[논 문] 한국재료학회지
Korean Journal of Materials Research
Vol. 11, No. 5 (2001)

탄성 불균질 재료의 미시역학거동 (Part Ⅰ : 이론적 기초)

강창석 · 홍성길 · 若島健司*
전남대학교 금속공학과
*東京工業大學 精密工學硏究所

Micromechanical Properties in Elastically Inhomogeneous Materials (Part Ⅰ : Theoretical Basis)

Chang-Seog Kang, Sung-Kil Hong and Kenji Wakashima*
Department of Metallurgical Engineering, Chonnam National University, Kwangju 500-757, Korea
**Precision and Intelligence Laboratory, Tokyo institute of technology, Yokohama 226, Japan*

(2001년 1월 6일 받음, 2001년 3월 19일 최종수정본 받음)

초 록 본 연구에서는 탄성문제에 관한 Eshelby의 이론을 응용하여 다수의 개재물이 모상 중에 균일하게 분산하고 탄성적으로 불균질한 복합재료의 거시적 응력-변형관계를 정식화하였다. 정식화의 과정에서, 주위의 구속을 받지 않는 어떤 영역에 응력의 발생을 동반하지 않는 변형률(transformation strain ε^{T}_{kl}), 즉 열팽창 계수를 갖는 물체가 온도변화 ΔT를 갖는 경우의 열팽창 변형 $\alpha\Delta T$나, 물체가 일정한 소성 변형을 받았을 때의 소성 변형 등을 예로들 수 있는 역학 장을 정의하였다. 본 연구에서 전개한 방법은 선형 탄성론에 기초를 두고 있으며, 복합체의 탄성거동만이 아니라 탄성-소성 거동의 해석 또한 가능하게 하였다.

Abstract By applying Eshelby's theory on the 'transformation' and 'inhomogeneity' problems of an ellipsoidal inclusion, a microscopic stress-strain is formulated for a composite material consisting of a matrix and a large number of aligned ellipsoidal inclusions. Some of the composites of practical interest, such as unidirectionally fiber-reinforced, particle dispersion strengthened and layered composites can be treated by changing the axial ratios of the ellipsoidal inclusion. The macroscopic stress-strain relation obtained is applicable to elastic and elasto-plastic deformation of the composite in uniform loading.

Key words: elastically inhomogeneous materials, Eshelby's theory, transformation strain, inhomogeneity problems, ellipsoidal inclusion, microscopic stress-strain, composites

1. 서 론

현재 대표적인 복합재료로서는 일 방향 섬유 강화재, 입자 및 whisker를 포함한 입자 강화형을 그 예로 들 수 있으며, 실용 면에서의 복합재료에 있어서는 강화상의 체적이 수십 %에 이르는 것이 일반적이다. 이러한 복합재료에 있어서의 전형적인 상 구성은 모상 내의 개재물이며, 하나의 상이 모상(matrix)이면 다른 하나의 상은 개재물(inclusion)로 존재하는 미세 구조를 갖는다. 이러한 복합재료의 상 구성은 극히 복잡하며, 그 역학적 특성을 엄밀하게 이론 해석하는 것은 더욱이 어려운 문제이다. 즉, 섬유상, 판상 혹은 구상 등의 강화재가 다수 존재하는 복합재료의 응력장은 강화재의 상호간섭 효과를 고려하는 것이 본질적으로 필요하나 이를 엄밀하게 취급하는 것은 극히 난해하기 때문이다. 실질적으로 많은 연구 보고에서 개재물의 공간분포에 관해서 정확한 정보가 주어지지 않는 경우에는 결정론적(deterministic)인 응력장(filds)의 해석은 근본적으로 불가능하며, 확률론적(stochasic)인 요소가 포함될 수밖에 없다. 이와 관련하는 연구에 있어서는 탄성특성을 취급하는 연구가 주를 이루고 있으며[1~3], 그 대표적인 보고로서는 탄성론의 변분 원리에 기초하는 복합재료의 거시적 탄성계수의 상 · 하한을 규정하는 방법[4~6]과, 개재물의 특수한 주기 배열을 가정하여 계산기에 의한 수치 해석으로 행하는 방법 등이 있다.[7~9] 이와 같은 방법들은 이론적 취급에 있어서는 엄밀한 방법이라 할 수 있으나, 복합재료의 구성상의 탄성계수가 크게 차이가 있을 경우에는 얻어지는 상 · 하한가가 서로 현저하게 차이가 생기는 문제와 수치해석의 계산 수행을 위한 입력 요소의 양이 너무 번잡하다는 문제를 갖고 있다.

본 연구에서는 복합재료의 역학적 특성에 있어 타원체 개재물의 탄성문제에 관한 Eshelby의 이론[10~12]을 응용하여 복합재료의 미시 역학적 특성을 이론적으로 해석하는 방법을 언급하였다. 즉, 복합재료 상(phase)구성의 특징과 타원체 개재물의 확률론적 상호간섭효과를 고려하는 단순한 모델로 그 해석방법을 제시하였다. Fig. 1은 다양한 형상의 개재물을 포함하는 복합재료의 미세구조를 단순화하여 나

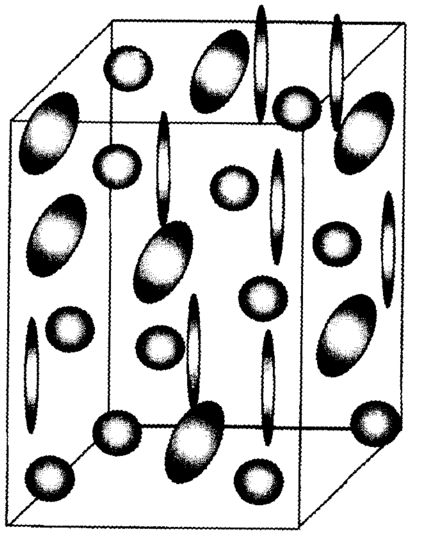

Fig. 1. Schematic illustration of the micro-geometrical features of the micromechanical model.

