

특히, 요즘의 수학교육은 비형식적인 지도에 의하여 획득되는 “감각”의 개발에 중점을 두고 있어서, 수감각과 공간감각을 개발하는 것이 초등학교 수학교육에서 중요한 목표로 대두되고 있다. 이러한 측면에서, 제 7차 수학과 교육과정의 6개 영역 중에서 규칙성과 함수 영역에서의 ‘규칙 찾기’와 도형 영역에서의 ‘공간감각 기르기’라는 소 영역이 새롭게 제시되고 있다. 물론 초등학교 수준에서는 비형식적인 지도에 의하여 획득되는 감각적 측면을 중시하기 때문에 ‘공간감각’이라는 용어를 사용하는 것이 더 타당할지도 모르지만 그동안 이루어진 대부분의 연구에서는 ‘공간능력’이라는 말을 많이 사용하고 있다.

공간능력에 대해서는 Linn과 Peterson & Macgee의 틀이 주목할 만하다. Linn과 Peterson(1985)은 공간능력을 공간지각능력, 회전능력, 공간시각능력으로 분류하였다. 그들에 따르면, 공간지각능력이란 중력적 운동, 감각적 단서를 통해 공간 사이의 관계를 정확하게 인지할 수 있는 능력이며, 회전 능력이란 2차원 혹은 3차원의 물체를 회전하였을 때의 상태를 정확하게 파악할 수 있는 능력, 공간 시각화 능력이란 주어진 공간적 정보를 머리속에서 가시화하여 그려 볼 수 있는 능력이라고 한다.

Macgee(1979)는 공간적 능력을 크게 공간시각화, 공간방향화로 구분하고 있다. 공간 시각화는 그림 상으로 제시된 대상물을 마음속으로 조작하거나, 회전하거나, 방향을 바꾸는

능력으로 주어진 물체를 심상에 의하여 회전시키거나 재배열 혹은 조합시키는 능력을 말한다. 공간 방향화는 공간적 패턴 안에 있는 요소의 배열을 이해하고, 제시된 공간 형상의 방향을 변화시켜도 혼란되지 않는 능력을 말한다.

그러나 Tartre(1990)는 공간적 시각화를 회전과 변환으로, 공간적 방향을 재조직된 전체와, 전체와 부분으로 좀더 세분화하여 다음과 같이 분류하였다(강순자·고상숙, 1999, pp.180에서 재인용).

■ 공간적 시각화

회전 : 마음속으로 임의의 물체를 회전시켜보아 원래의 물체와 같은지를 결정하는 것으로 2차원에서의 회전과 3차원에서의 회전이 있다.

변환 : 마음속의 상의 따로 떨어진 부분들의 서로 다른 조각들을 통하여 원하는 또 다른 상을 형성하는 것이다. 여기에는 2차원에서 2차원으로 변환, 2차원에서 3차원으로 변환, 3차원에서 2차원으로 변환이 있다.

■ 공간적 방향

재조직된 전체 : 한 표현에서부터 또 다른 표현에 이르기까지 인지적 변화 또는 그림으로 된 표현의 조직과 이해를 포함한다. 여기에는 애매한 그림과 복합적인 표현이 있는데 애매한 그림은 한 가지 관점에서 한 개 이상의 물체에 대한 그림으로 된 표현을 인식하는 것으로서 2차원으로 표현된 물체를 3차원으로 인식하는 것이 여기에 해당된다. 복합적인 표현은 두 가지 표현 사이에서 발생하는 변화를 인식하는 것으로서 다른 각도에서 일어나는 변화까지 이해하는 것이 여기에 해당된다.

전체와 부분 : 여기에는 전체에서 부분 찾기와 부분에서 알맞은 전체를 생각해 내기가 있는데 이 두 가지가 대조적으로 보이지만 함께 작용하는 경우도 종종 있다.

이상에서 살펴본 Linn과 Peterson & Macgee, 그리고 Tartre의 세 가지 견해를 종합해 보면 공간 능력이란 공간에 있는 물체에 가해진 어떠한 물리적인 변화를 인지하고 원래의 물체와 물리적 변화가 가해진 물체 사이의 공통점과 차이점을 인식할 수 있는 능력이라고 볼 수 있다. 특히, 물리적인 변화는 시각적으로 인지되기 때문에 시각적 능력은 공간 능력에서 아주 중요한 요소로 세 가지 견해에서 모두 중요한 위치를 차지하고 있다. 특히, 우리가 얻는 모든 정보의 85%가 시각적인 체계를 통하여 들어온다는 연구 결과(Grande, 1987)를 인정한다면 공간능력에서 시각적 능력은 더욱 중요하다.

어린이들은 태어날 때부터 보고, 듣고, 만지고, 움직임을 통해 공간적인 경험을 하게 되므로 공간에 대한 많은 직관적인 생각을 가지고 있다. 따라서, 공간으로부터 자극을 해석하고 인식하며, 선행 경험과 자극을 연결하며 자극을 해석하는 감각적인 능력이 우선적으로

발달하게 되므로 초등학교에서는 비형식적인 감각을 통한 공간영역의 지도가 효과적일 것이다. 이와 같은 공간감각을 기르기 위해서 아동들은 기하적인 관계성(방향, 방위, 그리고 공간에서의 사물의 투시; 도형과 사물들의 상대적인 모양과 크기)에 초점을 둔 많은 경험을 해야만 한다(NCTM, 1989). 아동들은 공간에 대한 많은 직관적인 사고를 가지고 학교에 들어가는 데 이는 그들의 환경에 있어서의 초기 경험들이 대부분 언어 이전의 행동으로 공간과의 상호작용에 의해 이루어졌기 때문이다. 즉, 학생들은 처음에 언어의 도움 없이 주어진 세상과 조우하고 탐구하게 된다. 아동들은 그들이 사는 공간에서의 조작물과 물체들을 다루는 활동으로부터 자연스럽게 공간적인 과제를 접하게 되며, 심리학적으로 그리고 수학적으로 도움을 받게 된다. 평행이동과 회전의 기본적인 생각은 아동들이 공간을 탐구하는데 기본이 되며, 이러한 사고를 기하학적인 상황에 두도록 하는 것이 초기 학년에서의 수학적 개념을 계발시키는 출발점으로 해야 한다.

