유연한 구조물의 공간전파에 관한 해석적 해법

석진영† · 정은태* · 김유단**

(2001년 3월 16일 접수, 2001년 9월 21일 심사완료)

Analytic Solution to the Spatial Propagation of the Flexible Structures

Jinyoung Suk, Eun Tae Jeung and Youdan Kim

Key Words: State Transition Matrix(상태천이행렬), Singularity(특이성), Spatial Propagation(공간전파), *Time Finite Element Analysis*(시간 유한요소해석), *Analytic Solution*(해석적 해)

Abstract

In this paper, a singularity problem of the state transition matrix is investigated in the spatial propagation when the spatial matrix differential equation is constructed via time finite element analysis. A parametric study shows that the degree of singularity of the state transition matrix depends on the degree of flexibility of the structures. As an alternative to avoid the numerical problems due to the singularity, an analytic solution for spatial propagation of the flexible structures is proposed. In the proposed method, the spatial properties of the structure are analytically expressed by a combination of transcendental functions. The analytic solution serves fast and accurate results by eliminating the possibility of the error accumulation caused by the boundary condition. Several numerical examples are shown to validate the effectiveness of the proposed methods.

1. 서 론

21세기에 접어들면서 국제우주정거장에 대한 다국적 협력이 활발해지고 있다. 국제우주정거장은 현재까지는 우주공간에서의 실험 연구 등의 목적으로 사용되며 앞으로는 인간이 생활할 수 있는 공간으로 발전될 전망이다. 조만간 우리나라도 다양한 분야에서 국제우주정거장 계획에 참가하여 연구성과를 공유할 계획이다. 국제우주정거장은 초대형 우주비행체로서 축구경기장 정도의 크기에 달한다.[1] 총 500톤이 넘는 45개 부구조물의 발사경비절감을 위해 국제우주정거장을 구성하는 구조물은 매우 유연한 재료로 이루어져 있다. 이외에도 통신위성은 대부분이 자체적인 전원을 위성체에 부착된 유연한 구조를 가진 태양전지판을 통해 공급하고 있다. 지난 이십년 동안 이러한 유연한 구조물이나 회전체의 동역학 모델링, 동적해석 및 제어에 관한 연구가 지속적인 관심 속에 진행되어 왔다.[2~5] 한편, 구조물의 동적 해석을 위한 방법 중에서 널리 사용되고 있는 공간이산화 유한요소해석과는 달리 시간역을 이산화하는 문제가 Bailey에 의해 해밀톤의 원리를 공식화된 이후 다양한 동역학 문제에 적용되었다.[6~9] 그 중에서 시간영역을 고정시켜 공간분포 시스템에 대한 설계자유도를 확보하려는 방법이 제안되었는데, 시간영역 유한요소해석을 이용하여 구성된 행렬미분방정식은 구조물의 변위 궤적을 비롯한 다른 상태변수의 해를 공간좌표에 대해 구할 수 있게 공식화되었다.[10] 상태천이행렬을 이용한 공간전파방정식은 상태천이행렬의 역행렬을 이용하여 동적해석을 수행한다. 따라서 상태천이행렬의 특이성과 해의 존재가능성에 관한 문제가 제기될 수 있다. 행렬의 특이성과 그에 따른 역행렬의 존재가능성은 행렬의 조건수나 역조건수와 밀접한 관련이 있다는 사실이 알려져 있다.[11]

† 책임저자, 회원, 충남대학교 항공우주공학과
E-mail : jsuk@cnu.ac.kr
TEL : (042)821-6685 FAX : (042)825-9225
* 창원대학교 제어계측공학과
** 회원, 서울대학교 기계항공공학부

즉, 행렬의 조건이 좋지 않으면, 역행렬 연산과정에서의 수치적 오차가 그만큼 많이 발생된다.

