

▣ 연구논문

AR(1) 공정에서의 효과적인 공정평균 관리도

- An Effective Control Chart for Monitoring Mean Shift
in AR(1) Processes -

원 경 수 *

Won, Kyung Soo

강 창 욱**

Kang, Chang Wook

이 배 진**

Lee, Bae Jin

Abstract

A standard assumption when using a control chart to monitor a process is that the observations from the process output are statistically independent. However, for many processes the observations are autocorrelated and this autocorrelation can have a significant effect on the performance of the control chart.

In this paper, we consider combined control chart of monitoring the mean of a process in which the observations can be modeled as a first-order autoregressive process. The Shewhart control chart of residuals-EWMA control chart of the observations is considered and the method of combination is recommended. The performance of the proposed control chart is compared with the performance of other control charts using a simulation.

1. 서 론

통계적 공정관리의 목적으로 사용되는 전통적인 관리도들은 품질 특성치들이 이전 관측치에 독립이라는 가정하에 사용되고 있다. 자기상관관계가 존재하는 공정에서도 충분한 시간 간격을 두고 샘플링을 하는 경우에는 관측치들이 시간적으로 독립이라고 가정할 수 있으나, 오늘날 센서와 측정기술의 발달에 따라 샘플링 간격이 짧아짐으로 인하여 관측치들간의 자기상관관계를 고려해야하는 경우가 발생한다. 특히, 연속흐름공정이나 화학공정의 경우 공정의 특성상 관측치들이 과거의 관측치에 영향을 받는 자기상관관계가 존재하는 것이 일반적이다. 자기상관관계가 존재하는 공정에 독립성을 가정한 전통적인 관리도를 사용하면 관리상태인데도 이상상태라고 잘못 판단할 제 1종 과오의 확률이 높아지기 때문에 오경보(false alarm)의 빈도가 높아지게 되고, 실제 공정변동이 발생한 경우 이를 검출하는데 소요되는 시간도 증가하여 관리도의 수행도에 큰 영향을 미치게 된다.

자기상관관계가 존재하는 공정을 관리하기 위한 방법으로는 첫째, 자기상관관계를 고려하여 관리도의 관리한계선을 조정하여 관측치를 관리하는 방법과 둘째, 공정에 적합한 시계열 모형을 세우고, 관측치와 시계열 모형에 의한 예측치의 차이인 잔차(residual)를 관리하는 방법을 사용하고 있다. 그러나, 관측치들이 자기상관관계가 존재하는 경우에는 공정의 변화를 검출하

* 동부DIS(주)

** 한양대학교 대학원 산업공학과

는 관리도의 수행도가 낮기 때문에 최근에는 관리도의 수행도를 높이기 위한 많은 연구들이 이루어지고 있다.

Vasilopoulos와 Stamboulis[9]는 자기상관관계가 존재하는 공정이 AR(2)로 모형화 될 수 있는 경우, Shewhart 관리도의 관리한계선을 조정하여 관측치를 관리하는 방법에 대하여 제시하였다. Wardell, et al.[10]은 자기상관관계가 존재하는 공정이 ARMA(1, 1)으로 모형화 될 수 있는 경우 EWMA 관리도의 관리한계선을 조정하여 관측치를 관리하는 것이 공정평균의 작은 변화를 빨리 검출하며, Shewhart 관리도로 잔차를 관리하는 것이 공정평균의 큰 변화를 빨리 검출함을 보였다. Wardell, et al.[11]은 자기상관관계가 존재하는 공정이 AR(p) 또는 ARMA(p, q)로 모형화 될 수 있는 경우, 잔차의 런 길이에 대한 분포를 제시하였다.

Lin과 Adams[5]는 자기상관관계가 존재하는 공정이 AR(1) 또는 IMA(1, 1)으로 모형화 될 수 있는 경우, 잔차를 EWMA 관리도와 Shewhart 관리도로 함께 관리하는 방법을 제시하고 그 효율성을 비교하였다. EWMA-Shewhart 관리도는 잔차와 잔차의 EWMA 통계량, 즉 두 개의 통계량과 관리한계선을 하나의 관리도에 작성하여 관리하는 방법으로, 잔차의 EWMA 통계량이 EWMA 관리한계선을 벗어나거나 잔차가 Shewhart 관리한계선을 벗어나면 이상상태로 판정하는 관리도이다.

Vanbrackle과 Reynolds[8]는 자기상관관계가 존재하는 공정이 random error가 존재하는 AR(1)으로 모형화 될 수 있는 경우, 관측치를 EWMA 관리도 또는 CUSUM 관리도로 관리하는 방법의 수행도를 비교하고, ARL을 계산하기 위한 적분법과 마코프체인 방법을 제시하였다.