특히, 초등학교 기하는 현실 상황이나 격자판, 기하판 등과 같은 자료를 다루는 공간적인 경험을 통해 형성된 공간직관을 수학화하도록 하여 기하학적 문맥으로 “보는” 기하가 되도록 해야 하며, 형성된 내적인 시각에 “응축핵”을 제공하는 설명이나 그림과 같은 기하학적 표현 수단이 획득되고, 학습 수준의 상승과 더불어 기하학적 구조가 드러나도록 하는 방안을 연구해야 한다(우정호, 2000).

2. 공간과제의 지도

1) 공간과제

공간감각을 기르기 위해서 어떠한 과제를 가지고 어떠한 전략을 사용해서 어떻게 가르쳐야 하는지는 아주 중요한 문제이다. 공간과제를 체계적으로 분류한 학자는 Wattanawaha로 그의 공간과제에 대한 DIPT 분류 체계는 공간적 과제가 요구하는 사고의 차원(Dimension), 내면화(Internalization)의 정도, 과제의 답이 제시(Presentation)되어야 할 양식, 과제가 요구되는 사고의 유형(Type)의 네 가지 독립적인 특성을 가지고 있다. Wattanawaha의 분류 체계는, 과제에 대한 개인의 반응을 분류한 것이 아니라 과제를 분류했다는 점에서 비판을 받지만, 그럼에도 Wattanawaha의 DIPT 분류 체계와 함축적인 능력 정의는 공간 능력에 관심 있는 모든 연구자들이 숙고할 만하다(나귀수, 1996, pp.159).

Wattanawaha의 DIPT 분류 체계는 <표II-1>과 같다(나귀수, 1996, pp.159-160에서 재인용). 여기서, 예를 들어 (2, 1, 2, 1)이라는 분류 기호를 갖는 문제는 2차원 사고를 요하는 문제로 정신적으로 조작되지 않는 시각 이미지, 시각 이미지의 그림이거나 시각 이미지의

정확한 기술이어야 하는 답, 문제에서 암묵적으로 정의되기는 하지만 분명하게 정의되지는 않는 정신적 조작의 응용, 이 네 가지가 요구되는 문제이다.

<표Ⅱ-1> Watanawaha의 DIPT 분류표

기호	이름	변인 라벨과 정의
D	차원 (변인 3개) 1, 2, 3	1: 1차원 사고를 요하는 문제 2: 2차원 사고는 요하지만 3차원 사고는 요하지 않는 문제 3: 3차원 사고를 요하는 문제
I	내면화 (변인 3개) 0, 1, 2	0: 시각적 수준에서 문제를 해결할 수 있다. 시각적 이미지를 만들 필요가 없거나, 필요한 시각적 이미지는 주어진 자극의 '복사판'이거나 그 자극이 전체나 일부분의 단순한 변형에 해당하는 이미지이다. 1: 시각적 이미지를 만들 필요가 있다. 그러나 문제를 해결하기 위해서 그 시각적 이미지를 마음에서 변형할 필요는 없다. 2: 시각적 이미지를 만들어야 할 뿐만 아니라 문제를 해결하기 위해서는 그 시각적 이미지를 마음에서 조작하거나 변형해야 한다
P	제시 (변인 3개) 0, 1, 2	0: 답을 제시할 때 최종적인 시각적 이미지를 기술하거나 확인할 필요가 없다. 1: 답은 다이어그램 형식으로 제시되거나, 말이나 행동으로 기술되는 그림 형식이어야 한다. 2: 답은 최종적인 시각적 이미지가 그림으로 표현되거나, 말이나 다른 행동으로 묘사되어야 한다.
T	사고 과정 (변인 2개) 0, 1	0: 과제가 수행될 필요가 있는 정신적 조작을 특성화한다. 1: 과제가 정신적 조작을 특성화하지는 않지만, 결정되어야 할 정신적 조작에 대한 충분한 정보가 제시된다.

우리나라에서 일반적으로 공간과제의 소재로 많이 이용되고 있는 것은 패턴찾기, 패턴블록, 종이 접기, 탱그램, Geoboard(기하판, 점판), Tessellation, 쌓기나무(정육면체), 전개도 등이다. 그러나 이러한 과제는 위와 같이 복합적인 차원으로 제시되기보다는 대부분 단편적으로 제시된다. 구체적으로 7차 교육과정(교육부, 1997)에는 공간과제를 1단계부터 6단계까지 매 단계마다 <표Ⅱ-2>와 같이 제시하고 있다.