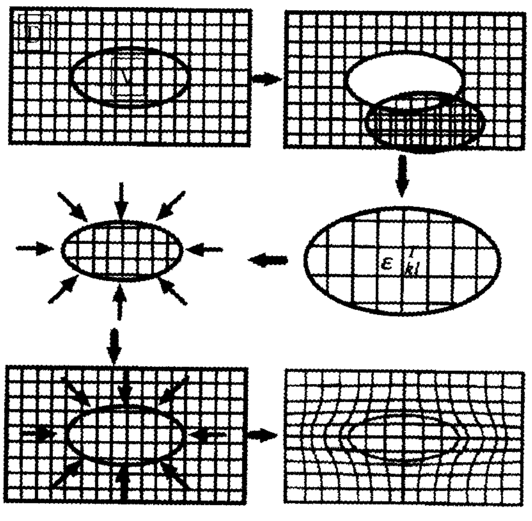

Fig. 2. Schematic illustration of the internal stress situation of the elastic materials caused by transformation strain in an ellipsoidal inclusion.

타낸 모델이다. 이 모델에서는 모든 개재물을 타원체로 간주하고, 그 축비(c/a, aspect ratio)만을 변화시킴으로서 입자, 섬유상, 판상 등의 다양한 형상의 개재물을 통일적으로 취급할 수 있는 특징이 있다. 이 모델은 물성이 등방성(isotropic)인 개재물이 재료의 한 구성요소로 형성되어 있으며, 무질서한 공간적인 분포를 갖는다. 또한 개재물은 동일의 축비를 가지며, 기하학적인 주축(회전축의 방향)이 특정의 방위로 위치하고 있다고 가정한다.

2. 한 타원체 개재물의 탄성문제

복합재료의 문제를 다루기 전에 먼저, 타원체 개재물의 탄성문제에 관한 Eshelby의 해석결과[10~12]에 대해 언급하고자 한다. 등방(isotropic) · 균질 및 무한대의 모상의 탄성체 D내에 (이 탄성체의 탄성계수를 C_{ijkl}라 하면, $C_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu\delta_{ik}\delta_{jl}+\mu\delta_{il}\delta_{jk}$로 나타낼 수 있다. 여기서 λ, μ는 Lame 정수, δ_{ij}는 Kronecker delta이다.) 개재물 한 개의 타원체 영역 V를 고려한다. Fig. 2에 나타낸 것처럼, 개재물 영역 V 내부만이 일정한 변형률(stress-free transformation strain) ε^T_{kl}가 발생한다면 물체 D는 탄성적인 변형 불일치에 기인하는 내부응력이 발생한 상태가 된다. 다시 말해서, 개재물 영역 V 내부만의 일정한 변형률(transformation strain) ε^T_{kl}이란 영역 V를 탄성체 D로부터 추출하여 ε^T_{kl}가 되는 일정한 변형을 발생시킨다. 이때의 변형률은 외부 응력에 기인하는 변형이 아니며, 상변태에 따르는 변형, 열팽창에 따르는 변형 및 소성 변형 등을 그 예로 들 수 있다. 이때 Eshelby의 해석방법에 따라, 내부 응력장, 특히 개재물 V 내에서의 응력 σ^I_{ij}는,

$$\sigma^I_{ij}=C_{ijkl}(e^C_{kl}-\varepsilon^T_{kl}) \tag{1}$$

$$e^C_{kl}=S_{klmn}\,\varepsilon^T_{mn} \tag{2}$$

이와 같은 간단한 식으로 표현할 수 있다.+ ε^C_{kl}는 개재물 V가 주위의 구속을 받고 있을 때에 발생하는 변형률(constrained strain)이며 탄성 변형과 변형률의 합이 되어있다. 식(2)에 있어서 S_{klmn}는 Eshelby 텐서라 하며

$$C_{ijkl}G_{km,lj}(x-x')+\delta_{im}\delta(x-x')=0 \tag{3}$$

식(3)과 같은 미분방정식을 만족하는 함수,$G_{mn}(x-x')$, 즉 탄성론에서의 Green함수를 이용하면 S_{klmn}는,

$$S_{klmn}=-\frac{1}{2}\int_V C_{mnpq}\{G_{pk,ql}(x-x')+G_{pl,qk}(x-x')\}\,dD(x') \tag{4}$$

로 나타낼 수 있으며, 이 적분치는 타원체 개재물 V의 축비와 Poisson비에 의존하는 정수가 된다.[10] 따라서 타원체 영역 V 내에서의 응력 σ^I_{ij}는 균일 응력이 된다. 이는 다음과 같은 불균질 개재물의 문제를 해결할 수 있는 열쇠가 된다. 즉, 타원체 영역 V가 그 외측($D-V$)과는 다른 탄성계수 C^*_{ijkl}(이는 이방성 탄성계수라고도 할 수 있다.)를 갖는 경우에는 물체 D내에 생성되는 변위와 응력을 완전히 복제할 수 있는 균질 개재물을 고려함으로서 문제를 해결할 수 있음을 Eshelby[11]는 나타내었다. 이와 같은 균질 개재물은 등가 개재물(equivalent inclusion)이라 불리는데, 이는 불 균질 개재물과 동일형태의 식을 갖으며, 그 탄성계수는 ($D-V$)의 탄성계수와 동일하다. 그리고 불 균질 개재물의 변형률 ε^{T*}_{kl}과는 다른 변형률 $\varepsilon^{T(i)}_{kl}$를 갖고 있다. 등가 개재물의 변형률 $\varepsilon^{T(i)}_{kl}$은 V 내에서의 응력의 등가성++을 나타내는 다음 식으로 결정되는데,

