

지하공간온도의 수치해석을 위한 행렬 구성방법에 관한 연구

정수일¹⁾

A Study on a Method of Making the Matrix for the Numerical Analysis of Underground Temperature

Jeong, Soo Il

Abstract. It is often said that the supply of fossil fuels in use for energy source will last only for 40 years. Furthermore, statistics shows that most of the fuels are imported from outside and that 30-40% of total cost for housing in Korea. One of those methods for reducing the energy cost for housing is to use underground space. Being used well, it may bring a considerable saving of energy since the underground space keeps its air cool in summer and warm in winter. To use underground space, we need to analyse its temperature first. For this purpose, what is generally used is the numerical analysis with the use of nodal system. That is, we can calculate a specific underground temperature with the matrix of thermal resistance after we make a nodal system. However, the existing numerical analysis programs need usually high cost and require a computer with large capacity. So they are seldom used in practice. Considering such problems, this study seeks to find a method for making the matrix of thermal resistance operatable on PC level.

Keywords: matrix, underground temperature, thermal resistance, nodal system

초 록. 우리가 에너지원으로 사용하고 있는 연료는 40년이면 바닥이 난다는 게 일반적으로 알려진 사실이며 우리나라는 주거용에너지가 전체에너지 수요의 30~40%를 차지하고 있는 실정으므로 주거용 에너지 절약의 한 방법으로 지하공간의 사용을 검토해 볼지도 하다. 지하공간의 열 해석에는 그리드로 된 교점회로망을 구성하여 해석을 하게 되는데, 지금 시중에 나와있는 해석용 프로그램은 비싸고 큰 용량을 필요로 함으로 현장에서의 사용이 쉽지는 않다. 이 연구에서는 이러한 점에 착안하여, 교점회로망을 구성하여서 중심교점에 영향을 미치는 인접교점들의 열저항요소를 계산하여 행렬에 대입함으로써, 지중온도를 구하는 방법을 연구하여 실험현장의 실측치와 비교한 결과, 만족할 만한 결과를 얻었다. 따라서 이 방법을 적용하면, PC에서도 값싼 계산용 프로그램(C++, 포트란, 베이직 등)을 사용하여 지중온도를 쉽게 해석할 수 있을 것으로 생각된다.

핵심어: 행렬, 지중온도, 열저항, 교점회로망

1. 서 론

1.1 연구의 목적

유가가 치솟고 있는 이즈음, 우리 나라 에너지 비용의 30~40%를 차지하는 주거용 에너지비용을 줄일 수 있는 방법의 하나로서 지하공간의 이용을 생각해 볼지도 하다. 지하공간은 지중의 열특성이 겨울철에는 온기를 여름철에는 냉기를 가지고 있어서 이용하기에 따라서 상당한 정도의 에너지를 절약할 수 있다. 지하공간의 에너지 절약을 위해서는 지중온도의 분석이 필수적

인 요소가 되는데, 이를 위해서는 교점회로망(Nodal system)을 구성하여 수치해석을 하는 것이 손쉬운 방법이라고 할 수 있다.

교점회로망을 만들어서 경계조건을 부여한 후 행렬을 구성하여 해석을 하게 되는데, 이것을 위한 각종 프로그램이 나와 있긴 하지만 프로그램 비용이 만만치 않고 이것을 작동시키기 위해서는 큰 용량이 필요한 실정이다.

따라서 이 연구에서는 작은 용량으로 행렬을 구성하여 프로그램을 작성할 수 있는 방법을 연구한다.

1.2 연구방법

열전달 해석에서는 유한차분법이 많이 사용되고 있고, 교점회로망의 사용을 그 기본으로 하고 있다.

¹⁾정회원, 금오공과대학교 토목·환경 및 건축공학부 교수
접수일 : 2000년 10월 18일
심사 완료일 : 2000년 12월 1일

교점회로망을 구성하여 수치해석을 하는데 대한 연구는 외국에서 한때 활발하게 이루어졌으나 구체적인 방법은 발표되지 않았다.