<표Ⅱ-2> 공간감각에 관한 단계별 주제 및 목표

단계	주 제	목 표
1-나	점판에서 평면도형 만들기	점판에서 여러 가지 삼각형, 사각형을 만들 수 있다. 점판에서 제시된 도형을 보고 그대로 만들 수 있다.
2-가	구체물이나 그림 옮기기, 뒤집기, 돌리기	구체물이나 그림의 옮기기, 뒤집기, 돌리기 등의 활동을 통하여 그 변화를 관찰할 수 있다.
3-가	도형이나 무늬 옮기기, 뒤집기, 돌리기	모눈종이에 그려진 간단한 평면도형이나 무늬의 옮기기, 뒤집기, 돌리기 활동을 통하여 그 변화를 관찰할 수 있다.
3-나	거울에 비치는 상 관찰하기	거울을 사용하여 거울에 비치는 상을 다양하게 만들어 사용할 수 있다.
4-나	여러 가지 도형 만들기	주어진 도형으로 여러 가지 모양을 만들 수 있다.
5-가	주어진 도형 덮기	여러 가지 모양으로 주어진 도형을 덮을 수 있다.
6-가	쌓기나무로 만들기	주어진 모양을 보고 쌓기나무로 만들 수 있다.

교과서에 제시된 이러한 공간과제의 지도에 대하여 7차 교육과정에 따른 교사용 지도서에는 2-가 단계(교육부, 2000)의 ‘곰’자나 ‘5’를 뒤집었을 때의 모양을 그려서 알아보도록 하거나, 3-가 단계(교육부, 2001)의 경우 단순히 ‘ㄱ’자 등을 뒤집기를 할 수 있도록 하는 것을 목표로 설정하였다. 그러나 미국의 경우 Altamuro와 Clarkson(1989)은 뒤집기 활동을 통하여 어떠한 패턴을 발견하도록 하는 것을 목표로 설정하였다. 미국과 우리나라의 공간감각을 기르기 위한 공간 과제의 차이점은 주어진 과제를 어떻게 지도하는가이다. 즉, 미국의 경우는, 어떠한 모양을 뒤집었을 때 뒤집은 모양에 초점을 맞추는 것이 아니라 어떠한 모양을 뒤집더라도 홀수 번 뒤집으면 거울에 비춘 모양이 되고, 짝수 번 뒤집으면 본래의 모양이 된다는 패턴을 발견하도록 제시하고 있다. 따라서, 우리나라 교육과정에서 제시하는 공간과제에 대하여 재고해 볼 필요가 있고, 수학교육자들이 어떤 특별한 풀이 전략이 성격상 공간적인가 아닌가를 결정하는 기준과 또 어떤 전략이 어느 정도로 공간적인가를 결정하는 절차에 대해서 합의하여 공간적 전략이 사용될만한 공간과제들을 고안해야 하며 아울러 공간과제의 지도방법을 개발할 필요가 있다.

2) 공간과제의 지도를 위한 이론들

공간감각을 기르기 위하여 공간과제를 지도하는 방법에 대하여 Mckim의 시각화 학습 3단계, Bruner의 EIS이론과 Polya를 중심으로 한 문제해결의 측면에서 살펴보고자 한다.

(1) 공간 시각화 학습을 위한 Mckim의 3단계에 의한 공간과제 지도

다음은 Mckim(1972)의 공간 시각화 학습을 위한 3단계이다.

①보기: 패턴 찾기, 크기, 모양과 공간에서 실마리 알기, 시각적 인지를 향상시키기 위한 퍼즐, 게임 이용하기

②상상하기: 시각적 회상, 마음속으로 대상을 조작하기, 구조와 추상개념을 시험하기

③생각 그리기: 학생들이 마음속의 그림을 종이에 옮겨 봄으로써 언어적 설명에 의존하지 않게 함. 낙서하듯 그리기 → 훈련된 낙서 → 사실적 그림 → 시각적으로 기억하고 있는 내용 그리기

(2) Bruner의 EIS이론에 근거한 공간과제 지도

Bruner는 아동의 지적 발달을 활동적 표현(enactive representation), 영상적 표현(iconic representation), 상징적 표현(symbolic representation)의 순서로 표현수단의 증대와 그 사이의 조정능력의 증대로 보고 있다. 학문의 기본 원리나 구조를 아동의 능력에 맞추어 구체적인 활동적 양식으로 제시할 수도 있고, 시각적 표현이나 추상적인 기호적 표현을 하여 제시

할 수도 있다는 것이다. 이때 학문의 기본원리나 구조 자체는 마찬가지로 그 표현양식만이 바뀌었다고 생각할 수 있다(김응태 외, 1988).

공간감각을 기르기 위한 공간과제 역시 Bruner의 EIS이론에 의해서 다음과 같이 전개해 볼 수 있다.

①활동적 표현(enactive representation)

활동적 표현 단계에서는 학생들이 패턴블록, 종이, 탱그램, Geoboard, 쌓기나무와 같은 구체적 조작물을 가지고 공간과제를 해결한다.

②영상적 표현(iconic representation)

구체적 조작물을 가지고 충분히 활동한 후에 구체적 조작물로 해결한 공간과제를 그림으로 그리거나 컴퓨터 환경을 이용하여 표현한다.

③상징적 표현(symbolic representation)

위와 같은 두 가지의 표현 활동을 통해서 알게된 사실을 언어적, 시각적 기호로 표현한다.

(3) 문제해결의 측면에서 공간과제의 지도

수학이 학교 교육의 교과목으로 설정된 이래 수학을 지도하는 많은 사람들은 학생들의 문제 해결 능력을 신장시키려는 노력을 계속해 오고 있는데, 이것은 문제 해결이 갖는 중요성 때문이다. Polya(1957)는 수학을 공부함으로써 얻어지는 최대의 가치는 문제를 해결하는 능력이라고 말했다. Polya(1957)의 문제해결 단계를 구체적으로 살펴 보면 <표II-3>과 같다.