본 논문에서는 유연한 구조물의 공간전파를 위한 상태천이행렬의 특이성 문제를 고찰하였다. 상태천이행렬의 특이성은 (i) 행렬의 판별식 계산에서의 수치적 오차와 (ii) 행렬의 Adjoint 값들 자체가 매우 큼으로 인한 내재적 수치오차의 누적으로 인해 수치연산에 문제점이 발생한다. 이러한 문제점을 극복하여 유연한 구조물의 동적 해석을 수행하기 위한 대안으로 본 논문에서는 상태공간식으로부터 유도되는 새로운 해석적 해법을 제안하였다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2장에서는 상태천이행렬의 특이성 및 특이성에 영향을 주는 요인을 고찰하기 위한 매개변수 연구에 대해 기술하였다. 3장에서는 상태천이행렬의 특이성을 극복하기 위한 대안으로 공간전파에 관한 해석적 해를 유도하였다. 끝으로 수치예제를 통해 제안된 해석적 해법의 타당성을 4장에서 검증하였다.

2. 상태천이행렬의 특이성

시간유한요소법에 의해 행렬상태공간식이 구성되면, 두점경계치 문제를 풀기 위해 상태천이행렬기법이 사용된다. 본 절에서는 상태천이행렬의 특이성과 구조물의 재료/기하학적 특성과의 관계를 연구하였다. 오일러-베루누이 보를 가정하여 시간유한요소법에 의해 유연한 구조물의 4차 행렬미분방정식이 다음과 같이 구해진다.[10]

$$-\boldsymbol{M}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{w}^{(4)} = \boldsymbol{F}f(x) + \boldsymbol{F}_0 w_0(x) \quad (1)$$

여기서

$$\boldsymbol{M}_{ij} = \int_{\Delta t} \rho\, \phi_i(t)\, \phi_j(t)\, dt$$

$$\boldsymbol{K}_{ij} = \int_{\Delta t} EI\, \phi_i(t)\, \phi_j(t)\, dt$$

$$\boldsymbol{F}_i = \int_{\Delta t} \phi_i(t)\, u(t)\, dt$$

그리고 $w(x)$, ρ, EI, $f(x)$, $u(t)$, $\phi_i(t)$, Δt는 각각 보의 가로방향 변위, 선밀도, 동적 강성, 외력의 공간분포, 인가된 외력, 그리고 시간유한요소 이산화에 사용된 형상함수 및 시간구간을 나타낸다. 또한 $w_0(x)$는 구조물의 초기변위분포를 나타내며, $\boldsymbol{F}_0$는 보의 초기조건에 의해 생성된 벡터이다. 여기서 $\boldsymbol{M}$ 과 $\boldsymbol{K}$는 편의상 전통적인 공간이산화 유한요소해석에 사용되는 기호와 동일한 기호를 사용하였으나, 요소행렬의 구성에 사용된 개념은 시간영역 형상함수를 사용한 것으로서 기존의 유한요소해석과 다르다. 식 (1)로부터 보의 공간전파는 초기조건으로 주어지는 변위분포와 외력에 관련되어 있음을 알 수 있다. 모든 종류의 기하학적/자연적 경계조건에 대해 구조물의 초기조건에 의한 공간전파는 식 (1)을 상태공간식으로 변환시켜 두점경계치 문제를 풀면 구할 수 있다. 식 (1)은 다음과 같은 등가의 일차 상태공간방정식으로 변환된다.

$$\frac{dy(x)}{dx} = Ay(x) + Bf(x) + B_0 w_0(x) \quad (2)$$

여기서

$$y(x) = \left[w(x) \;\; \frac{dw(x)}{dx} \;\; M(x) \;\; V(x) \right]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(EI)}\boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{I} \\ EI\,\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ EI\,\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{F} \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ EI\,\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{F}_0 \end{bmatrix}$$

그리고 $M(x)$와 $V(x)$는 각각 굽힘모멘트와 전단력의 공간분포를 나타내며, I는 단위행렬로서 그 크기는 시간유한요소법에 의해 생성된 행렬의 크기와 같다. 식 (2)의 해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(x) = \Psi(x, x_0)y(x_0) + \int_{x_0}^{x} \Psi(x, \zeta)\,[Bf(\zeta) + B_0 w_0(\zeta)]\, d\zeta \quad (3)$$