Kramer와 Schmid[4]는 자기상관관계가 존재하는 공정이 AR(1)으로 모형화 될 수 있는 경우, 관측치를 Shewhart 관리도로 관리하는 것이 잔차를 Shewhart 관리도로 관리하는 것보다 수행도가 향상됨을 보였다. Schmid[7]는 자기상관관계가 존재하는 공정이 AR(1)으로 모형화 될 수 있는 경우, 관측치를 EWMA 관리도로 관리하는 방법에 대해 연구하였다.

Lu와 Reynolds[6]는 자기상관관계가 존재하는 공정이 Random Error가 존재하는 AR(1)으로 모형화 될 수 있는 경우, 평균과 분산의 변화를 관리하기 위하여 두 개의 관리도를 같이 사용하는 방법에 대하여 연구하였다. 그 결과, 관측치를 EWMA 관리도로 관리하고 잔차(residual)를 Shewhart 관리도로 관리하는 방법을 제안하였다.

본 연구에서는 자기상관관계가 존재하는 공정이 AR(1)으로 모형화 될 수 있는 경우, 잔차의 Shewhart 관리도-관측치의 EWMA 관리도로 관리하는 방법의 통계적 설계와 모의실험을 통한 두 개의 관리도의 효과적인 결합 방법을 제시한다.

2. 자기회귀(AR) 모형

자기상관관계가 존재하는 공정에서는 시점 t 의 관측치 x_t 와 시점 $(t-k)$ 의 관측치 x_{t-k} 사이의 자기상관계수가 0이 아닌 값을 갖게 된다. 자기상관계수 ρ_k 는 식 (1)과 같이 정의된다.

$$\rho_k = \frac{Cov(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{Var(X_t) Var(X_{t-k})}}, \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (1)$$

여기에서, $Cov(X_t, X_{t-k})$ 는 두 확률변수 X_t 와 X_{t-k} 의 공분산이며, $Var(X_t)$ 는 X_t 의 분산이다.

자기회귀(autoregressive; AR) 모형은 시점 t 의 관측치 x_t 가 과거의 p 개의 관측치들 $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-p}$ 의 가중선형결합(weighted linear combination)으로 표현되는 모형으로, p 차의 자기회귀모형 AR(p)는 식 (2)와 같다.

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2)$$

따라서 평균이 ξ 이고 차수가 1인 AR(1) 모형은 식 (3)과 같이 표현할 수 있다[1].

$$x_t = \xi + \phi(x_{t-1} - \xi) + \varepsilon_t \quad (3)$$

여기에서, ϕ ($|\phi| < 1$)는 자기회귀계수(autoregressive parameter)이고, $\{\varepsilon_t\}$ 는 $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ 을 따르는 백색잡음(white noise) 과정이다.

자기상관관계가 존재하는 공정 중 많은 공정들이 AR(1) 모형으로 모형화 될 수 있음이 알려져 있다[5]. 식 (3)에서 ϕ 는 데이터간의 자기상관정도를 나타내며, AR(1) 모형의 t 시점에서의 관측치 x_t 와 $(t-k)$ 시점에서의 관측치 x_{t-k} 사이의 자기상관계수 ρ_k 는 식 (4)와 같이 시차 k 가 증가함에 따라 지수적으로 감소하게 된다[2].

$$\rho_k = \phi^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

본 연구에서는 공정이 관리상태($\xi = \xi_0$)에서 시작하며 시점 $(r-1)$ 과 시점 r 사이에서 이상원인이 발생하여 공정평균이 ξ_0 에서 $\xi_1 = \xi_0 + \delta$ 로 변한다고 가정한다. 여기에서 ξ_0 는 공정평균의 목표치이다. AR(1) 모형의 전방일단계예측(one-step-ahead forecast)은 식 (5)와 같이 나타낼 수 있다[2].