+ 이하 본문에서는 통상의 지표 기호법을 이용한다. 즉, 동일 첨자가 반복될 때에는 1, 2, 3을 대입하여 계산을 행한다. 또한, comma (,) 후의 첨자는 그 좌표성분에 의한 미분을 나타낸다. 예를 들면, $A_{ij}\cdot B_j=A_{i1}B_1+A_{i2}B_2+A_{i3}B_3$, $C_{,kl}=\partial^2 C/\partial x_k\partial x_l$ 등이다.

++ V의 외측 ($D-V$)에 대한 응력의 등가성은 자동적으로 만족되어 있다.

$$\sigma_{ij}^{I} = C_{ijkl}(e_{kl}^{C(i)} - \varepsilon_{kl}^{T(i)}) = C_{ijkl}^{*}(e_{kl}^{C(i)} - \varepsilon_{kl}^{T*}) \quad (5)$$

이는 $e_{kl}^{C(i)}$가 식(2)과 같은 형태의

$$e_{kl}^{C(i)} = S_{klmn}\varepsilon_{mn}^{T(i)} \quad (6)$$

로 나타낼 수 있기 때문에, $e_{11}^{T(i)}$, $e_{22}^{T(i)}$,… $e_{12}^{T(i)}$ 등의 미지수 6개와 동일하게 방정식도 6개이기 때문에 간단한 연립 일차 식의 해로 귀착한다.

지금까지 균질 물체에서 일정 응력장을 형성시키는 경우의 Eshelby 해석 결과를 언급하였다. 그러나 타원체 형상의 탄성 이물(elastic inhomogeneity)을 포함하는 불균질 물체에 응력을 작용시킨 경우에 응력장이 산란되는 불균질 문제도 상기와 유사한 방법으로 해석 가능하다. 다시 말해 탄성적 이물질의 존재에 기인하는 변형와 응력의 산란 분은 타원체 영역 V에 균일한 변형률 $e_{kl}^{C(ii)}$가 발생한 경우의 내부응력 문제와 동일하게 취급할 수 있다. 위의 변형 문제에 있어서 식(5)에 대응하는 식으로 다음과 같이,

$$C_{ijkl}(e_{kl}^{C(ii)} + e_{kl}^{A} - \varepsilon_{kl}^{T(ii)}) = C_{ijkl}^{*}(e_{kl}^{C(ii)} + e_{kl}^{A}) \quad (7)$$

나타낼 수 있다. 식(7)에서 e_{kl}^{A}는 탄성계수 C_{ijkl}를 갖는 균질 물체에 있어서 균일 외부 응력 σ_{ij}^{A}과 Hooke's 법칙 ($\sigma_{ij}^{A} = C_{ijkl}e_{kl}^{A}$)으로 연결되는 균일 탄성 변형이다. 또한 $e_{kl}^{C(ii)}$는 식(2)과 동일하게

$$e_{kl}^{C(ii)} = S_{klmn}\varepsilon_{mn}^{T(ii)} \quad (8)$$

와 같이 나타낼 수 있다.

이와 같이 개재물 외측의 복잡한 응력장의 정보 없이 타원체 개재물의 변형문제와 불균질 문제에 관한 등가 개재물 개념의 도입으로 개재물 외측의 응력 산란문제가 해석 가능함을 알 수 있다.

3. 다수의 타원체 개재물을 포함하는 복합재료로의 확장

본 절에서는 다수의 타원체 개재물을 포함하는 물체에 대해서 전 절과 동일한 해석방법으로 문제를 취급한다. 즉, 방향성을 갖는 복합재료를 상정하고 다수의 동일 치수·형상을 한 타원체 개재물이 모상 내에 균일하게 배열되어 있다고 가정한다.[13~17] 전 절의 해석 방법과 동일성을 갖기 위해 타원체 개재물과 모상과는 동일의 등방 탄성계수 C_{ijkl}를 갖고 모든 개재물 내에는 일정한 변형률 ε_{kl}^{T}가 발생하는 경우를 고려한다. 다음으로 임의의 개재물 1개에 주목하여, 그 개재물 내에서의 변형률 e_{kl}^{C}에 대해서 고려하면, 일반적으로

