대한수학교육학회지<학교수학>제3권 제2호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.3, No.2, 215~231 September 2001

학습부진아의 수학지도시 구체적 조작물의 효율성에 관한 연구

- Unit Cubes를 활용한 중학교 1학년 기수법 지도 -

황 우 형 (고려대학교)
김 명 선 (설봉중학교)

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

현재 우리가 사용하고 있는 숫자 표기법은 한정된 숫자를 사용하면서 무한히 많은 수를 표현할 수 있는 위치적 기수법이며, 그 중에서도 십진법을 사용하고 있다. 십진법을 사용하게 된 이유는 손가락의 수가 10개인 것으로 추측하고 있으며 대부분 학생들은 오랜 기간 십진법의 숫자 표기법에 익숙해져서 십진법의 특징을 간과하고 있다. 즉, 위치적 기수법에 의한 십진법계산은 초등학교에서부터 오랫동안 반복 연습해서 사용해 왔으므로 그 계산 방법을 당연한 것으로 받아들이고 있다. 따라서 중학교 학생들에게 위치적 기수법의 원리를 이해시키고 이 기수법의 장점을 깨닿게 하는 것은 생각보다 쉬운 일이 아니다. 더욱이 수학 학습에 부진한 학생들에게 이를 이해시키는 것은 더욱 어려운 과제라는 것은 쉽게 예상할 수 있다.

현재의 제6차 교육과정에서도 기수법은 제한적으로만 다루고 있으며, 2001년부터 순차적으로 시행되는 7차 교육과정의 중학교 1학년(제7단계) 경우 오진법을 생략하여 내용을 대폭 축소하고 있다.

교육과정상 단원의 중요성을 인정받고 있지 못하는 상황에서 교과서의 기수법에 대한 설명과 실제 이루어지고 있는 수업은 기수법에 대해 원리적인 이해보다는 공식과 절차를 암

기하여 단순히 답만을 구하는 암기식 학습으로 이어지고 있다. 특히 학습 부진아의 경우 암기식 학습의 정도는 더욱 심화될 수 밖에 없다.

초등학교 전학년 동안 단계적으로 십진법의 개념과 성질을 체득해온 학습자는 중학교 1학년이 되면서 십진법이 아닌 다른 진법은 처음 접하게 된다. 기존에 너무나 당연하게 받아들여졌던 수의 개념이 전혀 새로운 형태로 제시되고 있기 때문에 어느 단계보다도 논리적인 스키마의 확장이 요구된다. 그러나, 이 영역은 현재까지 다른 대수분야의 학습방법 및 교구에 대한 연구에 비해 연구가 미약한 상태로 지금까지 기수법에 관련된 연구는 대부분 기수법의 기원에 관한 연구와 수학적 근거를 연구한 논문이 대부분 이었다.

본 연구에서는 특히 학습 부진아를 연구대상으로 했다. 우리 나라에서도 학습부진아에 대한 연구가 일부 이루어졌으나 (박혜숙외, 1999., 나귀수, 1999), 수학교육관련 연구는 대부분 학습성취도가 중간이나 그 이상의 학생들을 대상으로 하는 경우가 많았다. 상대적으로 수학을 더욱 어려워하고 수학을 기피하는 학습부진아는 연구의 주된 관심 대상이 아니었다. 우리 나라의 상황과 비교해 보았을 때 선진국에서는 이에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있는 편이다.(Zentall & Ferkis, 1993; Hutchinson, 1993; Bentz & Fuchs, 1996; Ginsburg, 1997; Rourke & Conway, 1997; Grobecker, 1997) 수학 수업시간은 다른 과목과 달리 학과의 특성 및 여러 가지 이유로 교사는 일부 학생만을 대상으로 수업하는 경우가 많다. 그러나 21세기의 수학교육은 더 이상 특정 소수를 위한 수학교육이 아니라 모든 학생을 위한 수학교육, 즉 모든 수준의 학생을 위한 수학교육이 되어야 한다. 이를 구현하기 위해서는 수학교실에서 소외되고 있는 학습 부진아에 대한 관심이 더욱 필요하다.

본 연구에서 활용한 지도방법은 학생들이 교구를 이용하여 진법의 모델을 직접 만들어 가면서 원리를 이해하도록 하는 것으로, 교구로는 유닛큐브(Unit Cubes)를 사용하였다. 유닛큐브는 한 변의 길이가 1센티미터인 정육면체를 서로 연결하여 여러 가지 모양을 만들 수 있도록 만든 교구로 지금까지는 입체도형의 넓이와 부피와의 관계 등을 이해하는데 주로 사용된 교구이다. 본 연구의 목적은 유닛큐브를 활용한 기수법의 지도가 학습 부진아가 이를 이해하는데 어느 정도 효과가 있는지를 알아보는데 있다.

2. 유닛큐브(Unit cubes)의 소개

유닛큐브는 십진막대(Base Ten Blocks)의 단위 막대(Units)만으로 구성된 것으로 각각의 단위 막대들은 작은 홈과 돌기가 있어서 서로 쉽게 연결시킬 수도 있고 분리시킬 수도 있다. 32개의 유닛큐브가 주어졌을 경우, 그것을 세는 과정을 통해 그것이 십진법의 수 32를

나타내는 것을 학습자는 알 수 있다. 즉, 단위 막대 10개를 연결해서 만든 긴 막대(Long) 3개와 단위 막대(Unit) 2개를 사용해서 십진법의 모델을 만들 수 있다. 이 때 자연스럽게 십의 자리는 "3"이고, 일의 자리가 "2"라는 것을 알게 되며, 자리수의 개념과 전개식의 개념을 이해할 수 있게된다. 또한 이것을 분리하여 다시 조립함으로써 쉽게 다른 진법의 수로 표현할 수도 있다. 십진법 32가 5진법으로 어떻게 나타낼 수 있는지를 알아보기 위해서, 십진법 32를 나타내는 십진법의 모델을 모두 분리한 후 5개씩 다시 묶어나가면 된다. 5개의 묶음이 다시 5개 모이면 이것을 다시 한 개로 묶음을 만든다. 물론 다른 진법의 수를 십진법으로 바꾸는 것도 동일한 원리로 하면 된다.