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t|t-1} &= E[x_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_1] \\ &= E[\xi_t + \phi(x_{t-1} - \xi_{t-1}) + \varepsilon_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_1] \\ &= \xi_0 + \phi(x_{t-1} - \xi_0) \end{aligned} \quad (5)$$

공정이 관리상태에 있을 때, 즉 공정 평균이 변하지 않은 시점($t \leq r-1$)의 관측치(x_t)와 잔차(e_t)의 기대값은 식 (6)과 같다.

$$\begin{aligned} E[x_t] &= E[\xi_0 + \phi(x_{t-1} - \xi_0) + \varepsilon_t] = \xi_0 \\ E[e_t] &= E[x_t - \hat{x}_{t|t-1}] = E[\varepsilon_t] = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

또한 이상원인에 의해 공정 평균의 변화가 발생한 바로 다음 시점($t = r$)의 관측치와 잔차의 기대값은 식 (7)과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} E[x_t] &= E[\xi_0 + \delta + \phi(x_{t-1} - \xi_0) + \varepsilon_t] = \xi_0 + \delta \\ E[e_t] &= E[x_t - \hat{x}_{t|t-1}] = E[\delta + \varepsilon_t] = \delta \end{aligned} \quad (7)$$

시점 r 이후($t > r$)의 관측치와 잔차의 기대값은 식 (8)과 같다.

$$\begin{aligned} E[x_t] &= E[\xi_0 + \delta + \phi(x_{t-1} - \xi_0 - \delta) + \varepsilon_t] = \xi_0 + \delta \\ E[e_t] &= E[x_t - \hat{x}_{t|t-1}] = E[(1-\phi)\delta + \varepsilon_t] = (1-\phi)\delta \end{aligned} \quad (8)$$

식 (6), (7), (8)에서부터 관측치의 경우에는 공정평균의 변화가 발생한 바로 다음 시점과 그 이후 시점에도 공정평균의 변화 효과가 그대로 나타남을 알 수 있다. 그러나 잔차의 경우에는 공정평균의 변화가 발생한 바로 다음 시점에는 변화 효과가 그대로 나타나지만 그 이후 시점부터는 공정평균의 변화 효과가 AR(1) 모형의 모수에 영향을 받는 것을 볼 수 있다. 즉, ϕ 가 양수인 경우에는 실제로 변한 공정평균의 변화량보다 작게 나타나고, ϕ 가 음수인 경우에는 실

제로 변환 공정평균의 변화량보다 크게 나타나는 것을 알 수 있다[3].

3. 잔차의 Shewhart 관리도-관측치의 EWMA 관리도

본 연구에서 제안하는 잔차의 Shewhart 관리도-관측치의 EWMA 관리도는 잔차를 Shewhart 관리도로 관리하고, 관측치의 EWMA 통계량을 EWMA 관리도로 동시에 관리하는 방법이다. 즉, 잔차가 Shewhart 관리한계선을 벗어나거나 관측치의 EWMA 통계량이 EWMA 관리한계선을 벗어나는 경우, 공정의 평균이 변화하였다고 판정하는 방법이다. 이러한 관리도는 두 개의 통계량을 동시에 관리하여야 하므로 두 개의 관리도의 관리한계선을 각각 설정하여야 한다.

시계열 모형이 적절하고 모수들이 정확히 추정되었을 경우 잔차들은 관리상태 하에서 서로 독립인 정규분포를 따르게 된다. 즉, 공정 관측치들이 식 (3)의 AR(1) 모형으로 표현되면 잔차 (e_t)는 다음과 같다.

$$e_t = x_t - \hat{x}_{t|t-1} = \{\xi_0 + \phi(x_{t-1} - \xi_0) + \varepsilon_t\} - \{\xi_0 + \phi(x_{t-1} - \xi_0)\} = \varepsilon_t \quad (9)$$

따라서 잔차의 Shewhart 관리도의 관리한계선은 전통적인 Shewhart 관리도의 관리한계선 설정방법과 동일하게 다음의 식 (10)과 같이 설정할 수 있다.

$$\begin{cases} UCL_{Shewhart} = L_s \sigma_e = L_s \sigma_\varepsilon \\ CL_{Shewhart} = 0 \\ LCL_{Shewhart} = -L_s \sigma_e = -L_s \sigma_\varepsilon \end{cases} \quad (10)$$

여기서 L_s 는 잔차의 Shewhart 관리도의 관리한계선 조정상수이며, σ_e 는 잔차의 표준편차이다.

관측치의 EWMA 관리도에 사용되는 EWMA 통계량 z_t 는 다음과 같다.

$$z_t = \lambda x_t + (1 - \lambda)z_{t-1}, \quad 0 < \lambda \leq 1, \quad t = 1, 2, \dots \quad (11)$$

관측치 (x_t)의 EWMA 관리도를 사용하는 경우에는 관측치들이 시간적으로 독립인 경우와는 달리 관측치의 자기상관관계를 고려하여 관리한계선을 조정하여야 한다. 관측치가 AR(1) 모형을 따르는 경우 EWMA 통계량 z_t 의 평균과 분산은 다음과 같다[7].