<표II-3> Polya의 문제해결 단계

발견술 4단계	사 고 전 략
1단계 문제에 대한 이해	· 목표에 주의를 집중하기, · 문제의 주요부분에 주목하기, · 조건에 주목하여 문제를 조망해 보기, · 조건을 분해하여 써보기, · 그림을 그리고 적절한 기호를 붙이기
2단계 계획의 작성	· 관련된 지식을 동원하기, · 유용한 패턴 찾기, · 관련된 문제나 정리를 알아보기, · 유사한 문제를 생각해보기, · 문제를 달리 진술해보기, · 관련된 문제를 풀어보기 · 정의를 되짚어보기, · 미지인 것과 조건 및 자료를 변형하여 보조문제를 작성하여 문제를 부분적으로 해결해보기, · 진척이 없을 때 상황을 재평가해보기
3단계 계획의 실행	· 매 단계를 점검하면서 풀어나가기
4단계 반성	· 풀이 결과와 논증 과정을 점검하기, · 다른 풀이 방법을 알아보기, · 풀이 결과나 방법을 활용할 수 있는 문제를 찾아보기

이외에도 발견적 사고 전략으로 거꾸로 연구하기(분석), 단순화해보기, 유추하기, 간단하

고 쉽고 익숙한 것을 먼저 고려해보기, 문제를 전체적으로 이해한 다음 세부적인 부분에 주목하기, 문제를 형태별로 분류하기, 패턴 찾아보기, 대칭성에 주목하기, 동치인 문제를 고려하기, 극단적인 경우를 점검해보기 등이 있다.

그러나, 문제 해결의 복잡성 때문에 학생들의 문제 해결 능력을 향상시키기 위한 최상의 방법에 대하여 일반적으로 인정된 방법은 거의 없지만, 많은 연구자들이 지적하였듯이 복잡한 과제를 해결하기 위해 분석적인 전략이 필요하고, 정신적인 회전, 또는 조작이나 공간지각은 문제를 분석하기 위한 전략의 하나이다(Ben-Chaim, Lappen & Houang, 1989).

III. 공간과제의 구체적 지도 방안

본 연구에서는 앞 장에서 살펴본 이론적인 틀을 바탕으로 제 7차 수학과 교육과정에서 신설된 공간감각 기르기 소 영역 중에서 특히 '2-가'와 '3-가' 단계에 해당하는 공간과제를 중심으로 구체적인 지도방안을 제시하고자 한다.

이를 위하여, 2-가 단계와 3-가 단계 교과용 도서를 분석하여 문제점을 살펴보고 이에 따른 해결책으로 공간감각을 지도하기 위한 초기 단계로 맥킴의 3단계에 따른 시각화 지도 방안을 제시하고, 좀더 고차적인 방법으로 Bruner의 EIS이론에 따른 지도 방안을 제시하고자 한다. 마지막으로, 심화 단계에서 문제해결방식으로 공간 과제를 해결할 수 있도록 하기 위하여 문제해결과정에 따른 지도 방안보다는 직접 현장에서 사용할 수 있는 공간과제를 제시하고자 한다.

1. 7차 교과용 도서에 나타난 공간과제의 지도 방안

7차 교육과정에서는 공간감각을 기르기 위하여 2-가와 3-가 단계에서 도형 옮기기, 뒤집기, 회전하기를 지도하고 있다. 2-나 단계에서는 구체물이나 그림으로 그리고 3-가 단계에서는 모눈종이에 그려진 간단한 평면도형이나 무늬로 활동을 하도록 되어있다(교육부, 2000). 이에 대한 교과서 내용을 살펴보면 2-가 단계에서의 옮기기는 교실창문, 수학교과서, 색종이로 오린 삼각형을 여러 방향으로 옮겨보아서 달라지는 것과 달라지지 않는 것을 구분할 수 있도록 하였다. 즉, 구체물을 옮기면 위치는 바뀌나 모양은 바뀌지 않는다는 것을 알도록 하는 것이다. 2-가 단계에서 모양 뒤집기는 친구의 몸, 인형과 같은 입체적인 구체물과 숫자 '5'나 글자 '꿈'과 같은 평면적인 그림으로 뒤집기 활동을 하여서 구체물을 뒤집었을 때 변화되는 모양을 자유롭게 이야기하도록 되어 있고, 투명종이 위에 숫자 '5'나 글자

‘곰’을 쓰고 오른쪽 또는 위쪽으로 뒤집었을 때의 모양을 그리도록 되어 있다. 그런데 모양 뒤집기에 관한 3-가 단계의 교과서를 살펴보면, 모눈종이에 그려진 ‘ㄱ’자 모양을 투명종이에 그려서 뒤집어보도록 되어 있다. 2-가 단계와 3-가 단계를 비교해 보면, 3-가 단계의 ‘ㄱ’자 뒤집기와 2-가 단계의 ‘곰’자 또는 ‘5’자 뒤집기보다 쉽게 제시되어 있음을 알 수 있다.