3. 연구의 중요성

본 연구는 유닛큐브라는 교구를 사용하여 수업을 실시하는 것이 학습부진아가 흥미를 가지고 능동적으로 학습에 참여함은 물론, 기존의 암기식 학습방법에서 벗어나 보다 창의적이고, 응용 가능한 지적 사고를 할 수 있는지 여부를 알아보기 위해서 실시되었다. 교사의 일방적인 내용전달과 주입식 학습과 비교해 보았을 때 구체물인 교구를 통해서 학습자가 직접 기수법의 개념을 모델로 만들어보고 경험함으로써 학습자의 내적 동기의 유발과 자율적인 지식의 확장 등 학습에 긍정적인 효과가 있을 것으로 기대하였다.

제6차 교육과정에 의한 기수법에 관한 내용은 십진법을 토대로 이진법과 오진법을 한정적으로 다루고있다. 본 연구의 중요성은 동일한 구조에서 여러 각도로 수를 표현하는 방법을 교구로 모델을 만들면서 학습함으로써, 동일한 내용이라도 다른 관점에서 관찰하고 표현하는 사고 훈련을 하게 되어 창의적이고 논리적인 사고력을 향상시킬 수 있는지 확인 해보는데 있다 할 수 있다.

4. 연구 문제

1) 학습 부진아가 여러 가지 진법을 십진법으로 표현하는데 유닛큐브가 어느 정도 도움이 되나?

2) 학습 부진아가 십진법의 수를 다른 진법으로 전환하는 과정을 이해하는데 유닛큐브가 어느 정도 도움이 되나?

3) 유닛큐브를 사용해서 지도할 경우 학습 부진아가 십진법, 오진법, 이진법이외의 새로운 진법으로 개념의 확장이 가능한가?

4) 유닛큐브를 사용해서 지도할 경우 학습부진아가 기수법에 관한 문제를 해결하는데 이 교구를 어느 정도 효과적으로 사용하는가?

II. 연구방법

1. 연구대상자

A 학생은 연구시기 바로 전 학기 학년말 수학성적이 전체 554명중 석차 386을 기록하였고, B학생은 석차 439를 나타내었다. 이 학생들은 모두 수학과 수준별 학급 중에서 가장 낮은 수준인 하반에 속한 학생들이다. 기수법단원이 포함된 1학기 중간고사 때 성적은 A학생이 백점 만점 중 14점이었고, B학생은 10점이었다. 이 결과는 기수법에 대한 이해 정도가 이를 학습했던 당시에도 거의 없었던 것으로 판단되며, 본 연구는 기수법에 대한 수업을 받은 지 약 8개월이 지난 후 실시되었다. A 학생과 B 학생 모두 진단평가 9개 문항 중 단 한 문항도 맞추지 못하였는데, 기수법에 대해서 배웠다는 것은 기억하고 있었지만, 문제를 전혀 이해하지 못했으며, 기수법에 관한 기초적인 질문에도 대답을 하지 못했다.

A 학생은 기초적인 연산은 큰 어려움 없이 할 수 있었지만, B 학생은 문제를 푸는 과정에서 계산하는 것 자체에도 자신 없어했고, 답을 여러 번 고치는 등 기본적인 연산에 문제가 있음을 나타냈다.

성격이 활달하고 적극적인 성격인 B 학생은 수업 초반에 매우 적극적으로 참여하였으며, 유닛큐브를 이용해서 기본 단위(단위 막대-긴 막대-판 막대-정육면체 막대)를 만드는 과정과 그것을 이용하여 숫자를 표현하는 과정에서는 A학생보다 먼저 이해하였으며, 가끔 A 학생에게 설명을 해 주기도하였다. 비교적 차분한 성격인 A 학생은 처음에는 자발적으로 의사표현 조차 제대로 하지 않았지만, 시간이 경과될수록 자신의 생각이나 의문점들을 질문하기 시작했으며, B 학생이 계산하는 것에 어려움을 호소할 때 연구자를 대신해서 설명을 해 주기도 하였다.

2. 연구절차

유닛큐브를 활용한 수업은 1999년 12월 13일부터 17일까지 방과 후 교실에서 3회에 걸쳐 각각 50분씩 실시되었다. 수업시작 전 본 연구에 대한 간단한 설명과 수업의 진행방법, 연

구이외의 다른 의도로 연구결과를 사용하지 않는다는 점을 주지시켰다. 수업시간에 사용할 교구 유닛큐브를 보여주고 기본적인 모델을 만들어 보았으며, 기수법에 대한 진단평가도 실시하였다. 1차시에는 십진법에 대해서 공부했고, 2차시에는 오진법에 관해서, 3차시에는 이진법 및 A 학생과 B 학생이 각자 임의로 선택한 진법을 유닛큐브를 모델로 공부하였다.