여기서 $\Psi(x, x_0)$는 $\Psi(x, x_0) = e^{A(x - x_0)}$로 표현되는 상태천이행렬이다. 식 (3)은 시스템 행렬 A의 모달행렬 Φ와 A의 고유치를 대각원소로 가지는 대각행렬 Λ를 이용하여 파동영역에서의 방정식으로 변환된다. 외팔보에 대해서는 경계조건의 초기치 및 종말치를 이용하여 다음과 같은 유용한 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M(0) \\ V(0) \end{bmatrix} = -\Omega_{22}^{-1} \begin{bmatrix} \mu_3 \\ \mu_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} w(L) \\ \left.\frac{dw(x)}{dx}\right|_{x=L} \end{bmatrix} = -\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}\begin{bmatrix}\mu_3\\ \mu_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서

$$\Omega = \Phi e^{\Lambda L}\Phi^{-1} \equiv \begin{bmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12}\\ \Omega_{21} & \Omega_{22}\end{bmatrix}$$

$$\mu = \Phi e^{\Lambda(L-x_f)}\Phi^{-1}B + \Phi H\Phi^{-1}B_0$$

$$H = \int_0^L e^{\Lambda(L-\zeta)}w_0(\zeta)d\zeta$$

본 논문에서 고려한 구조물은 구조물의 뿌리부분에서 거리 x_f 만큼 떨어진 곳에 일점하중 구동기가 위치해 있다고 가정하였다. 식 (4)와 (5)에서 알 수 있듯이 구조물의 양단에서의 물리적/구조적 특성은 상태천이행렬의 부행렬의 역변환을 통해 구해진다.

이제 식 (4)에 주어진 역행렬의 존재성에 대해 검토해 보자. 행렬 Ω_{22}는 증대된 상태공간 시스템행렬의 행렬지수식에 의해 구해진 상태천이행렬을 2 × 2 부행렬로 나누었을 때의 우측하단 부행렬이다. 상태천이행렬의 판별식 계산에서 전파되는 수치적 오차는 원행렬의 조건수와 관련되어 있다. 즉, 상태천이행렬의 역조건수가 작게 될수록 판별식은 0에 접근하게 되어 특이(singular)행렬이 된다. 따라서 상태천이행렬의 역조건수가 적절한 경계를 벗어나게 되면 수치 역변환에서 문제가 발생할 수 있다.

시스템 행렬은 구조물의 선밀도, 구조물의 동적 강성, 그리고 구조물의 길이와 같은 구조물의 재료특성과 기하학적 특성에 따라 서로 다른 값을 가진다. 상태천이행렬은 이러한 모든 매개변수를 반영하여 결정되므로 독립적인 매개변수연구는 상태천이행렬의 특이성 경향을 파악하는 데에 유용하다. Table 1에 본 논문에서 사용된 유연한 구조물 모델의 공칭값을 나타내고 있다. Table 2에는 구조물의 다른 매개변수를 공칭값으로 유지하고, 동적 강성만을 변화시켰을 경우에 상태천이행렬 및 부행렬의 역조건수를 나타내고 있다. 여기서 Scale은 변화된 매개변수가 공칭값의 몇 배인가를 나타내고 있다. Table 2로부터 상태천이행렬의 역조건수는 부행렬의 역조건수보다 더 작으며, 구조물의 동적강성에 비례함을 알 수 있다. 즉, 구조물의 강성이 클수록 상태천이행렬의 특이성은 약화된다. Table 3은 다른 매개변수를 공칭값으로 유지하고, 구조물의 선밀도를 변화시켰을 경우에 상태천이행렬의 역조건수를 나타내고 있다. Table 3에서 알 수 있듯이 구조물의 선밀도가 증가될수록 상태천이행렬의 조건은 악화되고 있다. 구조물의 선밀도와 동적강성은 구조물의 동적거동을 결정짓는 두 개의 중요인자이다. 구조물의 선밀도가 증가될수록 또는 구조물의 강성이 약화될수록 시스템의 고유진동수는 낮아지며 동적거동은 느려지게 된다. 상태천이행렬의 역조건수로부터 구조물의 유연도가 증가될수록 상태천이행렬의 조건은 악화된다는 것을 Table 2와 3으로부터 알 수 있다.