이 연구에서는, 교점회로망을 구성하는 각 교점(Node)에 대하여 인접교점이 미치는 영향을 고려하여 행렬구성의 각 요소가 어떻게 생성되는가를 살펴본 후, 프로그램을 만들어서 운용한 결과와 현장실측치를 비교하기로 한다.

2. 교점회로망(Nodal system)

유한차분법의 수치해석에서 사용하고 있는 교점회로망은 Fig. 1과 같은 격자틀로서 교점(i, j)를 중심으로 횡방향선행점 i-1, 횡방향후행점 i+1, 종방향선행점 j-1, 종방향후행점 j+1로 하여, 각지점의 온도를 $T_{i,j}$, $T_{i-1,j}$, $T_{i+1,j}$, $T_{i,j-1}$, $T_{i,j+1}$ 로하는 검사체적(control volume) 지배방정식(1)에서 출발하면 식(2)와 같은 온도방정식이 생성된다.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} = 0 \quad (1)$$

Fig. 1에서 $\Delta X_1 = \Delta X_2 = \Delta X$, $\Delta Y_1 = \Delta Y_2 = \Delta Y$ 일 때 교점 i, j와 그 주변 4개의 교점사이의 온도구배는 다음과 같다.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial X}\right)_{i+\frac{1}{2},j} \approx \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta X}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial X}\right)_{i-\frac{1}{2},j} \approx \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta X}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial Y}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} \approx \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta Y}$$

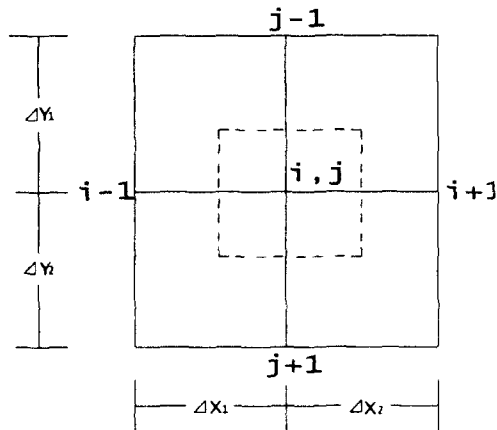


Fig. 1. Nodal system.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial Y}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} \approx \frac{T_{i,j} - T_{j-1}}{\Delta Y}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial X}\right)_{i+\frac{1}{2},j} - \left(\frac{\partial T}{\partial X}\right)_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta X} \quad (1.1)$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial Y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial Y}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial T}{\partial Y}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta Y} \quad (1.2)$$

식 1.1과 식 1.2를 식 1에 대입하면,

$$\frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 2T_{i,j}}{(\Delta X)^2} + \frac{T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 2T_{i,j}}{(\Delta Y)^2} = 0$$

$\Delta X = \Delta Y$ 이면 식 2와 같이 된다.

$$T_{i-1,j} + T_{i+1,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1} - 4T_{i,j} = 0 \quad (2)$$

Fig. 1과 같은 교점회로망을 열저항요소법으로 표현한다면 Fig. 2와 같이 되며 열전달 방정식은 다음과 같다.

$$Q_i + \sum_j \frac{T_i - T_j}{R_{ij}} = 0 \quad (3)$$

식(3)에서 Q_i 는 내부열원 등으로 인하여 교점 i,j로 들어가는 열량인데 발생열원이 없는 경우는 0으로 간주된다.

Fig. 2는 Fig. 1의 교점회로망을 열저항 회로망으로 고친 것이며 각 열저항은 다음과 같다.

$$R_{i,1} = \frac{\Delta X_1}{k_j(\Delta Y_1 + \Delta Y_2)/2} \quad (4)$$

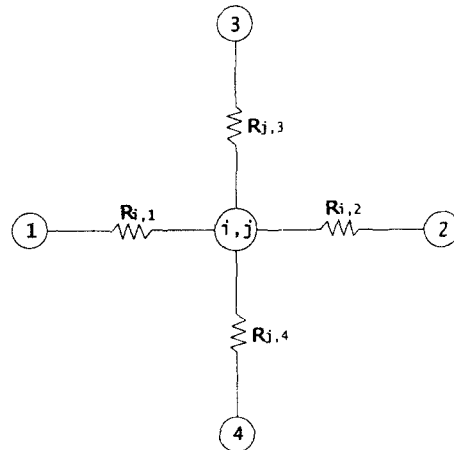


Fig. 2. Thermal resistance system.