3차에 걸친 유닛큐브 활동 위주의 공부를 마친 후 3일 후에 형성평가를 실시하였으며, A 학생과 B 학생은 연구자와 함께 대화하는 형식으로 약 30분간 면담을 실시하였다.

III. 연구결과 및 분석

1. 연구결과

1) 학습 부진아가 여러 가지 진법을 십진법으로 표현하는데 유닛큐브가 어느 정도 도움이 되나?

주어진 숫자를 전개식으로 표현하는 진단평가 문제에서 A 학생은 $311_{(5)} = 3_{(5)} + 1_{(5)} + 1_{(5)}$로 쓰는 등 전개식의 의미를 정확하게 이해하지 못했으며, 형식적인 윤곽만을 기억하고 있었다. 이것은 B 학생도 마찬가지였다. 또한 A 학생과 B 학생 모두 주어진 진법의 수를 십진법의 수로 나타내는 문제도 해결하지 못하였다.

주어진 진법을 십진법으로 전환하는 학습에서는 주어진 숫자를 유닛큐브를 이용해서 모델을 만들고, 그 모델에 사용된 단위 막대의 개수를 세는 방법에 대해서 설명해 주었다. 두 학생 모두 이 방법을 쉽게 이해하였으며, 그 사실을 바탕으로 A 학생과 B 학생에게 다른 진법의 수를 전개식으로 표현하여 이를 계산하면 십진법으로 나타낼 수 있다는 사실도 설명하였다. 전개식의 의미를 상세하게 설명하기보다는 십진법으로 나타내기 위해서 사용했던 방법이 전개식의 계산이라는 것을 상기시키고, 두 가지 방법(유닛 큐브로 모델을 만들어서 단위 막대의 개수를 세는 방법과 전개식을 계산하는 방법)을 동시에 제시하여 동일한 값이라는 것을 직접 확인하도록 했다.

이런 수업을 거친 후 실시한 형성평가에서 A 학생은 전개식으로 나타내어 문제를 해결하지 않고 유닛큐브로 모델을 만든 후 단위 막대의 개수를 세는 방법을 이용해 답을 구하였다.

교사 : A학생은 답이 다 맞았는데, 이진법이나 오진법의 수를 십진법의 수로 표현하는 문제를 어떤 방법으로 풀었나요?

A학생 : 유닛큐브를 이용해서 풀었는데요.

교사 : 왜 그 방법을 이용 했나요?

A학생 : 그냥 전개식을 이용하는 것보다 유닛큐브를 이용하는 것이 더 빠르고, 계산도 별로 안 하잖아요.

B 학생의 경우도 A 학생과 동일하게 유닛큐브를 이용하여서 먼저 문제를 해결하였다. B 학생은 수업하면서 학습내용을 모두 이해하고 있었으며, 학습 활동지를 푸는 과정에서도 특별히 어려움을 나타내지 않았다.

교사 : 음.. 그럼 유닛큐브를 이용해서 기수법을 배운 것이 좀 도움이 되었다는 말인가요?

B학생 : 네. 유닛큐브를 이용해서 기수법을 배우니까 이해가 더 잘돼요...이진법이든, 오진법이든, 계산하는데 별로 어렵지 않았는데요.

또한 주어진 각각의 진법의 수를 기본단위로 표현하는 것을 능숙하게 해냈다. 그런데 시험이 끝난 후 면담에서는 풀이과정과 정답을 잘 제시하였는데, 형성평가에서는 오답을 냈다.

교사 : 오진법의 수를 십진법의 수로 고치는 문제는 맞추었는데, 이진법의 수를 십진법의 수로 고치는 문제는 15라고 썼네요. 이 문제는 어떤 방법을 이용했어요?

B학생 : 음, 유닛큐브를 사용해서 풀었는데요.

2) 학습 부진아가 십진법의 수를 다른 진법으로 전환하는 과정을 이해하는데 유닛큐브가 어느 정도 도움이 되나?

십진법의 수를 이진법과 오진법의 수로 각각 나타내는 문제를 진단평가에서 전혀 손대지 못했던 A 학생은 유닛큐브 활동 후 형성평가에서 모두 정답을 맞출 수 있었다. 형성평가 과정을 관찰 과정에서 먼저 공식을 이용하여 답을 구한 후 유닛큐브를 이용하여 검산을 하는 모습을 보여주었다.

교사 : 그럼, 십진법의 수를 다른 진법으로 표현하는 문제에서는 공식을 이용하여서 문제를 풀었는데 맞아요? 유닛큐브를 왜 사용하지 않았나요?

A학생: 공식을 먼저 써서 답을 구했는데요. 나중에 다시 유닛큐브로 확인을 하기는 했거

든요. 사용하기는 했는데...

B 학생의 경우, 십진법의 수를 오진법의 수로 고치는 문제에서 유닛큐브를 이용하여 답을 구하였고, 이진법의 수로 고치는 문제는 공식을 이용하여 답을 구하였다. 그러나, B 학생은 4를 5로 쓰거나, 0을 4로 착각하는 등의 실수를 해서, 결국 $115_{(5)}$, $4010_{(2)}$등의 오답을 제시했다.

교사 : 근데, 십진법의 수를 이진법이나 오진법으로 바꿔는 문제는 중간에 하다가 말았나 봐요. 왜 이렇게 답을 썼을까?

B학생 : .....음. 잘 모르겠어요. 오진법으로 고치는 것은 유닛큐브를 이용했구요, 이진법으로 고치는 것은 그냥 공식 썼는데요. 유닛큐브를 이용하고 하는데, 개수가 너무 많아서요. 근데, 중간에 4를 5로 써서 틀렸어요. 맞을 수 있었는데....

