

이방성 암석의 탄성상수 분석연구

박철환

Analysis of Elastic Constants of an Anisotropic Rock

Chulwhan Park

Abstract. The total number of elastic constants of an anisotropic body is 9 and thus it is very difficult to measure these constants experimentally. The number of elastic constants can be reduced if a rock or rock mass is regarded as isotropic or transversely isotropic material. Since only 4 stress-strain relationships can be obtained, it is theoretically impossible to determine all 5 constants from a single uniaxial compression test. Lekhnitskii overcame this problem by suggesting the fifth equation based on laboratory tests. But his equation is theoretically wrong and does not agree with experimental results. This paper describes the stress-strain relationships and the independent/dependent elastic constants of an anisotropic mass and suggests a testing method to determine 5 independent elastic constants for a transversely isotropic rock.

Keywords: elastic constants, anisotropic mass, transversely isotropic mass

초 록. 이방성 암석에서 결정되어야 할 탄성상수의 수는 전부 9개이므로 실험적으로 얻기 매우 어렵다. 대부분의 암반체는 등방성 또는 평면이방성으로 해석할 수 있어 독립적 탄성상수의 수는 감소하며, 평면이방성체에서는 5개이다. 실험실 시험을 통하여 하나의 평면이방성체 시험편으로 얻을 수 있는 응력-변형률 관계식은 4개 뿐이므로 5개의 독립적 탄성상수를 결정하는 것은 이론적으로 불가능하다. Lekhnitskii는 많은 실험을 통하여 제 5의 관계식을 설정하여 이를 해결하였지만, 이 식은 이론적으로나 실제값과 비교하면 오차를 갖고 있다. 본 연구는 이방성체에서 응력-변형률의 관계와 탄성상수의 독립성에 대하여 설명하고 있으며, 한개의 평면이방성 시험편에서 5개의 독립적 탄성상수를 결정하는 실험실 시험법을 제시하고 있다.

핵심어: 탄성상수, 이방성체, 평면이방성

1. 서 론

최근들어 터널사업의 지보설계에서 편마암과 같은 이방성 물체에 대한 역학적 해석이 많이 수행되고 있다. 암석은 구성하고 있는 입자 또는 조직의 배열에 따라 방향성을 갖는데, 층리와 절리 등이 복잡하게 구성된 경우 방향에 따라 역학적 특성을 달리하는데 이를 이방성 암반이라 한다. 이때 하나의 schistosity 나 bedding 면이 갖는 것을 평면이방성(planar grain fabric 또는 transversely isotropic) 암반이라 한다.¹⁾ 방향성이 불규칙하여 일정하지 않을 때 이를 등방성으로 해석할 수 있는데, 이때에는 시험시료의 크기가 역학적 특성에 영향을 줄 수 있다.^{1,2)}

보통의 암반은 평면이방성으로 해석할 수 있으며, 삼차원 전방향 이방성은 가상적일 뿐 만 아니라 독립적

탄성상수 9개를 실험적으로 얻기에 매우 어려운 실정이다. 김호영은 평면이방성체에서의 탄성상수 결정에 관하여 비교적 간단한 수식을 제안하였으나, 5개의 독립상수를 모두 얻을 수 없어 2개의 값을 가정하고 3개의 수식만을 제안하고 있다.³⁾ 그러나 한 개의 시험편에서 실험을 통하여 얻을 수 있는 수식은 4개까지 가능하므로 가정되는 독립상수는 1개로 제한될 수 있다. Lekhnitskii는 많은 실험을 통하여 제5의 관계식을 설정하여 해결하고자 하였으나,^{4,5)} 이는 역학적 이론전개에서도 오차를 갖고 있을 뿐만 아니라 실제의 값과 오차를 가지며, 특히 E_1/E_2 가 1에 가까운 값이 아닐 때에는 그 오차가 크게 나타난다.