$$e_{kl}^{C} = e_{kl}^{C} + e_{kl}^{C} \quad (9)$$

나타낼 수 있다. 식(9)에서 e_{kl}^{C}는 주목하는 개재물 한 개만이 물체 내에 존재할 때에 그 개재물 내에 생성되는 변형률이며, 이는 이미 식(2)에서 나타내었다. 또한 e_{kl}^{C}는 주목하는 개재물을 제거하고 다른 개재물의 존재 때문에 주목하는 개재물 내에서 발생하는 탄성변형이며, 이는 개재물의 상대적 위치관계에 의존한다. 그러나 여기서 대상으로 하고 있는 복합재료에 있어서는 개재물 간의 상대적 위치관계에 대해서는 고려하지 않으며 개재물이 균일하게 분포하고 있다고 하는 것이다. 이는 e_{kl}^{C}를 결정론적으로 평가하는 것은 본질적으로 불가능하기 때문이며 확률론적인 관점으로부터 평가할 수밖에 없기 문이다. 이와 같은 관점에서 e_{kl}^{C}를 평가하기 위해서는 1개의 개재물의 외측의 영역에 있어서 다른 개재물의 존재 확률 p를 조사하여 보면 그 결과는 Fig. 3에 나타낸 것처럼 존재한다고 할 수 있다(구체적인 설명은 부록 참고). 즉, 주축 반경 (a, b, c)을 갖는 타원체 개재물의 외측에 있어서 p와 동일한 지점의 추적은 그 개재물과 동일 중심을 갖고 이와 유사한 타원체면으로서 넓어져가며 주축반경이 원래의 타원체의 3배가되는 지점의 외측에서는, 일정한 개재물의 체적분률 f와 같게된다. 한편 주목하는 개재물 내에서의 p는 1임을 알 수 있다. 이와 같이 개재물의 존재 확률 p가 주어지면 동시에 변형률의 통계적 분포는 $p\varepsilon_{kl}^{T}$로서 주어지게 된다. 위 단계에서는 $(x_1/a)^2+(x_2/b)^2+(x_3/c)^2=1$의 외측 또는 $(x_1/3a)^2+(x_2/3b)^2+(x_3/3c)^2=1$의 내측 영역에 있어서 p의 값은 알려져 있지 않지만 e_{kl}^{C}를 평가할 수 있음을 다음에 기술하였다. 본 연구에서의 해석방법은 탄성론에 기초하기 때문에 응력장의 중첩원리가 가능하다는 접에 주목하여, $(x_1/3a)^2+(x_2/3b)^2+(x_3/3c)^2=1$의 외측의 $f\varepsilon_{kl}^{T}$가 되는 일정한 변형으로부터 주목한 개재물 내에 발생한 탄성변형은 $-fS_{klmn}\varepsilon_{mn}^{T}+f\varepsilon_{kl}^{T}$가 됨을 알 수 있다. 왜냐하면 얻어진 탄성장은 중첩원리에 의해 $(x_1/3a)^2+(x_2/3b)^2+(x_3/3c)^2=1$이 내측에 $-f\varepsilon_{kl}^{T}$가 되는 변형률이 발생한 경우와, 물체 전체에 $f\varepsilon_{kl}^{T}$가 되는 변형률이 발생한 경우와의 합으로 구하여진다는 것과 완전히 같기 때문이다. 전자는 전 절에서 기술한 Eshelby의 해로부터, 후자는 탄성 변형의 발생을 유발하지 않는 점에 유의하면 상기의 해가 용이하게 얻어진다.

한편 $(x_1/a)^2+(x_2/b)^2+(x_3/c)^2=1$의 외측과 $(x_1/3a)^2+(x_2/3b)^2+(x_3/3c)^2=1$의 내측에서의 변형률에 의한 e_{kl}^{C} 대한 기여는 다음의 고찰로부터 0임을 알 수 있다. 먼저 「동일 중심을 갖고 대응하는 주축 반경이 미소하게 다른 두 개의 상이한 타원체 E_{I}, E_{II} ($E_{\mathrm{I}} \subset E_{\mathrm{II}}$)를 고려하여 이들 두 개의 타원체에서 규정된 미소 두께의 타원체 내부에 일정한 변형률 $p\varepsilon_{kl}^{T}$가 발생한 경우, 그 내측의 타원체 E_{I} 내에는 탄성변형이 발생하지 않는다.」라는 정리를 증명한다. 어떤 커다란 타원체 E_{II} 내에 일정한 $p\varepsilon_{kl}^{T}$의 변형이 발생한 경우 E_{II}내의 탄성변형은 Eshelby의 해로부터 $pS_{klmn}(E_{\mathrm{II}})\varepsilon_{mn}^{T}-p\varepsilon_{kl}^{T}$가 된다. 구하고자 하는 탄성장은 이 두 경우의 합으로 주어지는데 E_{I}과 E_{II}는 서로 비슷한 형이므로 두 개의 Eshelby 텐서 $S_{klmn}(E_{\mathrm{I}})$와 $S_{klmn}(E_{\mathrm{II}})$는 같다고 할 수 있다. 따라서 상기의 정리가 증명되었다. $3^2>(x_1/a)^2+(x_2/b)^2+(x_3/c)^2>1$가 되는 영역에 있어서 변형

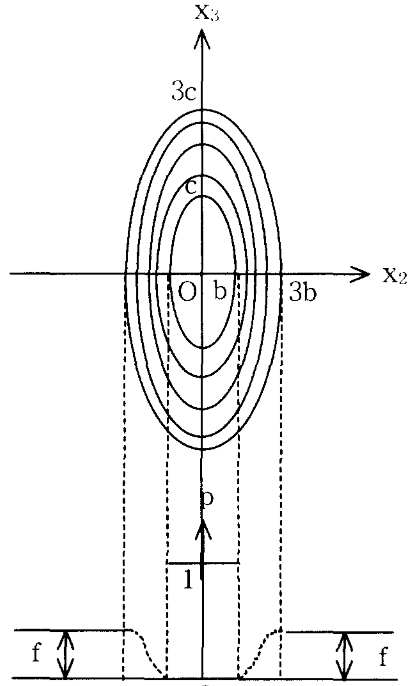

Fig. 3. A map showing distribution of the probability p of finding the presence of other ellipsoidal inclusions around a fixed one. The concentric ellipses, which are the sections of concentric ellipsoids, indicate the equi-probability loci.