교사 : 이진법의 수로 고치는 것은 너무 개수가 많아서 그랬어요?

B학생 : 네. 근데, 이것도 시간만 있었으면 좋았을 텐데, 시간이 좀 부족해서 실수 한 것 같아요.

3) 유닛큐브를 사용해서 지도할 경우 학습 부진아가 십진법, 오진법, 이진법이외의 새로운 진법으로 개념의 확장이 가능한가?

A 학생과 B 학생은 십진법과 오진법, 이진법에 대해서 학습한 후 각각 스스로 새로운 진법을 결정하여 학습 활동지 4를 작성하였다. A 학생은 4진법을 선택하였고, B 학생은 7진법을 선택하였는데, 학습 활동지를 별 어려움 없이 작성하였다. 처음에는 십진법의 수 이외의 다른 진법에 대해 어떤 진법들이 존재하는지에 대한 질문에서는 질문의 의미조차 파악하지 못하던 학습자들이 유닛큐브를 사용한 수업을 받은 후에서는 오진법이나, 이진법의 수처럼 새로운 진법들을 큰 무리 없이 받아들이고 그 의미를 이해할 수 있었다.

교사 : 그럼, 임의로 어떤 진법이 주어져도 당황하지 않겠어요? 예를 들면, '8진법의 수 16을 십진법의 수로 나타내어라.' 라는 문제를 보면....

A : 네. 유닛큐브를 이용하면, 뭐..... 계산은 쉽게 할 수 있을 것 같아요.

(직접 해보며....) 긴 막대 하나랑 단위 막대가 6개이니까 14아닌가요?

B : 저두 그런데요. 제가 직접 7진법을 할 때도 유닛큐브를 긴 막대나, 판 막대로 만드는 것이 손 끝이 아파서 힘들었지, 문제를 푸는 것은 쉬웠어요.

4) 유닛큐브를 사용해서 지도할 경우 학습부진아가 기수법에 관한 문제를 해결하는데 이 교구를 어느 정도 효과적으로 사용하는가?

기수법수업에서 교과서에서 제시된 공식을 이용하는 것 이외의 다른 방법을 이용하여 진법 문제를 해결하는 방법을 배운 적이 없었던 A 학생과 B 학생은 수업을 진행하는 중간이나 형성평가 중에서도 유닛큐브를 이용하여 문제를 해결하는 것 뿐 만이 아니라, 공식을 이용하여서도 답을 구하거나 검산을 하였다. 문제의 종류에 따라, 또는 A 학생과 B 학생 개인차에 따라 자신의 원하는 방법을 선택하여 문제를 풀었다. A 학생은 공식과 유닛큐브 두 가지 방법을 모두 이용하여 문제를 풀었으며, B 학생의 경우는 공식보다는 유닛큐브를 더 많은 사용하여 문제를 해결하였다.

2. 연구결과의 분석

1) 진단평가에서 A 학생은 주어진 이진법의 수를 십진법의 수로 표현하는 문제에서 $1011_{(2)}$ 을 2로 나누려 했는데, 이는 십진법의 수를 이진법의 수로 나타낼 때 쓰는 공식을 이용한 것이다. 어떤 방식으로 했다는 희미한 기억만 가지고 있을 뿐 그것이 어떤 문제에 어떤 과정을 거쳐서 써야 하는 지는 기억해내지 못했다. 이것은 기수법에 관한 내용을 처음 학습한 당시 도구적으로만 이해했다는 것으로 해석할 수 있다. 이런 식의 이해는 시간이 지남에 따라서 쉽게 잊게되고, 기억해 낸다 할지라도 관련 없는 문제에 이를 적용하려고 할 경우 오히려 문제해결에 큰 장애 요인이 될 수 있다.

A 학생의 경우 유닛큐브를 사용하였는데, 이 방법이 더욱 빠르고 쉽다고 판단하여 이를 이용하여 문제를 해결한 것이다. 이 같은 사실은 기존의 공식만을 이용하는 획일적인 방법에서 벗어나 어떤 방법이 더 쉬운지 학습자의 판단에 의해 문제를 해결하는 과정을 거친 것이라고 생각할 수 있으며, A 학생이 다른 진법의 수를 십진법으로 바꾸는 과정을 이해했다고 판단할 수 있다.

B 학생의 경우는 오진법의 수를 십진법으로 나타내는 것은 별 어려움 없이 했지만, 이진법의 수를 십진법으로 나타내는 것에는 오답을 내었다. 위에 결과에서도 언급했듯이 전개식으로 나타내어 계산한 것이 아니라, 유닛큐브를 이용해서 문제를 해결하였다. 형성평가 도중 연구자가 관찰해본 결과 $10011_{(2)}$를 십진법의 수로 고친 과정에서 $10000_{(2)}$ 을 유닛큐브로 표현하는 것에 여러 번 기본단위의 모양을 바꾸는 등 자신 없어 했다. 다른 진법과 비교해 보았을 때 이진법은 수를 표현하기 위해서 많은 자리 수를 필요로 한다. 그 이유는 정

육면체 막대의 다음 형태까지 사용하게 되기 때문에 단위 막대, 긴 막대, 판 막대, 정육면체 막대 형태에서 다시 긴 막대형으로 변화하는 과정에 대해서 B 학생이 혼란을 겪은 것으로 판단된다.