2. 이론전개

2.1 Generalized Hooke's Law

스프링과 같은 물체에 적용되는 Hooke의 법칙으로부터 Cauchy가 다음 식(1)을 제안하였는데, 이를

정회원, 한국지질자원연구원 암반공학연구팀
접수일 : 2000년 10월 26일
심사 완료일 : 2001년 1월 4일

Generalized Hooke's Law 라 한다.⁵⁾

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} * \epsilon_{kl} \quad (1)$$

이 식은 선형탄성체 내의 모든 점에서 성립하며, C는 4차원 텐서로서 각 요소는 물체의 탄성상수로 구성된 값이다. 물체 내의 위치에 따라 C의 값이 달라지면 이를 불균질 물체라 한다. 여기서의 역학적 전개는 방향성과 관계없이 균질의 선형탄성체(homogeneous linear elastic body)에 대하여 논의한다.

이방성 물체의 방향성은 n 차원을 가질 수 있으며, 이때 수식의 전개는 더 이상 발전되지 않는다. 따라서 방향성을 직교하는 3방향으로만 가정할 때 이를 정방형 이방성체 또는 삼방향 이방성체라고 해석될 수 있는 Orthotropic Body라 한다. 3차원 좌표계에서 i-j-k-1은 3방향을 가지므로 텐서로 표현된 탄성상수 C-matrix는 81개의 요소로 이루어져 있지만, 모두 독립적이지는 않다.

응력텐서에서 i-j가 바뀌어도 같은 응력이므로 ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), i-j의 조합은 6개이다. 변형률에서도 k-1의 조합은 6개가 되어 C의 독립요소는 36개가 된다. 또한 변형률 에너지 해석에서 i-j 조합과 k-1 조합은 바뀌어도 C는 같은 값이므로(식(2)), C-matrix는 완전대칭을 이루고 독립적 요소 수는 21개이다.

$$C_{ijkl} = C_{klij} (= C_{jikl} = C_{ijlk}) \quad (2)$$

Sokolnikoff는 6개의 응력텐서를 i = 1~6의 일차원으로 표현하면서 다음과 같은 식(3)을 제안하였다.

$$\sigma_i = C_{ij} * \epsilon_j \quad (3)$$

$$\epsilon_i = S_{ij} * \sigma_j \quad (4)$$

여기서 $\epsilon_4, \epsilon_5, \epsilon_6$ 은 각각 $\gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}$ 이며, 식(4)는 변형률을 얻는 식으로 식(3)보다는 관심의 대상이 되며 S는 C의 역행렬식이다. C와 같이 S-matrix도 6×6 matrix로서, 식(2)와 같이 $S_{ij} = S_{ji}$ 되어 36개의 요소 중에서 독립요소는 역시 21개이다. 응력과 변형률의 관계에서 24개의 요소는 0이 되며, non-zero 요소는 12개인데 이를 풀어서 표시하면 식 (5)와 같다.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{x,1} \\ \epsilon_{y,2} \\ \epsilon_{z,3} \\ \gamma_{yz,4} \\ \gamma_{zx,5} \\ \gamma_{xy,6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x,1} \\ \sigma_{y,2} \\ \sigma_{z,3} \\ \tau_{yz,4} \\ \tau_{zx,5} \\ \tau_{xy,6} \end{bmatrix} \quad (5)$$

S-matrix에서 12개 요소는 영률 3개 (E_i) 및 포아송비 6개 (ν_{ij}), 전단계수 3개 (G_{ij})등의 12개 탄성상수로 이루어져 있다. 여기서 전단상수는 $G_{ij} = G_{ji}$ 이며 포아송비는 $\nu_{ij} \neq \nu_{ji}$ 의 관계에 있다. 방향에 따라 포아송비는 같지 않기 때문에 ν_{ij} 는 i방향의 응력에 의하여 발생하는 j 방향의 변형률을 얻을 수 있는 탄성상수이다. σ_i 에 의하여 발생하는 세방향의 법선변형률은 다음 식(6)과 같다.