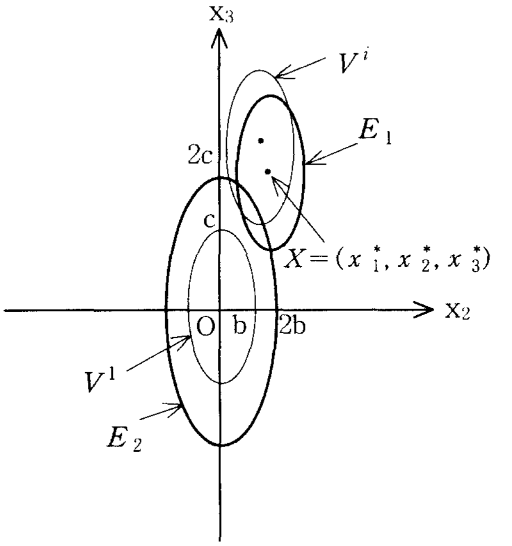

Fig. 4. Geometry for evaluating the probability p to find that any given point X outside a fixed inclusion V^1 is occupied by any other inclusion V^i.

률의 분포에 의해서 만들어진, $(x_1/a)^2+(x_2/b)^2+(x_3/c)^2 \le 1$에 대한 탄성장은 상기의 정리의 중첩에 의해 결국 0이라 결론지을 수 있다. 이는 개재물의 형상이 타원체이기는 하지만 흥미 있는 결과의 하나이다. 이상으로부터 e^C_{kl}는

$$e^C_{kl} = -fS_{klmn}\varepsilon^T_{mn} + f\varepsilon^T_{kl} \tag{10}$$

임으로 이식을 식(9)에 대입하면 e^C_{kl}로서,
($e^C_{kl} = S_{klmn}\varepsilon^T_{mn}$는 전술한 식과 같다.)

$$e^C_{kl} = (1-f)\,S_{klmn}\varepsilon^T_{mn} + f\varepsilon^T_{mn} \tag{11}$$

해를 얻을 수 있다. 식(11)은 등축의 다수의 타원체 개재물을 포함하는 물체에 대해서 전술의 식(2)을 확장한 것이다. 한편 임의의 개재물 내에서의 응력 σ^I_{ij} 가 식(1)으로 주어지는 것은 전 절과 동일하다. 그런데 본 절에서 얻어진 결과, 식(11)에 대해서 $f\to0$ 및 $f\to1$의 두 극한의 경우를 고려하면, $f\to0$의 경우, 즉 개재물 농도가 극히 희박한 경우에는 식(11)은 식(2)와 일치 하지만 이는 각 개재물 사이가 서로 현저하게 떨어져 존재하기 때문에 응력장의 상호 간섭은 무시할 수 있다는 고찰과 일치하고 있다. 한편 $f\to1$의 극한에서는 $e^C_{kl} = \varepsilon^T_{kl}$가 되기 때문에 $\sigma^I_{ij}=0$가 된다. 변형률이 물체 전체에 일정하게 발생하면 응력을 발생시키지 않으므로 이 또한 타당한 결과라 할 수 있다.

이상의 결과로부터 얻어진 e^C_{kl}는 Poisson비와 개재물의 형상, 체적률 및 변형률에만 의존하는 정수가 되기 때문에 결과적으로 σ^I_{ij}는 균일 응력이 된다. 이는 불균질 개재물의 변형 문제 및 불균질 문제가 전 절과 동일하게, 등가 개재물의 개념을 이용하여 처리할 수 있는 것을 의미한다. 다시 말해서, 본 절에서 대상으로 하고 있는 물체에 대해서는 전 절의 식(2)와 같은 형태의 식(6) 및 식(8)을 식(11)에 대응시켜 재 표현하면 된다. 그 결과,

$$\varepsilon^{T(i)}_{ij} = P_{ijkl}\varepsilon^{T^*}_{kl} \tag{12}$$
$$\varepsilon^{T(ii)}_{ij} = Q_{ijkl}\,\sigma^A_{kl} \tag{13}$$
$$\sigma^I_{ij} = (1-f)\,M_{ijkl}\varepsilon^{T^*}_{kl} \tag{14}$$

의 관계를 얻을 수 있으며, 이들 식에서

$$P_{ijkl} = A^{-1}_{ijkl}C^*_{mnkl} \tag{15}$$
$$Q_{ijkl} = -A^{-1}_{ijkl}(C^*_{mnrs}-C_{mnrs})\,C^{-1}_{rskl} \tag{16}$$
$$M_{ijkl} = C_{ijpq}(S_{pqmn}-\delta_{pm}\delta_{qn})\,P_{mnkl} \tag{17}$$
$$A_{ijmn} = (1-f)\,(C^*_{ijpq}-C_{ijpq})\,S_{pqmn} + (1-f)\,C_{ijmn} + fC^*_{ijmn} \tag{18}$$

가 되는 일련의 해를 얻을 수 있다. 여기서 A^{-1}_{ijkl}와 C^{-1}_{ijkl}는 A_{ijkl} 및 C_{ijkl}의 역행렬이다.