$$R_{i,2} = \frac{\Delta X2}{k_2(\Delta Y1 + \Delta Y2)/2} \quad (5)$$

$$R_{j,3} = \frac{\Delta Y1}{k_3(\Delta X1 + \Delta X2)/2} \quad (6)$$

$$R_{j,4} = \frac{\Delta Y2}{k_4(\Delta X1 + \Delta X2)/2} \quad (7)$$

k_1 : $R_{i,1}$ 의 열전도율

k_2 : $R_{i,2}$ 의 열전도율

k_3 : $R_{j,3}$ 의 열전도율

k_4 : $R_{j,4}$ 의 열전도율

따라서 i, j 에서의 온도방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{T_{i-1}}{R_{i,1}} + \frac{T_{i+1}}{R_{i,2}} + \frac{T_{j-1}}{R_{j,3}} + \frac{T_{j+1}}{R_{j,4}} - \frac{T_{i,j}}{\Sigma R} = 0 \quad (8)$$

단: $\Sigma R = R_{i,1} + R_{i,2} + R_{j,3} + R_{j,4}$

여기서 $\frac{1}{R_{i,1}} = R1(i,j), \frac{1}{R_{i,2}} = R2(i,j), \frac{1}{R_{j,3}} = R3(i,j),$

$\frac{1}{R_{j,4}} = R4(i,j), \frac{1}{\Sigma R} = Rt(i,j)$

로 하면 식(8)은 다음과 같이 된다.

$$R1(i,j)T_{i-1} + R2(i,j)T_{i+1} + R3(i,j)T_{j-1} + R4(i,j)T_{j+1} - Rt(i,j)T_{i,j} = 0 \quad (9)$$

수치해석을 위한 행렬을 구성할 때는 상수인 $R1, R2, R3, R4, Rt$ 만을 필요로 하므로, 중심교점 (i, j) 에 영향을 미치는 열저항 계수 $R1(i,j), R2(i,j), R3(i,j), R4(i,j), Rt(i,j)$ 를 표시하면 Fig. 3과 같다.

Fig. 3은 임의의 교점 i, j 한 개에 대해서만 형성되는 열저항 계수이며, 횡방향으로 ΔX 가 3개($i \rightarrow 4$), 종방향으로 Δy 가 3개($j \rightarrow 4$)인 교점회로망에 대해서 각 중심교점에 영향을 미치는 열저항 계수를 표시하면 Fig. 4와 같다.

3. 행렬의 구성

Fig. 4를 행렬구성표로 만들면 Table 1과 같이 되며 교점 2,2에 대해서 설명해 보면 다음과 같다.

즉, 교점 2,2에서의 열저항 계수들은 Fig. 4에서 □ 표시 한 것처럼, 교점 2,2에 $Rt(2,2)$ 가 배치된 것을 중심으로 하여, 교점 2,1에 $R1(2,2)$, 교점 2,3에 $R2(2,2)$, 교점 1,2에 $R3(2,2)$, 교점 3,2에 $R4(2,2)$ 가 배치된다.

이것을 Table 1에 옮기면 JP방향 6, K방향 6지점에

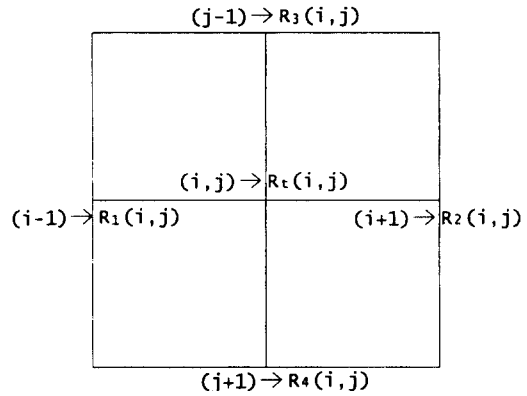


Fig. 3. Resistance of node.