이제 구조물의 길이가 상태천이행렬의 조건에 미치는 영향을 검토해 본다. 구조물의 재료특성이 일정하게 유지되는 상태에서 구조물의 길이가 길어지면 고유진동수는 낮아지게 되고 유연도는 증가하게 된다. 따라서 상태천이행렬의 조건은 악화된다고 결론지을 수 있다. Table 4는 구조물의 길이를 변화시켰을 경우에 대한 상태천이행렬의 역조건수를 나타내고 있으며, 앞의 예측이 옳음을 증명하고 있다. 한편, 이는 수학적인 관점에서도 설명될 수 있다. 상태천이행렬 Ω는 시스템 행렬에 구조물의 길이를 곱한 것의 행렬지수식으로, 시스템 행렬은 각각의 양의 고유치 λ_i에 대해 $\pm\lambda_i, \pm j\lambda_i$의 4개의 고유치가 쌍으로 존재한다. 이 중 불안정한 고유치($+\lambda_i$'s)의 존재로 인해 구조물의 길이가 길어질수록 상태천이행렬의 원소는 지수함수적으로 증가하게 되며, 행렬원소의 지수증가는 상태천이행렬의 역변환에 수치적인 문제점을 일으키게 된다.

상태천이행렬의 조건을 결정하는 또 다른 요소는 시간 유한요소해석을 적용하는 방법이다. 이것은 각각의 시간유한요소에 적용된 형상함수의 차수와 시간유한요소의 개수와 관련이 있다. 구조물 설계시에 재료 및 기하학적 형상들이 결정되므로 이러한 변수들은 모델링 단계에서 고려할 수 있는 제어변수들이며, 시스템 행렬의 크기는 이러한 두 요소의 조합으로 결정된다. 시간영역 모드공간에서의 고유치는 주어진 동적 시스템이 표현되는 시간역 주파수의 척도인데, 시간유한요소의 개수가 많아질수록 또는 형상함수의 차수가 높아질수록 시스템의 동적거동은 그만큼 더 자세히 표현될 수 있다. 그 이유는 더 큰 시간유한요소 행렬에는 더 많은 시간영역 주파수들을 포함할 수 있으며, 동적해석은 이러한 시간영역 주파

Table 1 Configuration Parameters for the Flexible Structures

Parameter	Value
Dynamic Stiffness	3.2106 [Nm]
Linear Density	0.3556 [Kg/m]
Length	0.81 [m]
Number of Time Finite Elements	22
Order of Shape Function	2

Table 2 Condition of the State Transition Matrix with respect to EI

NO	Rcond*(Ω)	Rcond(Ω_{22})	Scale
1	1.6159e-018	1.2356e-007	1× 10-1
2	4.6727e-014	9.8594e-006	5× 10-1
3	4.3398e-013	1.4631e-004	1
4	6.3303e-010	9.1161e-004	5
5	5.1482e-009	8.7999e-003	10

* Reciprocal condition number of a matrix

수들과 이들의 모드형상과의 조합으로 수행되기 때문이다. 그러나 시스템 행렬에 포함된 고주파수 성분들은 구조물의 길이와 조합되어 시간영역 모드좌표에서의 상태천이행렬에 지수함수적인 영향을 미치게 된다.