$$\begin{aligned} E[z_t] &= \xi_0 \\ Var[z_t] &= \frac{\lambda}{2-\lambda} \frac{1}{1-\phi^2} \frac{1+\phi(1-\lambda)}{1-\phi(1-\lambda)} \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (12)$$

따라서 관측치의 EWMA 관리도의 관리한계선은 다음의 식 (13)과 같이 설정할 수 있다.

$$\begin{cases} UCL_{EWMA} = \xi_0 + L_z \sigma_z = \xi_0 + L_z \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} \frac{1}{1-\phi^2} \frac{1+\phi(1-\lambda)}{1-\phi(1-\lambda)}} \sigma_\varepsilon \\ CL_{EWMA} = \xi_0 \\ LCL_{EWMA} = \xi_0 - L_z \sigma_z = \xi_0 - L_z \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} \frac{1}{1-\phi^2} \frac{1+\phi(1-\lambda)}{1-\phi(1-\lambda)}} \sigma_\varepsilon \end{cases} \quad (13)$$

여기에서 L_z 는 관측치의 EWMA 관리도의 관리한계선 조정상수, σ_z 는 EWMA 통계량의 표준편차, λ 는 EWMA 통계량의 모수이다.

4. 잔차의 Shewhart 관리도-관측치의 EWMA 관리도의 수행도

4.1 수행도 분석방법

관리도의 수행도는 평균 런의 길이(Average Run Length: ARL)로 평가할 수 있다. 여기에서 런 길이(Run Length: RL)란 관리한계선을 벗어날 때까지의 샘플링 횟수를 말한다. 공정이 관리상태일 때의 ARL을 ARL_0 라 하고, 이상상태일 때의 ARL을 ARL_1 이라 했을 때, 공정이 관리상태일 때의 ARL값인 ARL_0 가 크고, 공정이 이상상태일 때의 ARL값인 ARL_1 이 작을수록 바람직한 관리도라고 할 수 있다.

본 연구에서는 잔차의 Shewhart 관리도-관측치의 EWMA 관리도의 수행도를 모의실험(simulation)을 이용하여 비교·분석하였다. 독립이라는 가정하에 사용된 전통적인 관리도의 경우에는 마코프 체인이나 적분법 등을 이용하여 ARL을 구하는 방법이 제시되어 있으나, 자기상관관계가 존재하는 경우에는 수리적인 계산상의 복잡함 때문에 모의실험을 많이 사용하고 있다.

본 연구에서는 공정이 관리상태($\xi = \xi_0$)에서 시작하며 시점 $(r-1)$ 과 시점 r 사이에서 이상원인이 발생하여 공정평균이 ξ_0 에서 $\xi_1 = \xi_0 + \delta$ 로 변한다고 가정한다. 이와 같이 공정 진행 중에 공정평균이 변동되는 경우의 ARL_1 을 비교하기 위하여 steady-state ARL[8]을 사용하였다. Steady-state ARL를 구하기 위해서는 관리상태($\xi = \xi_0$)에서 시작하여 안정상태에 도달할 때까지 공정을 일정시간 진행시킨 후 시점 r 에서 공정평균을 $\xi_1 = \xi_0 + \delta$ 로 변경하고 이 시점에서부터 관리한계선을 벗어날 때까지의 런의 길이를 계산하여야 한다. 본 연구에서 사용한 모의실험에서는 관리상태에서 시작하여 50 시점까지 관리도를 작성하고 이 시점까지 오경보(false alarm)가 발생하지 않은 경우 50번째 값을 초기값 x_0 로 사용하였다.

다양한 AR(1) 모형의 모수($\phi = 0, 0.1, \dots, 0.9$)에 대해 공정평균을 $0.5\sigma_\epsilon$ 씩 $3\sigma_\epsilon$ 까지 변화시켜 가면서 공정평균의 변화량($\delta = (\xi_1 - \xi_0)/\sigma_\epsilon$)에 따른 ARL을 계산하였다. 자기상관관계가 존재하는 공정은 양의 자기상관관계를 갖는 경우가 대부분이므로[6], 본 연구에서는 $0 \leq \phi < 1$ 인 경우만 고려하였다.