		j →			
		1	2	3	4
i ↓	1	Rt (1,1)	R2 (1,1)	R2 (1,2)	R2 (1,3)
	2	R1 (1,2)	Rt (1,2)	Rt (1,3)	Rt (1,4)
	3	R3 (2,1)	R1 (1,3)	R1 (1,4)	R3 (2,4)
	4		R3 (2,2)	R3 (2,3)	
2	R4 (1,1)	R4 (1,2)	R4 (1,3)	R4 (1,4)	
3	Rt (2,1)	R2 (2,1)	R2 (2,2)	R2 (2,3)	
4	R1 (2,2)	Rt (2,2)	Rt (2,3)	Rt (2,4)	
1	R3 (3,1)	R1 (2,3)	R1 (2,4)	R3 (3,4)	
2		R3 (3,2)	R3 (3,3)		
3	R4 (2,1)	R4 (2,2)	R4 (2,3)	R4 (2,4)	
4	Rt (3,1)	R2 (3,1)	R2 (3,1)	R2 (3,3)	
1	R1 (3,2)	Rt (3,2)	Rt (3,3)	Rt (3,4)	
2	R3 (4,1)	R1 (3,3)	R1 (3,3)	R3 (4,4)	
3		R3 (4,2)	R3 (4,3)		
4	R4 (3,1)	R4 (3,2)	R4 (3,3)	R3 (3,4)	
1	Rt (4,1)	R2 (4,1)	R2 (4,2)	R2 (4,3)	
2	R1 (4,2)	Rt (4,2)	Rt (4,3)	Rt (4,4)	
3		R1 (4,3)	R1 (4,4)		

Fig. 4. Layout of resistance in node.

$Rt(2,2)$ 가 위치하고, 선행후행에 따라 위치를 잡게 된다.

이 방법으로 16개 교점전체의 열저항상수를 Table 1과 같이 표시할 수 있다. 또한 (8)식에 의한 온도방정식도 16개가 형성되므로 다음과 같은 행렬 방정식이 성립된다.

$$[A] [T] = [C] \quad (10)$$

$$[T] = [A]^{-1} [C] \quad (11)$$

단 : $[A] = [Table 1], [C] = [C1,1]$

$$\begin{bmatrix} [C1,2] \\ [\cdot] \\ [\cdot] \\ [C4,4] \end{bmatrix}$$

식(11)에서 [T]를 구하면 되고, [C]는 이미 알고 있는 경계조건에 의해 형성되는 상수항이 된다.

예를 들어 Fig. 4에서 i방향이 1인 표면의 온도를 40°C로 가정하면 T1,1, T1,2, T1,3, T1,4는 모두 40°C가 된다. 구체적인 예로서 교점 2,2에서의 C2,2는 다음과 같다.

$$R1(2,2), T2,1+R2(2,2), T2,3+R3(2,2), T1,2+R4(2,2), T3,2 - Rt(2,2), T2,2 = 0 \tag{12}$$

(12)식에서 T1,2는 i가 1인 표면교점(1,2)의 온도이므로 40°C가 되고, R3(2,2)는 식(6)에서 계산되므로 R3(2,2)xT1,2는 상수로 변하게 되어 C2,2의 값으로 되며, Table 1의 빈칸은 값이 없으므로 모두 0으로 대입된다.

4. 적용방법 및 검증

이미 계산된 열저항 계수를 Table 1의 행렬안의 정해진 위치에 대입시키는 것이 필요하다. 이 연구에서는 C** 언어를 사용하여 프로그램을 구성하였는데 그 일부분을 소개하면 다음과 같다. 해당 중심교점은 Table 1의 행렬에서는 6.6에 해당된다.

$$\begin{aligned} a[jp] [jp-4] &= R3[2] [jp-4] \\ a[jp] [jp-1] &= R1[2] [jp-4] \\ a[jp] [jp] &= Rt[2] [jp-4] \\ a[jp] [jp+1] &= R2[2] [jp-4] \\ a[jp] [jp+4] &= R4[2] [jp-4] \end{aligned}$$

JP = 6이므로 위의 항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} a[6] [2] &= R3[2] [2] \\ a[6] [5] &= R1[2] [2] \\ a[6] [6] &= Rt[2] [2] \\ a[6] [7] &= R2[2] [2] \\ a[6] [10] &= R4[2] [2] \end{aligned}$$

여기서 a[]]는 행렬 각항을 나타내고 JP는 Table 1에서 행(row)의 번호를 나타내는 수치이다.