$$\epsilon_1 = 1/E_1 \sigma_1 \quad (6-1)$$

$$\epsilon_2 = -\nu_{12} / E_1 \sigma_1 \quad (6-2)$$

$$\epsilon_3 = -\nu_{13} / E_1 \sigma_1 \quad (6-3)$$

식(5)와 식(6)에서 $S_{11} = 1/E_1$ 이며, $S_{21} = -\nu_{12}/E_1$, $S_{31} = -\nu_{13}/E_1$ 이다. 또한 $S_{12} = -\nu_{21}/E_2$ 의 관계를 얻을 수 있으며, 식 (2)에서 언급하였듯이 $S_{12} = S_{21}$ 이므로, 탄성상수는 다음 식(7)과 같은 관계에 있다. 따라서 3개의 포아송비는 독립상수가 아니므로 이방성체에서 독립상수의 수는 전부 9개이다.

$$\nu_{ij}/E_i = \nu_{ji}/E_j \quad (7)$$

2.2 Transversely Isotropic Body

대부분의 암반은 삼차원의 층리나 절리를 갖지만, 미시적 관점에서는 하나의 schistosity 나 bedding 면을 갖고 다른 두 방향으로는 동일한 역학적 특성을 갖는다고 가정할 수 있다. 다른 방향의 절리들은 층리에 비하여 역학적 거동과 안정성에 더 큰 영향을 미칠 수 있다 하더라도 이는 이방성으로 해석할 수는 없다. 따라서 이방성 특성규명은 이러한 평면이방성체의 해석으로 수행될 수 있으며, 삼방향 이방성체는 가상적인 물체이다.¹⁾

평면이방성체의 층리면은 등방성면이 되며, 이에 수직하는 방향축을 이방성 대칭축이라 하는데 본 연구에서는 층리면을 1-3면으로, 대칭축을 2방향으로 설정하고 수식을 전개한다. 1-3면은 등방성이므로 다음 식(8)이 성립됨을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} E_1 &= E_3 \\ \nu_{21} &= \nu_{23} \\ G_{23} &= G_{12} \\ G_{13} &= 2*(1 + \nu_{13})/E_1 \end{aligned} \quad (8)$$

이로서 4개의 탄성상수는 독립적이지 않다. 이상의 수식전개는 기존의 연구³⁾에서 소개된 바 있으나 포아송비의 방향성을 고려하지 않아 혼돈을 초래하고 있다. 다음 표 1은 독립적 탄성상수와 비독립적 탄성상수를 구분한 것이며, 참고문헌 3과 표기를 같이 하기 위하여 5

Table 1. Independent and dependent elastic constants.

| independent constants | | dependent constants | |
|-----------------------|---------------|---------------------|---------------------|
| constant | new notation* | constant | equation |
| E_1 | E_1 | E_3 | $= E_1$ |
| E_2 | E_2 | ν_{12} | $= \nu_2 * E_1/E_2$ |
| ν_{31} | ν_1 | ν_{13} | $= \nu_1$ |
| ν_{21} | ν_2 | ν_{23} | $= \nu_2$ |
| G_{12} | G_2 | ν_{32} | $= \nu_2 * E_1/E_2$ |
| | | G_{23} | $= G_2$ |
| | | $G_{31} (G_1)$ | $= 2*(1+\nu_1)/E_1$ |

*참고문헌 3)에서의 표기

개의 독립상수를 간단한 표기로 언급하였다.

이상으로 평면이방성 물체에서 Hooke의 법칙에 의한 응력-변형을 관계식은 다음의 식(9)와 같다.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_2/E_2 & -\nu_1/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_2/E_2 & 1/E_2 & -\nu_1/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_1/E_1 & -\nu_2/E_2 & 1/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (9)$$

* G_1 is the modulus of rigidity on isotropic plane as in eq.(8)