4.2 잔차의 Shewhart 관리도-관측치의 EWMA 관리도의 수행도 분석 결과

관측치들의 자기상관관계가 AR(1) 모형으로 표현되는 공정을 대상으로 잔차 Shewhart-관측치 EWMA 관리도의 수행도를 잔차의 Shewhart 관리도, 잔차의 EWMA 관리도 그리고 관측치의 EWMA 관리도와 비교·분석하였다. 잔차 Shewhart-관측치 EWMA 관리도와 하나의 관리도를 사용하는 경우의 수행도를 비교하기 위해서는 관리상태에서의 ARL인 ARL_0 가 동일하게 되도록 관리한계선을 조정하여야 한다. 두 개의 관리도를 사용하는 경우에 관리한계선을 조정하는 방법으로는 두 관리도의 ARL_0 가 같게 동등하게 조정하는 방법과 Shewhart 관리도의 ARL_0 를 500부터 2500까지 250씩 증가시키며 고정시킨 후 EWMA 관리도의 관리한계선을 이에 따라 조정하는 방법에 대하여 고려하였다. Shewhart 관리도의 ARL_0 를 너무 크게 하는 경우에는 공정평균의 변화가 큰 경우에 효과적인 Shewhart 관리도의 특성이 사라져, 관측치를 EWMA 관리도 하나로만 관리하는 결과와 유사하게 나타나므로 ARL_0 를 2500보다 크게 고정시키는 것은 고려하지 않았다.

관측치의 EWMA 관리도에서 $\lambda = 0.2$ 를 사용한 경우의 관리도의 수행도를 분석한 결과가 <표 1>~<표 3>에 나타나 있다. <표 1>~<표 3>에서 사용된 관리도의 의미는 다음과 같다.

- RS: 잔차의 Shewhart 관리도
- RE: 잔차의 EWMA 관리도
- OE: 관측치의 EWMA 관리도
- RS-OE: 잔차의 Shewhart 관리도-관측치의 EWMA 관리도
(두개의 관리한계선을 ARL_0 가 같게 동등하게 조정)
- RS-OE(500): 잔차의 Shewhart 관리도-관측치의 EWMA 관리도
(Shewhart 관리한계선의 ARL_0 를 500으로 고정시킨 후 EWMA 관리한계선 조정)
- RS-OE(750): 잔차의 Shewhart 관리도-관측치의 EWMA 관리도
(Shewhart 관리한계선의 ARL_0 를 750으로 고정시킨 후 EWMA 관리한계선 조정)
- RS-OE(2500): 잔차의 Shewhart 관리도-관측치의 EWMA 관리도
(Shewhart 관리한계선의 ARL_0 를 2500으로 고정시킨 후 EWMA 관리한계선 조정)

<표 1> $\phi = 0.2, \lambda = 0.2$ 인 경우의 steady-state ARL

δ	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
RS	204.33	117.74	44.56	17.93	8.09	4.04	2.25
RE	203.79	38.98	11.54	5.99	3.95	2.95	2.37
OE	204.93	37.75	11.42	5.94	4.00	3.06	2.49
RS-OE	203.95	47.46	13.21	6.35	3.97	2.71	1.95
RS-OE(500)	204.87	43.75	12.56	6.27	3.93	2.71	1.99
RS-OE(750)	204.62	41.47	11.96	6.13	3.90	2.78	2.04
RS-OE(1000)	203.54	41.64	12.10	6.13	3.92	2.77	2.05
RS-OE(1250)	204.74	39.75	11.76	6.04	3.92	2.82	2.11
RS-OE(1500)	203.88	39.57	11.65	6.01	3.92	2.84	2.15
RS-OE(1750)	204.60	39.06	11.57	6.00	3.94	2.86	2.16
RS-OE(2000)	204.56	38.92	11.60	6.00	3.93	2.87	2.18
RS-OE(2250)	203.97	38.88	11.53	5.99	3.93	2.88	2.19
RS-OE(2500)	204.50	38.87	11.56	5.99	3.94	2.88	2.21

<표 1>~<표 3>의 결과로부터 자기상관관계가 증가할수록 공정평균 변화를 검출하는 관리도들의 수행도가 낮아짐을 알 수 있다. 이러한 문제점을 개선하기 위해 제안된 관리도들을 비교한 결과 자기상관관계가 큰 경우와 작은 경우 모두 $2\sigma_\epsilon$ 이상의 공정평균 변화가 발생할 경우에는 하나의 관리도를 사용한 경우보다 잔차의 Shewhart 관리도-관측치의 EWMA 관리도를 사용하는 것의 ARL이 작은 것을 볼 수 있다. 그러나, Shewhart 관리도의 ARL_0 를 상대적으로 작게 설정한 경우에는 $2\sigma_\epsilon$ 이상의 변화에 대한 ARL_1 의 값이 작지만 작은 변화에 대한 ARL_1 의 값이 큰 것을 볼 수 있다. 즉, 공정평균의 큰 변화는 빨리 찾아내지만 상대적으로 작은 변화를 찾아내는 능력이 떨어지는 것을 볼 수 있다. 이러한 단점을 보완하기 위해 Shewhart 관리도의 ARL_0 를 크게 설정한 경우에는, $2\sigma_\epsilon$ 이상의 변화에 대한 ARL_1 의 값이 하나의 관리도를 사용한 경우보다 비교 우위를 보이며, $2\sigma_\epsilon$ 미만의 공정평균 변화에 대한 ARL_1 의 차이가 점점 줄어드는 것을 볼 수 있다. 또한 이러한 관계는 <표 3>에 나타난 바와 같이 자기상관관계가 증가할수록 수행도의 차이가 명확하게 나타남을 알 수 있다.