위의 방법으로 Fig. 5, 6과 같은 구조의 건물에서, 바닥면으로부터 1.1m높이의 벽면온도를 해석한 결과는 17.05°C로서, 실제측정값 17.93°C보다 0.88°C낮은 값을

Table 1. Matrix of resistance.

JP ↓	K →															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	Rt(1,1)	R2(1,1)			R4(1,1)											
2	R1(1,2)	Rt(1,2)	R2(1,2)			R4(1,2)										
3		R3(1,3)	Rt(1,3)	R2(1,3)			R4(1,3)									
4			R1(1,4)	Rt(1,4)	R2(1,4)			R4(1,4)								
5	R3(2,1)			R1(2,1)	Rt(2,1)	R2(2,1)			R4(2,1)							
6		R3(2,2)			R1(2,2)	Rt(2,2)	R2(2,2)			R4(2,2)						
7			R3(2,3)			R1(2,3)	Rt(2,3)	R2(2,3)			R4(2,3)					
8				R3(2,4)			R1(2,4)	Rt(2,4)	R2(2,4)			R4(2,4)				
9					R3(3,1)			R1(3,1)	Rt(3,1)	R2(3,1)			R4(3,1)			
10						R3(3,2)			R1(3,2)	Rt(3,2)	R2(3,2)			R4(3,2)		
11							R3(3,3)			R1(3,3)	Rt(3,3)	R2(3,3)			R4(3,3)	
12								R3(3,4)			R1(3,4)	Rt(3,4)	R2(3,4)			R4(3,4)
13									R3(4,1)			R1(4,1)	Rt(4,1)	R2(4,1)		
14										R3(4,2)			R1(4,2)	Rt(4,2)	R2(4,2)	
15											R3(4,3)			R1(4,3)	Rt(4,3)	R2(4,3)
16												R3(4,4)			R1(4,4)	Rt(4,4)

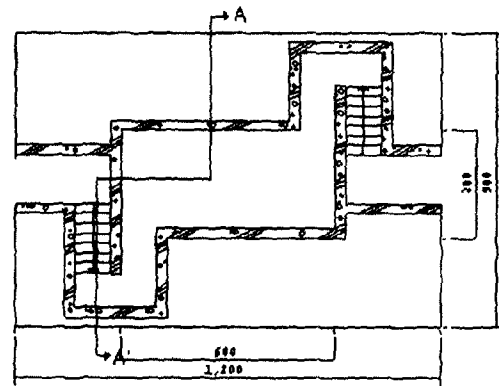


Fig. 5. Plan of building.

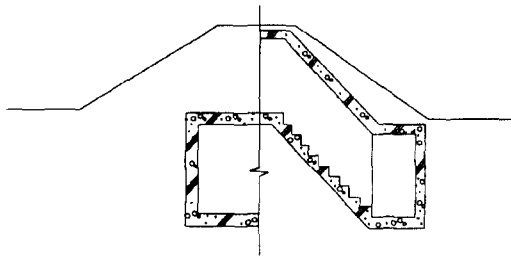


Fig. 6. Cross section of building.

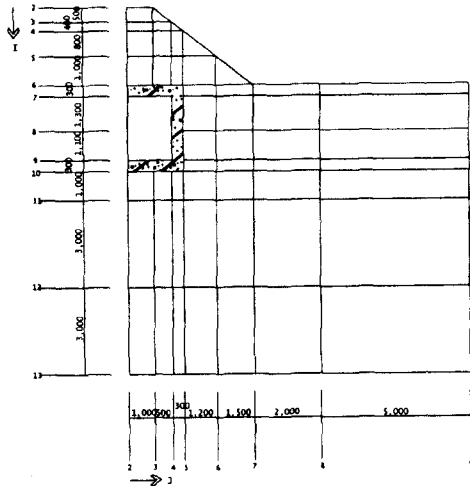


Fig. 7. Nodal system of building.