3. 변형을 측정과 탄성상수의 결정

3.1 독립적 변형률

단축압축시험용 시험편에서 응력과 변형률을 측정하여 식 (9)를 이용하면 탄성상수를 얻을 수 있다. 그림 1과 같이 시험편의 세로축을 y축이라 하고, 층리의 경사 방향과 주향방향을 1축 및 3축, 그리고 층리의 수직방향을 2축이라 설정한다. 앞의 표 1에서 독립적 탄성상수는 $\nu_1 (= \nu_{31})$ 외의 4개는 1-2방향으로 표현되는 이방성 평면에서 결정되는 크기임을 알 수 있다. 1-2 방향을 포함하는 이방성 평면은 시험편의 A 위치이며, 이를 확대하여 표현한 미소평면은 그림 1의 (a)이다. 이 때의 가로방향을 x축이라 설정한다. 이러한 x-y 미소평면(또는 1-2 미소평면)에 변형률을 측정할 수 있는데, 측정방향은 1-2-x-y 축의 어떤 방향이라도 관계없다.(그림 2참고) 그러나 한 평면에서 구할 수 있는 독립적 변형률은 3개에 지나지 않아 어떠한 응력조건으로도 4개의 관계식을 얻을 수 없다.

45도 (또는 60도) Strain Rosette로서 측정된 3개의 변형률로부터 최대 및 최소변형률의 크기와 방향을 얻을

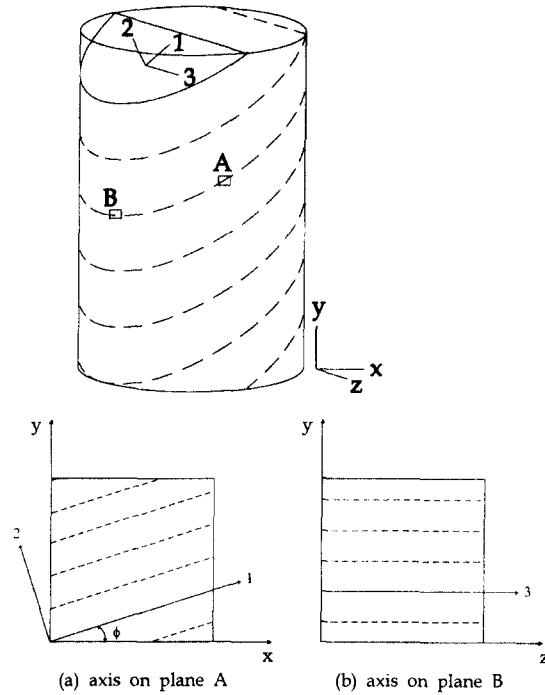


Fig. 1. Axis of a transversely isotropic specimen.

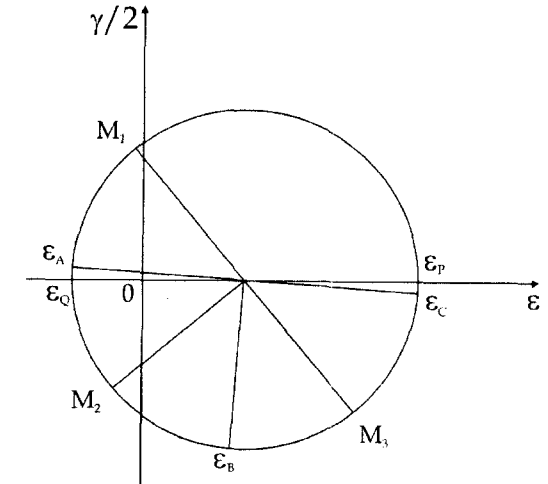
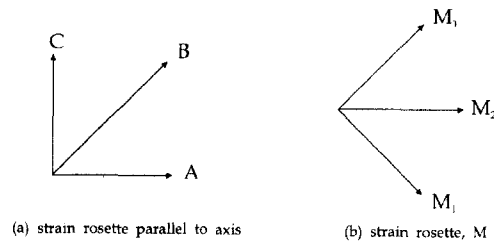


Fig. 2. Strains on plane A.