주어진 수의 자리 값을 나타내는 전개식의 의미를 설명할 때 유닛큐브를 이용하는 것보다 도구적으로 이해하도록 하는 것을 오히려 더 쉽게 받아들였다. 이는 기존의 학교수업을 통해서 일의 자리의 지수 0, 십의 자리의 지수 1, 백의 자리의 지수 2 등으로 오른쪽에서 왼쪽으로 갈수록 지수가 하나씩 늘어난다는 내용을 암기하게 하는 것이 더 쉽다는 것을 확인할 수 있다.

2) 십진법의 수를 오진법과 이진법으로 바꾸는 문제를 A 학생은 진단평가와는 달리 형성평가에서 모두 맞추었고, B 학생은 오답을 썼다. 유닛큐브를 이용하여 설명한 십진법의 수를 오진법이나 이진법의 수로 나타내는 공식의 의미를 두 학생 모두 쉽게 파악하였으며, 수업 중에 공식과 유닛큐브를 모두 사용하여 문제를 해결하였다. 형성평가 중에 A 학생은 공식을 먼저 사용하고 유닛큐브로 검산을 하였고, B 학생은 오진법의 수는 유닛큐브를 사용하고 이진법의 수로 변환하는 것은 공식을 사용하여 문제를 풀었다. A 학생은 문제의 종류를 확인하면서 해결방법을 선택한 것으로 여겨진다. 즉, 문제가 무엇을 요구하는 지를 정확히 인식한 후, 해결방법을 선택한 것이다. 면담내용에서도 알 수 있듯이 B 학생은 계산하는 것 자체에 자신감이 없었고, 시험에 대한 불안감 때문에 정해진 시간 내에 문제를 해결하는 것은 개인차가 있을 수 있다는 사실을 확인할 수 있다. 수업을 진행하는 도중에는 별다른 어려움 없이 문제를 해결했는데, 형성평가에서 오답을 냈기 때문이다.

3) 수업진행 도중에도 십진법과 오진법, 이진법 외의 다른 진법을 스스로 선택하여 학습하도록 하였다. 두 학생의 면담 내용에서 보면 어떤 다른 진법이 주어져도 동일한 방법으로 문제를 해결하면 된다고 생각하는 것을 알 수 있었다. 기존의 진법의 학습구조를 확장하고 새로운 진법으로 적용하는 과정이 매우 자연스럽게 이루어지는 것을 알 수 있었다.

4) 수업 도중 B 학생은 A 학생보다 유닛큐브를 이용하는 것에 더욱 흥미를 갖고 있었다. 면담 내용을 보면 장난감을 갖고 노는 듯한 느낌을 가졌다고 진술하고 있는데, 이것은 B 학생이 계산을 하는 것보다 직접 모델을 만들고 눈으로 확인하면서 셈할 수 있는 유닛큐브를 사용한 방법을 더 쉽게 생각했다는 것을 알 수 있었다. 특히 B 학생은 거듭제곱에 대한 계산에 익숙하지 못하였고, 실수를 많이 했으므로, 전개식을 사용하는 등의 계산보다는 교구를 사용하는 것을 더 편하게 생각한 것으로 분석된다.

두 학생은 문제의 종류에 따라 공식을 사용할 지 유닛큐브를 사용할 지를 결정한 다음 문제를 해결하였다. 기존의 학교수업에서는 학습자가 선택의 여지가 없이 공식을 사용할 수

밖에 없었지만, 교구를 이용한 수업을 받은 학습자는 자신의 판단에 따라 방법을 선택하여 문제를 해결할 수 있었다.

비록 B 학생이 형성 평가에서 오답을 냈지만 유닛큐브의 학습효과나 기수법의 학습내용들이 의미가 전혀 없는 것은 아니었다. 적어도 수업 중에는 모델을 만들면서 기수법에 대한 충분한 이해가 있었으며, 교구를 활용하는 수학적 모델을 만들 수 있다는 것과 이러한 활동을 통해서 수학에 관한 태도가 바뀔 수 있다는 가능성 자체에도 의미가 있다고 하겠다.

IV. 요약 및 적용

본 연구의 목적은 학습 부진아를 지도하는데 구체물의 효과를 알아보는 것으로 수학성적이 극히 부진한 중학교 1학년 학생 두 사람을 연구대상으로 했다. 모두 3회에 걸쳐서 유닛큐브를 사용한 수업이 진행되었고, 수업이 모두 끝난 후 형성평가 및 면담이 이루어졌다. 연구 결과, 정도의 차이는 있지만 유닛큐브라는 교구를 사용해서 가르쳤을 때 학습부진아인 연구대상자의 기수법에 관한 이해가 용이했으며 수학에 대한 흥미유발은 의미가 있다고 할 수 있다.

수업 및 면담을 통하여 교구를 사용하여 기수법을 학습하는 것이 기존의 교과서만을 이용하는 지필 위주의 학습방법보다 여러 가지 면에서 긍정적인 결과를 가져온 것으로 판단이 되며 그 이유는 다음과 같다.

첫째, 유닛큐브를 이용하여 수업을 진행하는 것이 기존 공식의 근거를 제시하지 않고 수업을 하게 되는 경우보다 공식이 유도되는 과정을 확인하게 됨으로서 학습자가 내용을 쉽게 이해할 수 있다.

둘째, 공식의 원리를 알게 됨으로서 문제의 유형에 맞게 공식을 사용할 수 있으며, 교구를 이용하거나 공식을 이용하는 방법 중에서 더 편리한 방법을 이용하여 문제를 해결하게 되므로 학습자의 문제해결 방법이 다양화될 수 있다.