<표 2> $\phi=0.5, \lambda=0.2$ 인 경우의 steady-state ARL

δ	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
RS	204.40	158.31	90.48	47.01	23.74	11.41	5.51
RE	204.46	76.90	25.55	11.85	7.01	4.70	3.39
OE	204.87	72.91	24.10	11.65	7.09	4.95	3.82
RS-OE	204.19	88.08	29.43	13.13	7.26	4.48	2.89
RS-OE(500)	204.84	83.36	27.49	12.54	7.08	4.48	2.94
RS-OE(750)	204.91	79.34	26.03	12.17	7.01	4.49	3.00
RS-OE(1000)	203.02	76.72	25.41	11.94	6.95	4.48	3.07
RS-OE(1250)	204.78	76.11	25.18	11.87	6.92	4.56	3.12
RS-OE(1500)	204.16	75.19	24.88	11.78	6.95	4.58	3.17
RS-OE(1750)	204.36	74.75	24.95	11.76	6.97	4.59	3.19
RS-OE(2000)	203.85	74.68	24.74	11.75	6.95	4.60	3.21
RS-OE(2250)	204.34	74.34	24.66	11.73	6.98	4.63	3.24
RS-OE(2500)	204.68	74.23	24.58	11.71	6.95	4.64	3.25

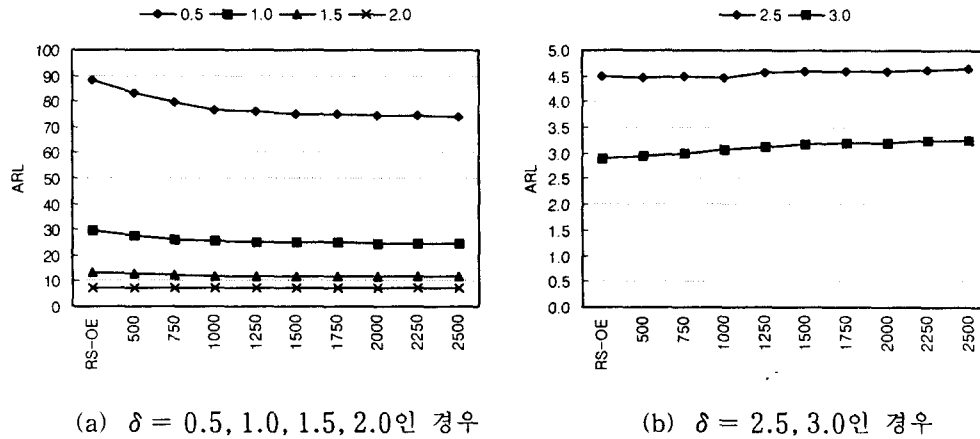
<표 3> $\phi=0.9, \lambda=0.2$ 인 경우의 steady-state ARL

δ	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
RS	204.88	200.63	190.06	170.14	137.86	99.82	62.97
RE	203.80	189.12	156.58	119.80	87.51	61.49	43.20
OE	204.78	184.64	140.55	100.30	70.77	50.19	36.48
RS-OE	203.76	188.42	151.59	109.48	74.01	46.00	25.58
RS-OE(500)	203.67	187.21	147.99	105.68	71.00	44.56	25.16
RS-OE(750)	204.28	185.67	144.91	103.04	69.82	44.19	25.98
RS-OE(1000)	204.73	184.62	144.16	101.62	69.00	44.14	26.28
RS-OE(1250)	204.54	184.98	143.35	101.69	68.88	44.55	26.85
RS-OE(1500)	204.54	184.08	141.92	101.10	69.02	44.84	27.21
RS-OE(1750)	204.26	184.50	141.86	101.04	68.71	44.71	27.55
RS-OE(2000)	203.88	183.70	141.74	100.42	68.90	45.20	27.79
RS-OE(2250)	204.39	183.22	141.38	100.04	68.10	44.94	28.02
RS-OE(2500)	204.55	185.15	142.22	100.54	68.58	45.63	28.48