수 있고, 이로부터 1-2-x-y 평면의 모든 방향의 변형률을 얻을 수 있는데, 이를 Mohr의 변형률원으로 도시하면 그림 2와 같다. 이상으로 얻어진 응력(σ_y , $\sigma_1 = \sigma_y \sin^2 \phi$ and $\sigma_2 = \sigma_y \cos^2 \phi$)과 1-2면의 변형률(ϵ_1 , ϵ_2 및 γ_{12})로부터 식 (9)는 다음 식과 같이 전개된다.

$$A = \frac{1}{E_1} \sin^2 \phi + \frac{-\nu_2}{E_2} \cos^2 \phi \quad (10-1)$$

$$B = \frac{-\nu_2}{E_2} \sin^2 \phi + \frac{1}{E_2} \cos^2 \phi \quad (10-2)$$

$$C = \frac{1}{G_2} \sin \phi \cos \phi \quad (10-3)$$

$$\text{where } A = \frac{\epsilon_1}{\sigma_y}, B = \frac{\epsilon_2}{\sigma_y} \text{ and } C = \frac{\gamma_{12}}{\sigma_y}$$

한편, 그림 1의 (b)는 (a)의 90도 방향의 측면에 존재하는 평면(B 위치)으로 1 및 2방향을 포함하지 않는 3방향과 z방향을 포함하고 있다. 이 면은 경사각이 아주 작을 때 2-3평면에 가깝고, 큰 경사각일 때에는 1-3평면에 가까운 y-z평면 또는 y-3평면이다. 이 지점에서 얻을 수 있는 변형률 가운데 앞의 A 및 B, C와 독립적인 것은 $\epsilon_3 = \epsilon_z$ 뿐이며, 식 (9)에서 얻을 수 있는 관계식은 식 (10-4)와 같다.

$$D = \frac{-\nu_1}{E_1} \sin^2 \phi + \frac{-\nu_2}{E_2} \cos^2 \phi, \text{ where } D = \frac{\epsilon_3}{\sigma_y} \quad (10-4)$$

3.2 변형률의 방향성

시험을 수행하는데 있어서 그림 1의 A 평면에 45도 Strain Rosette의 방향을 설정하는데 임의의 각도를 설정함에 따라 그림 2의 $M_{1,2,3}$ 의 값을 얻는 경우가 허다하다. 이런 경우 2개의 변형률은 0에 가깝게 측정되어 실험오차가 상대적으로 크게 발생한다. 실험에서 변형률의 측정 정밀도를 높이기 위하여 큰 값을 얻도록 방향을 설정해야 할 필요가 있으므로 게이지의 방향을 시험편의 축방향이 되도록 한다. 이런 경우 축방향 변형률은 그림 2에서 보듯이 주변형률과 가까운 값이 되는데, 그 크기는 다음과 같다.

$$\epsilon_A = \epsilon_x = \epsilon_P$$

$$\epsilon_{B(A+45)} = (\epsilon_P + \epsilon_Q)/2$$

$$\epsilon_{C(A+90)} = \epsilon_y = \epsilon_Q$$

단축압축시험에서 최대 주응력의 방향은 y축과 일치하지만 최대 주변형률의 방향은 y축과 일치하지 않는다. 그림 3은 이방성 방향이 20도~70도인 각각의 평면 이방성체에서 ν_{12} 의 크기에 따른 최대 주변형률 방향과

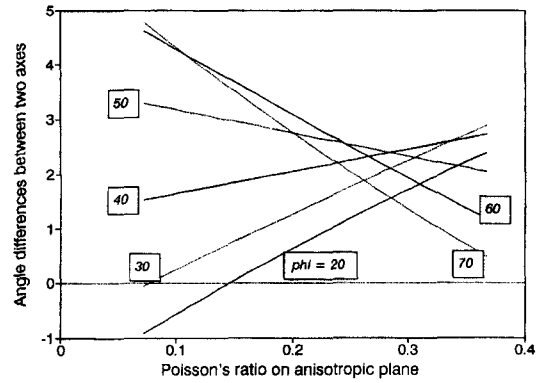


Fig. 3. Angle differences between y axis and maximum principal strain directions.

y축 방향의 사이각을 보여주고 있다. 이때 E_2 의 크기를 E_1 의 80%로 가정한 값이며, 120%일 때도 비슷한 경향을 보이고 있다. 주변형률 방향은 x-y 축으로부터 대체로 양의 각도이며, -1~5도 사이에 존재함을 알 수 있다.