셋째, 교구를 이용하는 수업은 유닛큐브의 특징 상 학습자가 장난감 같다는 생각을 하기 때문에 지루해 하지 않고 학습의욕을 지속시킬 수 있다.

넷째, 오진법, 이진법, 십진법 이외의 다른 진법까지 학습내용을 확장한다거나 오진법에서 이진법으로 또는 이진법에서 오진법으로 전환하는 과정을 쉽게 이해함으로써 유연하고, 일반화 할 수 있는 사고를 촉진시키는 도구가 된다.

참고문헌

나귀수 (1999). 그래프 계산기를 활용한 수학 부진아 지도: 사례 연구. 대한수학교육학회, 9, 167-181.

박영신 (1990). 사회과학의 상징적 교섭론. 민영사.

박혜숙 (1999). 학습부진아의 수학적 성향 제고를 위한 수학캠프. 한국수학교육학회, 8, 129-144.

Bentz, J L. & Fuchs, L S.(1996). Improving peers' helping behavior to students with learning disabilities during mathematics peer tutoring. *Learning Disability Quarterly*, 19(4), 202-15.

Ginsburg, H. P.(1997). Mathematics learning disabilities: a view from developmental psychology. *Journal of Learning Disabilities*, 30(1), 20-33.

Grobecker, B. (1997). Partitioning and unitizing in children with learning differences. *Learning Disability Quarterly*, 20(4), 317-37.

Hutchinson, N. L.(1993). Effects of cognitive strategy instruction on algebra problem solving of adolescents with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly*, 16(1), 34-63.

Rourke, B. P. & Conway, J. A.(1997). Disabilities of arithmetic and mathematical reasoning: perspectives from neurology and neuropsychology. *Journal of Learning Disabilities*, 30(1), 34-46.

Zentall, S. S. & Ferkis, M. (1993) Mathematical problem solving for youth with ADHD, with and without learning disabilities. *Learning Disability Quarterly*, 16(1), 6-18.

별첨

교수 · 학습방법의 소개

단원명 Ⅰ.집합과 자연수

3. 기수법

학습목표 :

1. 십진법의 뜻을 이해하여 수의 자리값 원리를 안다.
2. 주어진 수를 십진법의 전개식으로 나타낼 수 있다.
3. 오진법, 이진법의 수를 이해하고 간단한 덧셈, 뺄셈을 계산할 수 있다.
4. 십진법의 수를 이진법으로 나타낼 수 있다.
5. 십진법의 수를 오진법으로 나타낼 수 있다.
6. 기수법의 개념을 명확히 이해하여, 십진법과 이진법, 오진법 뿐만 아니라, 다른 진법에 대하여 계산을 할 수 있다.

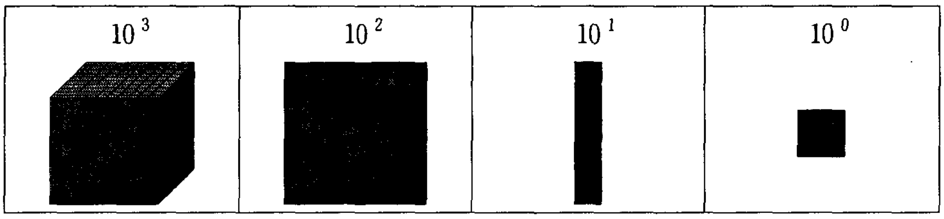
1. 가) 임의의 십진법의 수를 유닛큐브를 사용하여 나타내기

① 한 개의 단위막대(Unit)는 십진법의 수 1을 나타낸다. 따라서, 3은 단위막대 3개로 표현할 수 있다.

② 그림에서와 같이 10개의 단위막대는 10을 의미한다. 이것을 하나의 긴 막대(Long)로 만들 수 있다.

③ 10개의 긴 막대는 100을 의미하며, 10개의 긴 막대로 이루어진 판 막대(Flat)의 형태로 만들 수 있다.

④ 10개의 판 막대는 1000을 의미하며, ③의 한판을 10개를 쌓은 정육면체의 형태로 만들 수 있다.



예를들어, 43을 유닛큐브로 나타내면, 우선 긴 막대 4개와 단위 막대 3개를 가지고 나타낼 수 있다.

나) 그것을 이용하여 십진법의 수를 전개식으로 나타내기

43을 자리수를 알 수 있는 전개식으로 나타내보면, 긴 막대가 4개이고, 단위 막대가 3개로 나타낼 수 있다.

2. 유닛큐브를 이용해서 오진법의 수를 전개식으로 나타내기

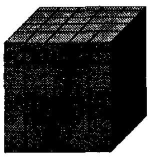
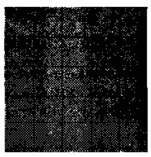
가) 유닛큐브를 이용하여 오진법의 수 표현하기

① 한 개의 단위 막대(Unit)는 오진법의 1을 나타낸다.

② 그림에서와 같이 5개의 단위 막대는 5(5×1)를 나타내고, 이것은 하나의 긴 막대(Long) 형태가 된다.

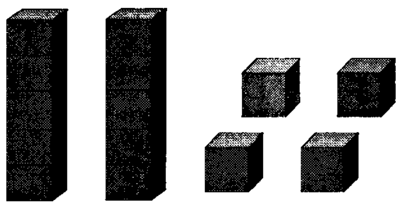
③ 5개의 긴 막대는 25(5×5)를 의미하며, 5개의 긴 막대를 연결하여 하나의 판 막대(Flat)를 만들 수 있다.