4. 자유에너지와 복합체의 응력-변형관계

본 절에서의 해석 대상은 다수의 타원체 개재물을 포함하는 불균질 물체의 "거시적인 변형응답" 즉, 일정 부하 응력 $\bar{\sigma}$에 기인하는 거시적 변형 $\bar{\varepsilon}$의 관계를 열역학적 관점으로부터 고찰하여 정식화하는 것이다. 일정 외력의 작용 하에

있는 어떤 물체가 등온적으로 균일 변형하는 경우 그 물체의 균일 응력 σ°_{ij}로 편미분하므로서 $e^{\circ}_{ij} = -(\partial G/\partial \sigma^{\circ}_{ij})_T$와 같이 나타내고 있다. 본 연구에서 대상으로 하고 있는 복합체에 있어서는 미시적으로 개재물 내부와 모상 내부에서 서로 다른 응력 상태에 있지만 복합체 전체를 하나의 거시적으로 균질한 물체로 간주하여 거시적 변형, 평균변형 e^{**}_{ij}를 고려할 수 있다. 한편 전 절에서 명확히 한 것처럼 복합체의 거시적 평균응력은 σ^{A}_{ij}이기 때문에

$$e^{**}_{ij} = -(\partial G/\partial \sigma^{A}_{ij})_T \tag{19}$$

에 의해서 복합체의 거시적 평균변형을 고려할 수 있다. 따라서 복합체의 Gibbs 자유에너지에 대한 정식화가 필요하며, 이는 전술한 개재물의 변형문제 및 불균질 문제에 관련하여 Eshelby의 정식을 이용할 수 있다. 즉, 복합체의 단위체적당의 Gibbs 자유에너지 G는,

$$\begin{aligned} G = &-\frac{1}{2}\sigma^{A}_{ij} e^{A}_{ij} - \frac{1}{2} f e^{A}_{ij} \varepsilon^{T(\mathrm{ii})}_{ij} - \frac{1}{2} f \sigma^{I}_{ij} \varepsilon^{T*}_{ij} \\ &- f \sigma^{A}_{ij} \varepsilon^{T(\mathrm{i})}_{ij} \end{aligned} \tag{20}$$

와 같은 간단한 형태로 나타낼 수 있다. 이 식에서 우변 제1항은 개재물과 모상이 함께 동일 탄성계수를 갖는 것과 같은 균질 물체에 외부 응력 σ^{A}_{ij}이 작용할 때의 Gibbs 자유에너지인데 실질적으로 이들의 탄성계수가 다르기 때문에 불균질 효과의 보정을 행할 필요가 있다. 그 것이 제2항이 나타낸 식이다. 한편 개재물 만의 변형 ε^{T*}_{ij} 가 발생하기 때문에 물체는 내부 응력 상태가 되는데 그 결과 물체에 축적되는 탄성 에너지가 제3항이며, 제4항은 그 변형의 발생이 외력의 작용 하에서 일어나는 것에 의한 외력 계의 포텐셜 변화를 나타낸다. 식 (20) 으로부터 알 수 있는 것처럼 물체의 Gibbs 자유에너지를 구함에 있어 필요한 응력장의 값은 특히 개재물 내에서의 값임을 주의하여야 한다. 이것 또한 Eshelby가 나타낸 유용한 결과의 하나이다. 식 (20) 의 우변에 나타나있는 모든 량은 이미 전 절에서 식 (12) ~식 (18) 으로서 주어져 있으므로, G는

$$\begin{aligned} G = &-\frac{1}{2} C^{1}_{ijkl} \sigma^{A}_{ij} \sigma^{A}_{kl} - \frac{1}{2} f Q_{ijkl} \sigma^{A}_{ij} \sigma^{A}_{kl} - \frac{1}{2} f (1-f) \\ &M_{ijkl} \varepsilon^{T*}_{ij} \varepsilon^{T*}_{kl} - f P_{ijkl} \sigma^{A}_{ij} \varepsilon^{T*}_{kl} \end{aligned} \tag{21}$$

와 같이 구할 수 있다. 이 식에서 P_{ijkl}, Q_{jikl} 및 M_{ijkl} 의 대칭성을 검토하여 보면, $\sigma^{A}_{ij} = \sigma^{A}_{ji}$ 및 $\varepsilon^{T}_{ij} = \varepsilon^{T}_{ji}$ 가 되는 대칭성으로부터 이들의 텐서는

$$P_{ijkl} = P_{jikl} = P_{ijlk} \text{(일반적으로는 } \neq P_{klij}) \tag{22a}$$

$$Q_{ijkl} = Q_{jikl} = Q_{ijlk} = Q_{klij} \tag{22b}$$

$$M_{ijkl} = M_{jikl} = M_{ijlk} = M_{klij} \tag{22c}$$

가 됨을 용이하게 알 수 있다.

실질적으로 복합재료의 문제에 있어서 모상 및 개재물이 함께 변형률이 일어나는 경우를 취급하는 것이 보다 유용하므로 상기의 결과 식 (21) 을 다음과 같이 바꾸어 나타낼 필요가 있다. $\varepsilon^{T*(M)}_{kl}$ 와 $\varepsilon^{T*(I)}_{kl}$ 를 모상 및 개재물 내에서 발생하는 균일한 변형률이라 하면 이 경우에 대한 G는 단지 식 (21) 에 있어서 ε^{T*}_{kl}를 $\varepsilon^{T*}_{kl} = \varepsilon^{T*(I)}_{kl} - \varepsilon^{T*(M)}_{kl}$으로 바꾸고, $-\sigma^{A}_{ij}\varepsilon^{T*(M)}_{kl}$의 항을 덧붙인 것에 불과하다는 것을 알 수 있다. 왜냐하면 외력 σ^{A}_{ij}의 작용 하에서 물체 전체에 $\varepsilon^{T*(M)}_{kl}$의 변형률을 일정하게 발생시키면 물체 내에는 내부응력이 발생하지 않고 단지 응력계의 포텐셜이 $-\sigma^{A}_{ij}\varepsilon^{T*(M)}_{kl}$ 만큼 변화하기 때문이다. 이렇게 얻은 상태는 개재물 내에서만이 $\varepsilon^{T*(I)}_{ij} - \varepsilon^{T*(M)}_{ij}$와 같은 균일한 변형이 발생한다고 할 수 있다. 이는 지금까지 고찰해온 상태를 나타내고 있는 것이다. 따라서 구하고자 하는 G는,