나타내었다. 이때 사용된 교점회로망은 Fig. 7과 같으며 실험현장의 조건은 다음과 같다.

현장조건(Fig. 5, 6)

1. 측정온도

- 가. 실내온도 : 18°C
- 나. KATA온도계 하강시간 : 36.5 sec
* KATA율 : 354 mgcal/cm²
- 다. Glove 온도 : 18.5°C

2. 지중온도 (실측치)

- 지표면 최고 22.5°C
최저 12.0°C
- 3 m 19.1°C
- 5 m 16.8°C

3. 흙의 열물성계수

- k : 0.46 kcal/mh°C
- p : 1.890 kg/m³
- c : 0.2 kcal/kg°C

5. 결 론

이상과 같은 연구에서 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 지하공간 구조체의 온도해석의 방법으로, 현장 혹은 연구실에서 PC를 이용하여 유한차분법의 수치해석 방법을 프로그램으로 작성하기 위해서는 교점회로망을 구성한 후 각 교점사이의 열저항 계수를 구하여 행렬을 구성하는 것이 효과적이다.
2. 인접교점에 영향을 미치는 열저항 계수를 상·하, 좌·우의 교점간격 ΔX , ΔY 와 열전도율 k 로서 구한 다음 교점의 숫자에 맞는 정방형 행렬에 대입하여 해당지점의 지중 온도를 쉽게 구할 수 있다.
3. 기존에 측정된 공간에 위의 방법을 적용하여 지하공간 벽체 온도를 해석한 결과, 실측치와는 0.88°C 차이를 나타내었다.

기호설명

- T_i : 교점 i 지점의 온도 (°C)
- ΔX : 교점 회로망의 가로 방향 증분
- ΔY : 교점 회로망의 세로 방향 증분
- i : 가로 방향 진행 첨자
- j : 세로 방향 진행 첨자
- k : 열전도율(kcal/mh°C)
- R_{ij} : 교점 ij 지점의 열저항 계수(kcal/°C)
- R_1 : 선행 가로 방향의 열저항 계수(kcal/°C)
- R_2 : 후행 가로 방향의 열저항 계수(kcal/°C)
- R_3 : 선행 세로 방향의 열저항 계수(kcal/°C)
- R_4 : 후행 세로 방향의 열저항 계수(kcal/°C)
- Q_i : 내부열원으로해서 중심교점으로 흘러들어가는 열량(kcal)
- $a[] []$: 행렬구성함
- JP : 행렬 구성시 세로 방향 진행 첨자
- K : 행렬 구성시 가로 방향 진행 첨자

감사의 글

본 연구는 1999년도 금오공과대학교 학술연구비에 의하여 연구된 논문임.

참고문헌

1. 정수일, 1999, 불규칙지역의 지하공간 온도해석에 관한 연구, 대한건축학회논문집 15권 9호 (9통권 131호), 11p.
2. Frank P. Incropera, 1981, Fundamentals of Heat

- Transfer, John Wiley & Sons, 147p.
3. J.P. Holman, 1981, Heat Transfer, Mc GRAW-HILL INTERNATIONAL BOOK COMPANY, 73p, 83p.
 4. Kersten M., 1981, Numerical Analysis of the Thermal Region, Underground Space, 60p.
 5. Suhas V. Patankar, 1980, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGRAW-HILL BOOK COMPAMY, 59p.

정수일



1979년 연세대학교 공과대학 건축공학과
공학사
1981년 연세대학교 대학원 건축공학과 공
학석사
1985년 고려대학교 대학원 건축공학과 공
학박사
Tel : 054-467-4285
E-mail : sijeong@kumoh.ac.kr
현재 금오공과대학교 토목환경및건축공
학부 교수