④ 5개의 판 막대는 625(5×5×5)를 의미하며, ③의 한판을 5개를 쌓은 정육면체의 형태가 된다.

오진법의 수	1000_5	100_5	10_5	1_5
십진법의 수	5^3	5^2	5^1	5^0
				

이때 긴 막대 하나는 $10_{(5)}$, 판 막대 하나는 $100_{(5)}$, 정육면체 하나는 $1000_{(5)}$ 라는 것을 알 수 있다.

다음을 오진법으로 어떻게 나타낼 수 있나?(교사는 여러가지 문제를 학습자에게 제공한다.)



$\Rightarrow 24_{(5)}$

나) 오진법의 수를 십진법의 수로 나타내기

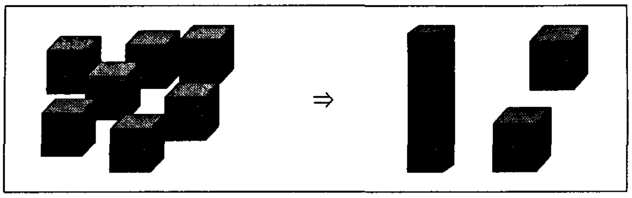
$23_{(5)}$은 십진법의 수로 나타내려면, $23_{(5)}$을 유닛큐브로 나타내고, 그것을 모두 분리한 후, 이를 다시 십진법의 모델로 만들면 된다.

따라서, 오진법의 긴 막대 2개와 단위 막대 3개를 세면 모두 13임을 알 수 있다.

즉, $23_{(5)} = 2\times5 + 3\times1 = 13$

다) 십진법의 수를 오진법의 수로 나타내기

다음 십진법의 수 7을 오진법으로 나타내어 보자. 7개의 단위 막대를 긴 막대 1개, 단위막대 2개로 표현할 수 있으며, 이것은 오진법의 수 $12_{(5)}$ 가 됨을 알 수 있다.



십진법의 수 48을 오진법으로 나타낼 때, 먼저 48개의 단위 막대로 분리하고 우선 5개씩 묶으면, 긴 막대가 9개 나오고, 3개의 단위 막대가 남게 된다. 또한 긴 막대 9개를 5개씩 묶어서 판 막대를 만들면 1개의 판 막대와 4개의 긴 막대가 남는다. 따라서 1개의 판 막대와 4개의 긴 막대 그리고, 3개의 단위 막대가 남게 되어, 결국 48은 $143_{(5)}$이라고 나타낼 수 있음을 쉽게 확인 할 수 있다.

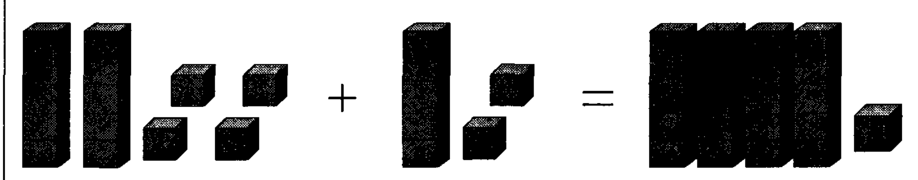
(정리) 어떤 수를 오진법으로 나타낼 때, 우선 5개씩 묶는 과정을 반복하면 그 나머지들의 각각의 자리를 나타내는 숫자임을 알 수 있다. 따라서, 우리가 교과서에서 그저 단순히 암기했던 다음의 과정 즉, 표1을 이해할 수가 있게 된다.

	48			
5	9	···3	①	
5	1	···4	②	
5	0	···1	③	48= ③②① (5)

위의 연습문제의 수를 유닛큐브를 사용하지 않고 오진법의 수로 나타내어라.

4. 오진법의 덧셈과 뺄셈을 유닛큐브를 이용해서 이해하기.

$24_{(5)} + 12_{(5)} = 41_{(5)}$



5. 유닛큐브를 이용하여 이진법의 수를 전개식으로 나타내기

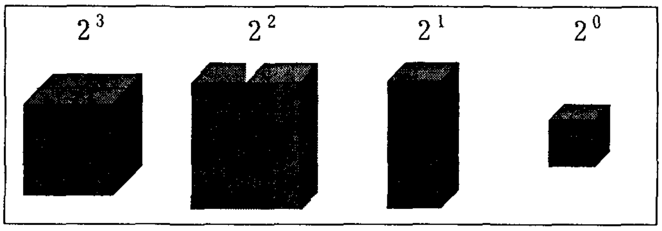
가) 유닛큐브를 이용하여 이진법의 수 표현하기

① 한 개의 단위 막대는 이진법의 1을 나타낸다.

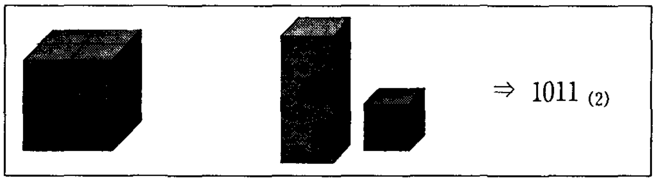
② 그림에서와 같이 2개의 단위 막대를 연결하면 하나의 긴 막대형태가 된다.

③ 2개의 긴 막대를 연결하면 하나의 판 막대 형태가 된다.

④ 2개의 판 막대를 연결하면 하나의 정육면체 막대가 된다.