또한, 앞에서 언급한 Mckim(1972)의 공간 시각화의 단계에 따라 분석해 보면 상상해 보는 단계가 누락되어 있다. 이러한 현상은 2-가 단계와 3-가 단계에서 모두 찾아 볼 수 있는 것으로 구체적으로 활동한 결과를 보고 단순하게 그리는 것으로 활동이 끝나버린다. 실질적으로 공간감각을 형성하기 위해서는 상상해보는 단계가 아주 중요하다. 상상하기는 구체물을 인지적으로 시각화하는데 있어서 가교 역할을 하기 때문에 이 단계가 누락되어 있다면 아무리 많은 활동을 하더라도 공간을 시각적으로 인식하는데 많은 어려움이 있을 것이다.

교사용 지도서(교육부, 2000, 2001)에 제시된 활동의 목표를 살펴보면 ‘주어진 도형을 투명종이를 이용하여 뒤집을 수 있다’라고 되어 있는데, 단순히 뒤집기 활동을 해보는 것이 목표가 아니라 뒤집기 활동을 통하여 뒤집기 전의 모양과 뒤집은 후의 모양을 비교하는 활동을 통하여 공간감각을 기르도록 해야 할 것이다. 이것을 Bruner의 EIS이론에 의해 분석해보면 활동적 표현(enactive representation)과 영상적 표현(iconic representation)만 강조하고 상징적 표현(symbolic representation)활동을 소홀히 한 것으로 볼 수 있다. 따라서, 위와 같은 두 가지의 표현 활동을 통해서 알게된 사실을 언어적, 시각적 기호로 표현하는 상징적 활동 또한 강조되어야 한다.

2. Mckim의 공간시각화 학습을 위한 3단계에 의한 공간과제의 구체적 지도 방안

Mckim(1972)의 지도 방법은 공간감각의 영역 중에서도 시각화에 중점을 둔 학습 방법으로 저학년에 알맞은 학습 방법이다. 현행교과서에서 소홀히 하고 있는 상상하기 단계를 강조함으로써 정신적 이미지를 형성하는데 도움을 줄 수 있다. 또한, 생각 그리기 단계에서 Mckim은 절대로 언어적 표현을 하지 못하게 하였는데, 규칙의 발견이나 시각적으로 나타내기 어려운 소재일 경우에는 그 특징만 언어적으로 표현하는 것도 좋을 것 같다. 2-가 단계에서는 숫자 5를 이용하여 오른쪽으로 뒤집기를 지도하고 있는데 상상하기 단계에서 다소 어려운 과제이다. 따라서 본 연구에서는 2-가 단계의 내용을 3-가 단계에 나오는 ㄱ자로 대체하여 지도해 보고자 한다. 지도의 순서와 내용은 다음과 같다.

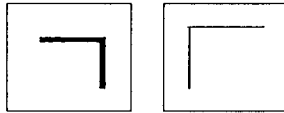
■ 보기

- 투명종이에 ㄱ자를 쓰고, 투명종이를 오른쪽으로 뒤집어 보시오.

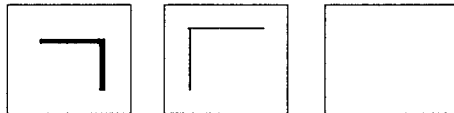


■ 상상하기

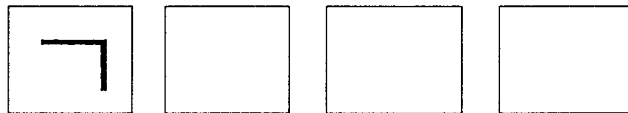
- 오른쪽으로 뒤집힌 ㄱ자를 보고 그 모양을 머리속에 떠올려 보시오.



- 오른쪽으로 뒤집힌 ㄱ자를 다시 오른쪽으로 뒤집은 모양을 상상해 보시오.



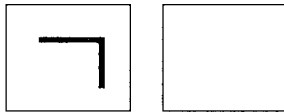
- 상상한 모양이 맞는지 확인해 보시오.
- 머리속으로 상상하며 ㄱ자를 오른쪽으로 계속해서 2번 뒤집어 보시오.



- 상상한 모양과 맞는지 확인해 보시오.

■ 생각 그리기

- 오른쪽으로 뒤집힌 ㄱ자를 머리속으로 생각하고, 그 모양을 그려보시오.



- 그린 모양이 맞는지 확인해 보시오.
- 머리속으로 생각한 모양을 말로 설명해 보시오.
- ㄱ자를 계속해서 오른쪽으로 뒤집으면 어떻게 될지 말해보시오.

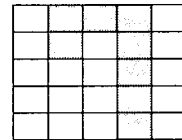
Mckim이 제시하고 있는 3단계는 공간감각 중에서 시각화 능력을 향상시키는데 초점을 맞추고 관찰하고, 상상한 내용(변환시키기)을 시각적으로 표현하는데 한정하고 있다. 그러나 의사소통의 측면에서 본다면 시각적, 언어적 표현을 병합하는 것이 더 의미가 있을 것이다.

3. Bruner의 EIS이론에 근거한 공간과제의 구체적 지도 방안

Bruner의 지도 방법은 정신적 이미지를 쉽게 형성할 수 있는 시각적 표현 능력이 갖춰진 단계에서 지도하는 것이 좋을 것 같다. 그러나 시각적 표현 능력이 어느 정도 갖추어져 있다고 하더라도 반드시 구체물을 통한 활동적 표현을 수행한 다음에 영상적, 상징적 표현활동이 이루어져야 한다. 현행 3-가 단계에서는 단순하게 변환한 도형을 그려보는 것으로 활동이 끝나고 있다. 즉, 상징적 표현 단계가 소홀히 되고 있는데 이러한 점은 보완되어야 할 것이다. 3-가 단계에 나오는 숫자 7 돌리기 과제를 Bruner의 지도 단계에 따라 해결해 보면 다음과 같다.