$$\begin{aligned} G = &-\frac{1}{2}(C^{1}_{ijkl} + f Q_{ijkl}) \sigma^{A}_{ij} \sigma^{A}_{kl} - \frac{1}{2} f (1-f) \\ &M_{ijkl}(\varepsilon^{T*(I)}_{ij} - \varepsilon^{T*(M)}_{ij}) \times (\varepsilon^{T*(I)}_{kl} - \varepsilon^{T*(M)}_{kl}) \\ &- (\delta_{ik}\delta_{il} - f P_{ijkl}) \sigma^{A}_{ij} \varepsilon^{T*(M)}_{kl} - f P_{ijkl} \sigma^{A}_{ij} \varepsilon^{T*(I)}_{kl} \end{aligned} \tag{23}$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이를 식 (19) 에 대입하면 결론으로서 복합재료의 거시적 응력-변형 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} e^{**}_{ij} = &(C^{1}_{ijkl} + f Q_{ijkl}) \sigma^{A}_{kl} + (\delta_{ik}\delta_{il} - f P_{ijkl}) \varepsilon^{T*(M)}_{kl} \\ &+ f P_{ijkl} \varepsilon^{T*(I)}_{kl} \end{aligned} \tag{24}$$

5. 결 론

복합재료의 역학적 특성에 있어 타원체 개재물의 탄성문제에 관한 Eshelby의 이론을 응용하여 구성요소가 탄성적으로 불균질한 복합재료를 대상으로 미시 역학 장(field)에서의 응력-변형 관계를 이론적으로 해석하였다. 해석 과정으로, 한 개의 타원체 균질 개재물의 탄성 문제를 고려하여 변형률(transformation strain) ε^{T}_{kl}의 발생에 기인하는 내부 응력장을 타원체 개재물의 축 비(aspect ratio)와 Poisson비에 의존하는 정수만으로 나타내었다. 탄성적 이물질(불균질 개재물)의 존재에 기인하여 변형와 응력의 산란장을 갖는 경우 또한 탄성 균질 개재물이 존재하는 경우와 동일한 해석 방법으로 도출되며 간단한 연립 일차 식의 해로 나타내었다. 이와 같은 균질 및 불균질 개재물의 탄성문제의 해석을 다수의 불균질 개재물이 존재하는 복합재료의 거시적인 응력-변형장의 해석에 적용하였다. 즉, 각 구성상이 서로 다른 응력 상태에 있는 복합재료 전체를 하나의 거시적으로 균질한 물체로 간주하여 평균변형 e^{**}_{ij} 를 도출하였다. 또한 공학적으로 관심의 대상인 섬유 강화형, 입자 분산 강화형 및 적층형 복합재료에서의 다양한 형상의 개재물을 모두 회전 타원체로 간주하고 타원체 개재물의 축 비만을 변화시켜 다양한 형상의 개재물을 통일적으로 취급하여, 거시적인 응력-변형의 관계식의 도출과 복합재료의 탄성 및 탄·소성 변형에 응용 가능하게 하였다.

본 연구의 선형 탄성론에 기초를 두는 복합재료의 탄성 · 소성 거동의 해석 방법의 응용은 이후의 연구에서 보고 하고자 한다.

부 록

무한대의 공간 내에 (a, b, c)의 주축 반경을 갖는 다수의 타원체 개재물이 동일 축 방향에 있어 통계적으로 접촉 중복되지 않고 균일 배열을 고려한다. 임의의 개재물 한 개를 주목하고 그 외측의 공간 점에 있어서 다른 개재물의 존재를 확인할 수 있는 확률 p는 다음과 같이 평가할 수 있다. Fig. 4에 나타낸 것처럼 주목하는 개재물 V^{-1}의 중심을 원점 O으로 하고 그 외측의 임의의 공간점 $X=(x^*_1, x^*_2, x^*_3)$의 p에 대해서 고찰한다. 점 X가 어떤 개재물 내에 속하는 점이기 때문에 그 개재물의 중심위치가,

$$(x_1-x^*_1)^2/a^2+(x_2-x^*_2)^2/b^2+(x_3-x^*_3)^2/c^2=1 \tag{A1}$$

이 되는 타원체 E_1의 내부에 존재할 필요가 있다. 한편 이 개재물 E_1이 원점의 개재물 V^{-1}과 접촉하지 않기 위해서는 중심위치가

$$x^2_1/(2a)^2+x^2_2/(2b)^2+x^2_3/(2c)^2=1 \tag{A2}$$

이 되는 타원체 E_2의 외측에 존재하여야 한다. 따라서 점 X가

$$x^2_1/(3a)^2+x^2_2/(3b)^2+x^2_3/(3c)^2=1 \tag{A3}$$

가 되는 타원체의 외측에 위치하면 타원체 E_1과 E_2는 서로 접촉 중복되지 않는다. 즉, 점 X를 내부에 포함하는 개재물의 그 어떠한 배치도 원점의 개재물 V^{-1}의 제약을 받지 않는다. 따라서 이 경우의 p는 개재물의 체적농도 f와 동일하다고 할 수 있다.