이때 긴 막대 하나는 $10_{(2)}$, 판 막대 하나는 $100_{(2)}$, 정육면체 막대는 $1000_{(2)}$으로 읽는다는 것을 알 수 있으며 다음의 모델이 나타내는 이진법의 수는 어떤 것인지 알아본다.



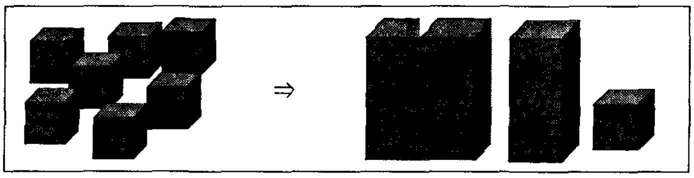
나) 이진법의 수를 십진법의 수로 나타내기

$1101_{(2)}$은 십진법의 수로 나타낼 때, 단위 막대 한 개는 십진법의 수 1을 의미하므로, $1101_{(2)}$을 유닛큐브로 만들고 나서 단위 막대의 개수를 모두 세어 보면 된다.

따라서, 정육면체(2^3) 1개와 판 막대(2^2) 1개, 그리고 단위 막대(2^2)가 1개이므로, 모두 세면 13임을 알 수 있다. 즉, $1101_{(2)} = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 1 = 13$

6. 십진법의 수를 이진법의 수로 나타내기

다음 십진법의 수 7을 이진법으로 나타내어 보자. 7개의 단위 막대를 긴 막대(2^1) 3개, 단위 막대 1개로 묶을 수 있고, 긴 막대 2개는 다시 한 개의 판 막대(2^2)가 되고, 긴 막대(2^1) 1개가 남게 되므로, 결국, 판 막대 1개, 긴 막대 1개 단위 막대 1개로 표현할 수 있음을 발견할 수 있다. 이것을 기호로 나타내면 이진법의 수 $111_{(2)}$가 됨을 알 수 있다.

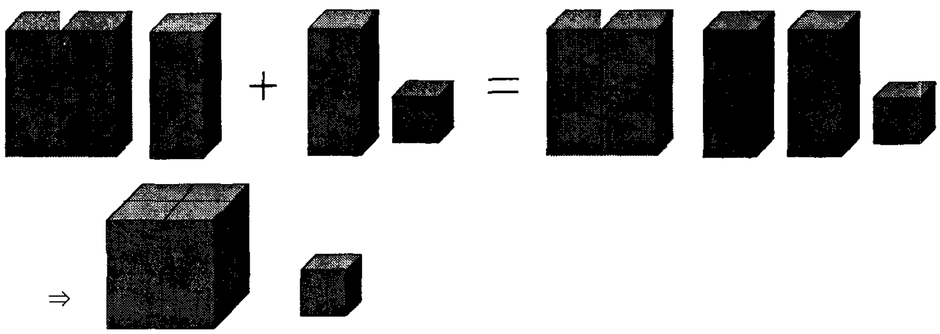


(정리) 어떤 수를 이진법으로 나타낼 때, 단계별로 2개씩 묶는 과정을 반복하게 되면 그 나머지들의 각각의 자리를 나타내는 수임을 알 수 있다. 따라서, 우리가 교과서에서 그저 단순히 암기했던 다음의 과정 즉, 표2을 이해할 수가 있게 된다.

$$\begin{array}{r|l l l}
 & 7 & & \\
2 & 3 & \cdots 1 & ① \\
2 & 1 & \cdots 1 & ② \\
2 & 0 & \cdots 1 & ③ \quad 7 = ③②①_{(2)}
\end{array}$$

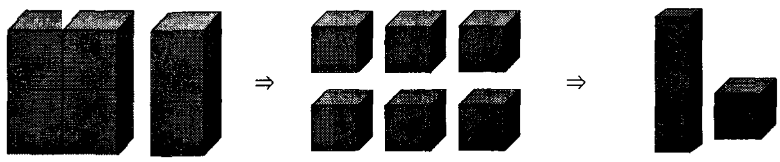
7. 이진법의 덧셈과 뺄셈을 유닛큐브를 이용해서 이해하기.

$110_{(2)} + 11_{(2)} = 1001_{(2)}$



8. 이진법을 오진법의 수로, 오진법을 이진법의 수로 나타내기

$110_{(2)}$



형성평가 반 번호 이름 :

1. 다음 오진법의 수를 십진법의 수로 나타내어라.

1) $1412_{(5)}$ 2) $2443_{(5)}$

2. 다음 이진법의 수를 십진법의 수로 나타내어라.

1) $10011_{(2)}$ 2) $110_{(2)}$

3. 다음 주어진 십진법의 수를 오진법과 이진법의 수로 나타내어라.

1) 34 2) 190

4. 다음 수를 8진법의 수로 나타내어라.

$142_{(5)}$

A Study on the Effectiveness of the Manipulatives in Teaching of Sstudents with Mathematics Learning Disability

Whang, Woo Hyung (Korea University)
Kim, Myung Seon (Seol-Bong Middle School)

The purpose of the study was to investigate the effectiveness of the manipulatives in instruction of mathematics to those who have learning disabilities. Two middle school students who revealed very low achievements in the previous mathematics tests were involved in this study. Unit Cubes were used as the manipulatives, and the researchers utilized this manipulatives to teach the number bases. After a series of instructions utilizing the Unit Cubes, the subjects were interviewed with semi-structured form. In general, the effect of using the manipulatives were positive. Both subjects could understand much better with the Unit Cubes, and revealed affirmative results such as their positive attitudes toward mathematics.