잔차의 Shewhart 관리도-관측치의 EWMA 관리도는 Shewhart 관리도의 관리한계선을 크게 설정할수록, $2\sigma_e$ 미만의 공정평균 변화에 대한 ARL_1 의 차이가 점점 줄어드는 대신 $2\sigma_e$ 이상의 공정평균 변화에 민감한 장점이 줄어들며, 결국 관측치를 EWMA 관리도만으로 관리하는 경우의 특성과 유사하게 나타난다. 이것은 자기상관관계가 존재하지 않는 경우에 공정평균의 변화가 큰 경우에는 Shewhart 관리도가, 공정평균의 변화가 작은 경우에는 EWMA 관리도가 공정평균의 변화에 민감하다는 기존 연구와 유사한 결과를 나타낸다. 따라서, 공정평균의 변화가 큰 경우에 효율적인 Shewhart 관리도의 특성이 사라지지 않는 범위 내에서 관리한계선을 증가시킨 후, EWMA 관리도의 관리한계선을 조정하는 것이 바람직할 것으로 생각된다.

<그림 1>은 잔차 Shewhart 관리도-관측치 EWMA 관리도의 관리한계선 조정 방법에 따른 ARL_1 의 변화를 나타낸 것이다. <그림 1>의 (a)는 $2\sigma_e$ 이하의 공정평균 변화에 대한 ARL_1

을 나타낸 것이고, (b)는 $2.5\sigma_x$ 이상의 공정평균 변화에 대한 ARL_1 을 나타낸 것이다. ARL_1 의 경향을 보면, RS-OE(1500) 이상에서 수렴함을 알 수 있다. 따라서 공정평균의 변화가 큰 경우에 효율적인 Shewhart 관리도와 공정평균의 변화가 작은 경우에 효율적인 EWMA 관리도의 장점을 모두 이용하기 위해서는 Shewhart 관리도의 ARL_0 를 1500~2000 정도, 즉 관리한계선을 3.4~3.48 정도로 고정시킨 후에 EWMA 관리도의 관리한계선을 조정하는 것이 좋은 수행도를 보이는 것으로 나타났다.



<그림 1> $\phi = 0.5, \lambda = 0.2$ 인 경우 관리한계선 조정 방법에 따른 steady-state ARL

<표 4>와 <표 5>는 EWMA 관리도의 λ 값 변화에 따른 수행도 변화를 알아보기 위해 λ 가 각각 0.1과 0.3인 경우의 수행도 결과를 나타낸 것이다. EWMA 관리도의 λ 값에 상관없이 잔차의 Shewhart 관리도-관측치의 EWMA 관리도의 수행도는 <표 2>와 유사한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

<표 4> $\phi = 0.5, \lambda = 0.1$ 인 경우의 steady-state ARL

δ	0.00	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
RS	204.40	158.31	90.48	47.01	23.74	11.41	5.51
RE	204.33	60.27	21.11	11.22	7.29	5.26	4.06
OE	204.47	59.83	21.11	11.39	7.58	5.66	4.53
RS-OE	203.57	71.72	24.56	12.37	7.50	4.89	3.18
RS-OE(500)	204.58	67.81	23.45	12.04	7.42	4.86	3.24
RS-OE(750)	204.76	64.92	22.54	11.69	7.35	4.95	3.39
RS-OE(1000)	204.37	63.03	21.97	11.57	7.34	5.01	3.46
RS-OE(1250)	204.77	62.48	21.80	11.53	7.34	5.05	3.52
RS-OE(1500)	204.52	62.02	21.68	11.50	7.35	5.10	3.58
RS-OE(1750)	204.11	61.84	21.55	11.47	7.38	5.14	3.64
RS-OE(2000)	203.82	60.78	21.46	11.41	7.38	5.16	3.65
RS-OE(2250)	204.61	61.64	21.40	11.43	7.37	5.18	3.69
RS-OE(2500)	204.47	60.81	21.45	11.40	7.37	5.19	3.73