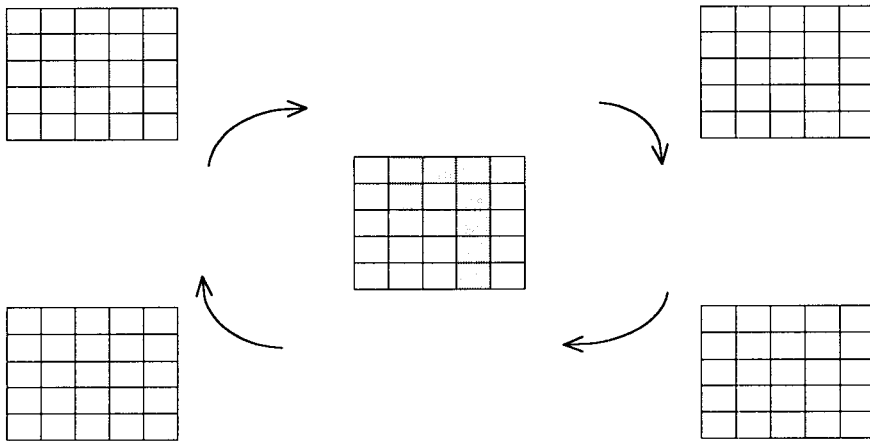
■ 활동적 표현(enactive representation) 활동

- 종이 위에 다음과 같이 7자를 쓰시오
- 친구와 나란히 앉아서 한 친구가 돌린 종이를 보고, 그 친구와 똑같은 모양이 되게 종이를 돌리시오-이와 같이 게임 형식으로 활동적 표현을 재미있게 유도한다.



■ 영상적 표현(iconic representation) 활동

- 종이를 다음과 같이 오른쪽으로 돌린 모양을 상상해 보고, 그 모양을 그려보시오.



- 종이를 직접 돌려서 확인해 보시오
- 종이를 위와 반대 방향인 왼쪽으로 돌린 모양을 상상해보고 그 모양을 그려보시오.
- 종이를 직접 돌려서 확인해 보시오

■ 상징적 표현(symbolic representation) 활동

- 종이를 오른쪽으로 돌렸을 때 7자가 어떻게 변하는지 설명해 보시오
- 종이를 오른쪽으로 돌렸을 때 7자가 어떻게 변하는지 간단한 그림으로 설명해 보시오

- 종이를 왼쪽으로 돌렸을 때 7자가 어떻게 변하는지 설명해 보시오
- 종이를 왼쪽으로 돌렸을 때 7자가 어떻게 변하는지 간단한 그림으로 설명해 보시오
- 종이를 오른쪽과 왼쪽으로 돌렸을 때 7자의 모양을 비교하여 보시오
- 도형 돌리기를 통해서 알게된 사실을 말해 보시오

4. 문제해결의 측면에서 활용할 수 있는 공간과제

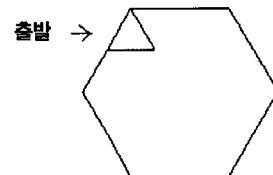
공간감각을 기르기 위해서 아동에게 공간전략을 바르게 활용할 수 있도록 안내하는 방법이 바로 문제해결의 측면에서의 공간과제의 지도 방법이라고 볼 수 있다. 문제해결 측면에서 공간과제를 지도함으로써 문제해결 상황에서 시각적, 지각적 기술과 관련된 활동을 길러 줄 수 있다. 특히, 공간감각을 기르기 위한 심화과정에서 공간과제를 문제해결적 측면에서 지도한다면, 공간감각과 문제해결력을 동시에 길러줄 수 있을 것이다. 그러나 현장에서 심화과정으로 운영할 수 있는 공간과제를 구성하기가 쉬운 일은 아니다. 따라서, 본 연구에서는 문제해결단계에 따라 구체적으로 그 지도 방법을 제시하기보다는 패턴블록을 이용하여 3-가 단계 심화과정에서 직접 사용할 수 있는 공간과제를 소개하고자 한다.

(1) 게임을 이용한 공간과제문제해결

공간감각은 공간에 대한 구체적이고 풍부한 조작활동을 통해서 형성하는 것이 가장 바람직하지만, 똑같은 활동을 반복하다보면 학생들은 쉽게 흥미를 잃어버리는 경향이 있다. 그러나 게임학습은 학생들의 흥미를 유발하고 게임에 이기기 위한 전략을 사용하게 할 수 있는 장점이 있다. 아래의 게임은 패턴블록을 이용하여 주어진 공간을 전략적으로 채우는 것으로 육각형, 사다리꼴, 평행사변형, 정삼각형 블록의 관계를 인지하고 이들을 서로 회전, 변환시키고 전체와 부분의 관계를 생각하여 문제를 해결해야 하기 때문에 공간 시각화능력과 공간 방향화 능력을 모두 길러 줄 수 있다.

◆블록 채우기 게임

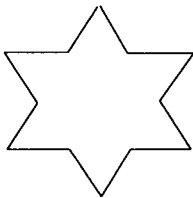
- 육각형, 사다리꼴, 평행사변형, 정삼각형 블록을 준비한다
- 가위바위보를 해서 진 사람이 출발이라고 한곳에 정삼각형 블록을 놓는다.
- 다음 사람이 4개의 블록 중 하나를 적어도 한 변이 이미 놓은 블록과 맞닿게 놓는다
- 위와 같은 방법으로 번갈아 놓아 마지막에 놓는 사람이 이긴다.