한편, 그림 1의 B 평면에 가로방향인 z방향의 게이지로부터 얻을 수 있는 값은 $\epsilon_D = \epsilon_z = \epsilon_3$ 이다. 게이지를 부착할 수 있는 A면과 B면은 시험편 중앙 높이에서는 각각 2점이 존재하므로 최대 8개의 변형률을 측정할 수 있다. 실험에서는 8개의 변형률을 측정하고, 변형률 $\epsilon_{A, B, C, D}$ 는 평균값을 사용하여 측정오차를 최소화할 수 있다. 이상으로 얻어지는 4개의 변형률과 수직응력으로부터 식 (10)에서 요구되는 A 및 B, C, D 값을 얻을 수 있다.

3.3 제 5의 관계식

식 (10)의 네 개의 식들은 5개의 탄성상수를 포함하고 있어 그 값들을 얻을 수 없어, 하나의 값을 가정되거나 다른 시험편에서 얻어져야 한다. 시료의 채취가 허용된다면 1 또는 2 방향으로 시추한 코아로부터 E_1 또는 E_2 를 독립적으로 쉽게 얻을 수 있다. 그러나 대부분의 경우에는 시추방향이 일정하지 못하며 시료의 양이 한정되어 새로운 시험편을 만들기 어렵지 않다.

Lekhnitskii는 이를 해결하기 위하여 많은 실험으로 얻어진 자료에 의하여 제5의 관계식을 다음과 같은 식 (11)을 제안하였다.⁴⁾ 그러나, 이 식은 역학적 전개에서도 오차를 갖고 있어 실제의 값과 비교하는 평가연구가 수행되어야 하며, 이에 따라 보다 근거있는 새로운 제 5 수식의 제안이 요구된다.

$$G_2 = \frac{E_2}{1 + E_2/E_1 + 2\nu_2} \quad (11)$$

4. 결론 및 고찰

이방성 이론을 통하여 평면이방성체에서 결정되어야 할 독립적 탄성상수는 5개이다. 그러나 한개의 평면이방성 시험편으로부터 얻을 수 있는 응력-변형률 관계식은 4개에 불과하여 독립상수를 결정할 수 없다. 이를 해결하기 위해서는 제5의 관계식이나 한개 이상의 독립상수가 가정되어야 한다. Lekhnitskii가 제안한 관계식은 이론전개에 가정이 많아 오류를 갖고 있어 이를 제5식으로 사용하기에는 한계가 있어, 이에 대한 분석 및 평가와 새로운 수식의 제안은 다음 연구보고에서 발표될 예정이다.

탄성상수의 값과 이방성 면의 각도에 따라 주변형률의 방향은 시험편의 x-y축과 일치하지 않는데 그 오차는 -1~5도 정도이다. 따라서 시험편의 수직 및 수평방향으로 측정함으로써, 시험에서 발생하는 오차를 최소화

화할 수 있다. 또한 변형률을 측정하는 A 및 B면은 각각 2지점이 존재하므로 8개의 값을 측정하여 평균값을 사용하여 시험오차를 줄이는 방법이 추천된다.

참고문헌

1. Wittke W., 1990, Rock mechanics-Theory and applications with case histories, Springer-Verlag.
2. 서용석, 도미란, 오대열, 홍성완, 배규진, 2000, 균질화법을 이용한 화강암의 대표요소체적 산정에 관한 연구, 한국암반공학회지, 10(3), 309-315.
3. 김호영, 1995, 이방성 암석에 대한 탄성계수의 실험적 결정, 한국암반공학회지, 5(4), 318-322.
4. Lekhnitskii S. G., 1963, Theory of elasticity of anisotropic elastic body, Holden-Day Inc.
5. Itasca Consulting Group; 1995, FLAC manual, version 3.3.
6. Flugge W., 1972, Tensor analysis and continuum mechanics, Springer-Verlag.

박철환



1979년 서울대학교 공과대학 자원공학과 공학사
 1981년 서울대학교 공과대학 자원공학과 공학석사
 1987년 서울대학교 공과대학 자원공학과 공학박사
 Tel : 042-868-3244
 E-mail : cwpark@rock25t.kigam.re.kr
 현재 한국지질자원연구원 탐사개발연구부 암반공학연구팀 책임연구원