<표 5> $\phi=0.5, \lambda=0.3$ 인 경우의 steady-state ARL

δ	0.00	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
RS	204.40	158.31	90.48	47.01	23.74	11.41	5.51
RE	204.46	91.62	31.27	13.84	7.44	4.63	3.16
OE	204.51	82.33	27.46	12.55	7.15	4.72	3.49
RS-OE	204.61	99.70	34.14	14.64	7.58	4.43	2.77
RS-OE(500)	204.85	93.47	31.66	13.69	7.33	4.37	2.80
RS-OE(750)	204.39	88.51	29.74	13.26	7.13	4.39	2.87
RS-OE(1000)	204.66	86.96	29.10	12.95	7.11	4.39	2.90
RS-OE(1250)	204.69	86.45	29.06	12.88	7.13	4.41	2.95
RS-OE(1500)	204.66	85.52	28.49	12.66	7.11	4.43	2.97
RS-OE(1750)	203.38	85.63	28.37	12.71	7.11	4.44	3.01
RS-OE(2000)	204.61	84.31	28.12	12.67	7.07	4.47	3.02
RS-OE(2250)	204.38	83.94	28.25	12.59	7.05	4.48	3.05
RS-OE(2500)	203.98	83.86	27.92	12.65	7.10	4.48	3.05

5. 결 론

본 연구에서는 관측치 들의 자기상관관계가 AR(1)으로 모형화 될 수 있는 공정을 대상으로 하여 잔차의 Shewhart 관리도-관측치의 EWMA 관리도를 적용하는 방법을 제시하고, 그 수행도를 비교·분석하였다. 모의실험 결과, 잔차의 Shewhart 관리도-관측치의 EWMA 관리도로 관리하는 것이 공정평균의 변화가 큰 경우에 수행도가 좋고 또한 자기상관관계가 클수록 좋은 수행도를 나타내는 것을 볼 수 있었다. 또한 잔차의 Shewhart 관리도-관측치의 EWMA 관리도를 결합하는 여러 가지 방법 중에 효과적으로 관리한계선을 조정하는 방법을 제시하였다. 즉, 공정평균의 변화가 큰 경우에 효율적인 Shewhart 관리도의 특성이 사라지지 않는 범위 내에서 관리한계선을 증가시킨 후, EWMA 관리도의 관리한계선을 조정하는 것이 바람직한 것으로 나타났다.

따라서 자기상관관계가 AR(1) 모형으로 표현될 수 있는 공정이면, 본 연구에서 제시하는 결과를 이용하여 잔차의 Shewhart 관리도와 관측치의 EWMA 관리도를 결합하여 관리하는 방법을 적용할 수 있을 것이다. 공정평균의 변화가 발생하는 경우 하나의 관리도를 사용하는 경우에 비하여 공정평균의 변화가 클 수록 더욱 빨리 공정변화를 발견하게 되어 공정을 보다 효과적으로 관리할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

- [1] Box, G. E. P., Jenkins, G. M., and Reinsel, G. C.; *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, 3rd ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1994.
- [2] Harvey, A. C.; *Time Series Models*, 2nd ed., The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1993.
- [3] Hu, S. J. and Roan, C.; "Change Patterns of Time Series-Based Control Charts," *Journal of Quality Technology*, Vol. 28, No. 3, pp. 302-312, 1996.

- [4] Kramer, H. and Schmid, W.; "Control Charts for Time Series," *Nonlinear Analysis*, Vol. 30, No. 7, pp. 4007-4016, 1997.
- [5] Lin, W. S. W. and Adams, B. M.; "Combined Control Charts for Forecast-Based Monitoring Schemes," *Journal of Quality Technology*, Vol. 28, No. 3, pp. 289-301, 1996.
- [6] Lu, C. W. and Reynolds, M. R. Jr.; "Control Charts for Monitoring the Mean and Variance of Autocorrelated Processes," *Journal of Quality Technology*, Vol. 31, No. 3, pp. 259-274, 1999.
- [7] Schmid, W.; "On EWMA Charts for Time Series," *Frontiers in Statistical Quality Control*, edited by H.-J. Lenz and P.-Th. Wilrich, pp. 115-137, Physica-Verlag, Heidelberg, 1997.
- [8] Vanbrackle, L. N. and Reynolds, M. R. Jr.; "EWMA and CUSUM Control Charts in the Presence of Correlation," *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, Vol. 26, No. 3, pp. 979-1008, 1997.
- [9] Vasilopoulos, A. V. and Stamboulis, A. P.; "Modification of Control Chart Limits in the Presence of Data Correlation," *Journal of Quality Technology*, Vol. 10, No. 1, pp. 20-30, 1978.
- [10] Wardell, D. G., Moskowitz, H., and Plante, R. D.; "Control Charts in the Presence of Data Correlation," *Management Science*, Vol. 38, No. 8, pp. 1084-1105, 1992.
- [11] Wardell, D. G., Moskowitz, H., and Plante, R. D.; "Run-Length Distributions of Special-Cause Control Charts for Correlated Processes," *Technometrics*, Vol. 36, No. 1, pp. 3-17, 1994.