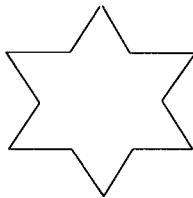
(2) 다양한 방법으로 만들기

공간감각에는 공간 시각화와 공간 방향화 두 가지가 있고, 공간방향화의 하위 요소에는 재조직된 전체, 전체와 부분이 있다. 아래와 같이 전체를 여러 가지로 재조직해 볼 수 있는 활동을 통해서 공간감각을 기를 수 있을 뿐만 아니라 재조직하는 활동을 통해서 블록간의 관계를 인식하기 때문에 다양한 문제해결전략을 발견할 수 있다.

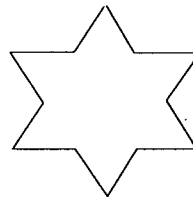
◆ 별 만들기



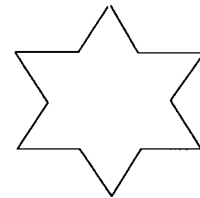
평행사변형 6개로 별 만들기



3개의 사다리꼴과 3개의 정삼각형으로 별 만들기



정삼각형, 평행사변형, 사다리꼴 각각 2개로 별 만들기



자신의 생각대로 별 만들기

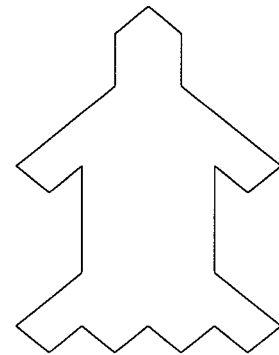
(3) 뒤집기(대칭)를 이용한 모양 만들기

도형 옮기기 활동에서 뒤집기는 상당히 어려운 활동이다. 아래와 같은 활동을 통해서 뒤집기가 일상생활에서 어떻게 이용되는지, 어떻게 하면 효과적으로 뒤집기를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 알 수 있을 것이다.

◆ 거북이 만들기

다음 블록을 이용하여 양쪽으로 모양이 같은 거북이를 만들어라.

- 육각형 블록 3개
- 사다리꼴 블록 6개
- 평행사변형 블록 8개
- 정삼각형 블록 2개



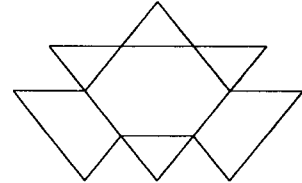
(4) 정신적 이미지 형성을 돕는 공간과제

Mckim(1972)은 보기-상상하기-내용 그리기 활동을 통해서 공간 시각화 능력을 향상시킬 수 있다고 하였다. 그러나 학생들이 정신적인 이미지를 만드는데는 많은 훈련이 필요하다. 다음과 같이 패턴블록을 이용하면 학생들의 흥미를 유발하면서 정신적인 이미지를 효과적으로 재현하기 위한 다양한 문제해결전략을 사용하게 할 수 있다. 왜냐하면, 본 것을 기억하기 위해서는 대칭, 회전, 이동과 같은 요소를 이용하는 것이 효과적이기 때문이다. 아래에서는 대칭의 개념을 이용하면 쉽게 정신적 이미지를 재현시킬 수 있다.

◆카운트다운 5, 4, 3, 2, 1

· 5부터 1까지 거꾸로 세는 동안 다음 도형을 자세히 관찰하고 기억한다.

· 1까지 세었을 때, 모양을 덮고, 이 모양을 기억해서 똑같은 모양을 만든다.



IV. 결론

아동들은 공간에 대한 많은 직관적인 사고를 가지고 학교에 들어가는데 이는 그들의 환경에 있어서의 초기 경험들이 대부분 공간적이었기 때문이다. 아동들은 처음에 언어의 도움 없이 세상과 조우하게 되고 조작물과 물체들을 다루는 활동으로부터 자연스럽게 공간적인 과제를 접하게 되며, 심리학적으로 그리고 수학적으로 도움을 받게 된다. 특히, 요즘의 수학 교육은 비형식적인 지도에 의하여 획득되는 “감각”의 개발에 중점을 두고 있어서, 수감각과 공간감각을 개발하는 것이 초등학교 수학교육에서 중요한 목표로 대두되고 있다. 공간 감각은 공간으로부터 자극을 인식하고 해석하는 능력과 공간 시각화를 포함하고 있으며, 부분적으로는 환경과 사물에 대해 갖게 되는 직관이라고 말할 수 있다. 따라서, 공간감각을 기를 수 있는 풍부한 경험을 학생들에게 제공하고, 비형식적인 방법으로 일상생활에서 접하는 대상과 다양한 공간과제를 통하여 여러 위치에서 도형을 시각화하고, 그려보고, 비교하는 활동을 해야 한다. 특히, 공간과제를 어떻게 구성하고 지도하느냐는 공간감각 형성의 중요한 변수가 될 수 있다.

Wattanawaha는 공간과제를 DIPT 분류 체계에 의해서 차원, 내면화, 제시과정, 사고과정 4가지의 변수를 고려하여 구성하였는데 현행 7차 교육과정의 수준별·단계별 교육과정인 점을 감안한다면 Wattanawaha의 DIPT 분류 체계를 참고하여 공간과제를 구성해 보는 것도 바람직할 것이다.