한편 점 X가 원점에 있는 이 개재물 V^{-1}의 외측과 $x^2_1/(3a)^2+x^2_2/(3b)^2+x^2_3/(3c)^2=1$가 되는 타원체의 내측의 점의 경우에는, 그 점 X를 내부에 포함하고 있는 것 같은 개재물의 배치로서 원점에 있는 개재물과 중복되지 않는 배치만을 고려해야 하기 때문에 그 가능한 배치는 제약이 따른다. 타원체 E_1의 체적을 V로 하고 이 타원체 E_1의 내측과 타원체 E_2의 외측으로 규정된 영역의 체적을 V'로 하면, 이 경우의 p는 $p=(V'/V)f$로 주어질 수 있다. 따라서 문제는 V'/V의 양을 평가하는 것에 귀착하므로, Fig. 4에 나타낸 (x_1, x_2, x_3) 좌표 공간을,

$$y_1=x_1/a,\ y_2=x_2/b,\ y_3=x_3/c \tag{A4}$$

로 정의한 (y_1, y_2, y_3) 좌표 공간으로 변환한다. 이때, 점 $X=(x^*_1, x^*_2, x^*_3)$는

$$y^*_1=x^*_1/a,\ y^*_2=x^*_2/b,\ y^*_3=x^*_3/c \tag{A5}$$

이 되는 점 $Y=(y^*_1, y^*_2, y^*_3)$으로 변환되고, 두 개의 타원체 E_1과 E_2는

$$\begin{aligned} &S: (y_1-y^*_1)^2+(y_2-y^*_2)^2+(y_3-y^*_3)^2=1 \\ &S: y^2_1+y^2_2+y^*_3=2^2 \end{aligned} \tag{A6}$$

로 나타낼 수 있는 구체 S_1과 S_2로 변환된다. 한편 x-공간에 있어서 미소 체적요소 $dx_1\ dx_2\ dx_3$는 y-공간에서의 $dy_1\ dy_2\ dy_3$와 $dx_1\ dx_2\ dx_3=abc\cdot dy_1\ dy_2\ dy_3$의 비례관계에 있기 때문에 v를 구체 S_1의 체적, v'를 구체 S_1의 내측과 S_2의 외측영역의 체적으로 하면 $V'/V=v'/v$가 된다. 여기서 대칭성을 고려하면, v'/v의 값이 동일하게 되는 점 $Y=(y^*_1, y^*_2, y^*_3)$의 추적은

$$y_1^{*2}+y_2^{*2}+y_3^{*2}=\{F(p)\}^2 \quad (\text{단지 } 1<F(p)<3) \tag{A7}$$

가 되는 구면이 되는 것이 명확함을 알 수 있다(여기서 $F(p)$는 의 함수인데 그 함수형에 대해서는 고려할 필요가 없다). 이 구면을 원래의 공간 (x_1, x_2, x_3)에 대해서 나타내면,

$$x_1^{*2}/a^2+x_2^{*2}/b^2+x_3^{*2}/c^2=\{F(p)\}^2 \tag{A8}$$

의 타원체면이 된다. 이상이 제 3절의 Fig. 3에 나타낸 결과의 도출이다.

참 고 문 헌

1. Z. Hanshin : Appl. Mech. Rev., **17**, 1 (1964).
2. Z. Hanshin : Appl. Mechanics of Composite Materials (F. W. Wendt, H. Liebowitz & N.Perrone, Eds.), Pergamon, Oxford, 201 (1967).
3. G. P. Sendeckyj : Composite Materials., (Lawrence J. Broutman & Richard H. Krock, Eds.) Vol. 2, Mechanics of Composite Materials, Academic, New York, 45 (1973).
4. Z. Hanshin & S. Shtrikman : J. Mech. Phys. Solids, **11**, 127 (1963).
5. Z. Hanshin : J. Mech. Phys. Solids, **13**, 119 (1965).
6. R. Hill : J. Mech. Phys. Solids, **12**, 199 (1964).
7. D. F. Adams & D. R. Doner : J. Compos. Mater., **1**, 4 (1964).
8. D. F. Adams & D. R. Doner : J. Compos. Mater., **1**, 152 (1967).
9. C. H. Chen & Shun Cheng : J. Compos. Mater., **1**, 30 (1967).
10. J. D. Eshelby : Proc. Roy. Soc. London, **A241**, 376 (1957).

11. J. D. Eshelby : Proc. Roy. Soc. London, **A252**, 561 (1959).
12. J. D. Eshelby : Progress in Solid Mechanics II, Sneddon and Hill, Eds.) North-Holland, Amsterdam, 87 (1961).
13. T. Mori-K. Tanaka : Acta Met., Vol. 21, p. 571, 1973. : J. Compos. Mater., **8**, 391 (1974).
15. T. Mura : Micromechanics of Defects in Solids, 2nd ed., Matinus Nijhoff, Dordrecht, 74 (1987).
16. C. -S. Kang, K. Maeda, K. -J. Wang, K. Wakashima : Acta mater., **46**, 1209 (1998).
17. C. -S. Kang, B. K. Ahn, K. Wakashima : J. of the Korean Inst. of Met. & Mater., **38**, 84 (2000).