본 연구에서는 공간과제의 지도방안에 대해서 Mckim의 공간 시각화 학습을 위한 3단계에 의한 공간과제 지도, Bruner의 EIS이론에 근거한 공간과제 지도, 그리고 문제해결의 측면에서 공간과제의 구체적인 지도 방안을 살펴보았다. Mckim의 지도 방법은 상상하기 과정을 통하여 공간을 시각화하는 능력을 길러줄 수 있기 때문에 초기 단계에서 권장할 만한 방법이다. 현행 교과과정에서는 상상하기 단계가 형식화되지 않았는데, 공간감각을 지도하는 초기 단계에서는 의도적으로 상상하기를 강조하여 정신적 이미지를 형성할 수 있는 능

력을 배양해야 할 것이다. Bruner의 EIS이론에 의한 지도 방법은 영상적 표현 활동에 치우쳐 있는 현행 교과과정의 문제점을 개선하는데 좋은 방법이다. 활동적 표현 단계에서는 게임과 같은 활동을 통하여 흥미를 유발하고 상징적 표현 활동에서는 시각적, 언어적 표현을 병행하는 것이 바람직할 것이다. 수학이 학교 교육의 교과목으로 설정된 이래 수학을 지도하는 많은 사람들은 학생들의 문제 해결 능력을 신장시키려는 노력을 계속해 오고 있는데, 공간과제를 이용하여 문제해결력을 길러줄 수 있다. 그리고, 문제해결 측면에서 공간과제를 지도함으로써 문제해결 상황에서 시각적, 지각적 기술과 관련된 활동을 길러줄 수 있다. 특히, 공간감을 기르기 위한 심화과정에서 공간과제를 문제해결적 측면에서 지도한다면, 공간감과 문제해결력을 동시에 길러줄 수 있을 것이다.

이상으로 공간감을 기르기 위한 공간과제의 지도 방안에 대하여 2-가, 3-가 단계를 중심으로 3가지 관점에서 살펴보았다. 그러나 시각적으로 인지되는 과정과 인지한 것을 정확하게 표현하는 데에는 기술상의 문제가 많이 존재하기 때문에 공간감에 대한 정확한 이론 정립이 필요하다. 또한, Wattanawaha의 DIPT 분류 체계를 좀더 일반화시킬 수 있는 연구와 효과적인 공간과제의 구성 및 지도 방법을 체계화시킬 수 있는 연구가 앞으로 더 이루어져야 할 것이다.

참고문헌

- 강순자, 고상숙(1999). 공간능력을 신장하기 위한 기하학습자료 개발 : GSP를 이용한 정다면체 구성, 한국수학교육학회시리즈 A 수학교육, 38(2), 179-188, 한국수학교육학회.
- 교육부(1997). 초등학교 7차 교육과정. 대한교과서주식회사.
- _____ (2000). 수학 2-가. 대한교과서주식회사.
- _____ (2001). 수학 3-가. 대한교과서주식회사.
- _____ (2000). 초등학교 교사용 지도서 2-가. 대한교과서주식회사.
- _____ (2001). 초등학교 교사용 지도서 3-가. 대한교과서주식회사.
- 김응태, 박한식, 우정호(1988). 수학교육학개론. 서울대학교 출판부.
- 나귀수(1996). 기하교육에서 공간 능력의 의미. 1996년도 대한수학교육학회 춘계 수학교육연구대회발표논문집, 151-162. 대한수학교육학회.

- 우정호(2000). 수학학습-지도 원리와 방법. 서울대학교 출판부.
- _____(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.
- Altamuro, V. J. & Clarkson, S. P.(1989). *Exploring with pattern blocks*. White Plains. NY; Cuisenaire Company of America, Inc.
- Ben-Chaim, D., Lappan, G., & Houang, R.T. (1989). Adolescents' ability to communicate spatial information: Analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 121-146.
- Clements, M, A. (1983). The question of how spatial ability is defined and its relevance to mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 15, 8-20.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Netherland: Reidel.
- Grande, J. J. (1987). Spatial perception and primary geomtry. In Lindquist. & Shulte. (Eds.), *Learning and teaching geomtry, K-12, 1987 yearbook* pp.126-135. Reston, VA: NCTM.
- Linn, M. C., & Peterson, A. C. (1985). Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: a meta-analysis. *Child Development*, 56.
- Mckim, R. (1972). *Experience in visual thinking, monterey*. Calif.: Brooks-cole.
- McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: psychometric studies and environmental, generic, hormonal, and neurological influences, *Psychological Bulletin* 86(5), 889-918.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Polya, G. (1957). *How to solve it*. New York: Doubleday.
- Tatre, L. A. (1990). Spatial skills, gender, and mathematics, In Fennema & Leder(Eds.), *Mathematics and gender*, Teachers College Press.

A Study on Teaching Methods of Special Tasks

- on the emphasis of special sense at the levels of 2-Ga and 3-Ga -

Han, Kee Wan (Pungduok Elementary School)

The primary school mathematics emphasizes some activities such as visualizing figures, drawing figures and comparing figures from various angles. These activities could be undertaken throughout examination, experiments and exploration of the substantial materials.

They could also be undertaken by using the objects found in a daily life informally.

The 7th curriculum of mathematics reflects this trend and includes the systematized activities in teaching spatial sense in geometry. However, it still requires more researches on the teaching methodology of spatial sense and the conceptual analysis of spatial sense.

In this study, the concept of spatial sense is analyzed and Mackim's 3-levels teaching methodology and Bruner's EIS theory and suggestions are reviewed as a possible teaching methodology of spatial tasks. As a conclusion, this study suggests a teaching-learning methodology of spatial tasks at the levels of 2-GA and 3-Ga of the 7th curriculum of mathematics.