3. 공간전파에 관한 해석적 해법

본 절에서는 구조적 유연도에 관계없이 구조물의 동적해석이 가능하도록 공간전파에 관한 해석적 해를 유도하였다. 4차 행렬미분방정식이 상태변수의 증대로 인해 일차 상태공간식으로 바뀌었으므로, 공간전파에 관한 해석적 해를 유도하기 위해 선형시스템이론을 도입하였다. 공간이산화 유한요소해석을 통해 구성된 행렬미분방정식은 시간을 독립변수로 가지며, 이에 대한 고유치 및 고유벡터 해석을 통해 동적 거동을 해석하지만, 본 연구에서는 시간을 유한요소화하여 공간전파에 관한 방정식을 만들었기 때문에, 결과된 고유치 및 고유벡터는 기존의 고유치/고유벡터와 달리 해석된다. 그리고, 공간이산화 유한요소해석에서 행렬미분방정식이 구해지면 진동해석은 초기조건 문제로 귀결되어 수치적분법을 이용하여 시

Table 3 Condition of the State Transition Matrix with respect to ρ

NO	Rcond(Ω)	Rcond(Ω_{22})	Scale
1	4.8732e-009	9.5648e-003	1× 10-1
2	1.3226e-010	1.3301e-004	5× 10-1
3	4.3398e-013	1.4631e-004	1
4	4.0034e-017	7.5157e-006	5
5	1.4837e-018	1.2116e-007	10

Table 4 Condition of the State Transition Matrix with respect to L

NO	Rcond(Ω)	Rcond(Ω_{22})	Scale
1	1.0874e-007	1.4122e-001	1× 10-1
2	5.2027e-010	1.9128e-003	5× 10-1
3	4.3398e-013	1.4631e-004	1
4	5.7272e-023	1.1770e-017	5
5	1.9411e-025	5.9146e-022	10

간의 진행에 따른 해를 구하게 되지만, 공간전파 방정식은 이점 경계치 문제로 귀결되어, 시간모드 및 이의 공간에 대한 세 번째 미분까지의 상태변수들을 두 상태벡터군으로 나누어 경계조건을 구한 후 다시 공간전파에 관한 식을 구하여 전체적인 해를 얻게 된다. 시간모드가 모드변환에 의해 분리되면 전체 시스템은 각 시간모드들의 선형조합으로 완전하게 표현될 수 있다. 먼저, 다음과 같이 일반화된 고유치 문제로부터 구해지는 모달행렬을 이용해 물리적인 좌표계를 시간영역 모달좌표계로 변환한다.

$$w(x) = P\eta(x) \tag{6}$$

여기서 P는 표준화된 모달행렬로서 시간모드에 관한 모드형상을 의미하게 되며, 이는 연구자가 부과하는 시간유한요소의 크기와 개수에 따라서로 다른 결과를 가져오게 된다. 시간모드를 이용해 구성하는 행렬미분방정식의 특성중의 하나는 공간전파방정식이 self-adjoint 특성 및 이에 따른 직교성을 만족시킨다는 것이다.

좌표변환에 의해 식 (1)은 i번째 모드에 대해 분리된 다음과 같은 4차 미분방정식으로 변환될 수 있다.

$$\eta_i^{(iv)}(x) = \nu_i^4 \eta_i(x) + x_{fi} f(x) + x_{0i} w_0(x) \tag{7}$$

여기서 ν_i, x_{fi}, 그리고 x_{0i}는 행렬$\{M, K\}$의 i 번째 일반화된 고유치의 제곱근, $P^T F$, 그리고 $P^T F_0$의 i 번째 원소이다. 식 (7)은 다음과 같은 상태공간식으로 나타낼 수 있다.

$$\frac{dy(x)}{dx} = Ay(x) + Bf(x) + B_0 w_0(x) \tag{8}$$

여기서

$$y(x) = \left[\eta_i(x) \quad \frac{d\eta_i(x)}{dx} \quad \frac{d^2\eta_i(x)}{dx^2} \quad \frac{d^3\eta_i(x)}{dx^3}\right]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \nu_i^4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_{fi} \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_{0i} \end{bmatrix}$$

식 (8)의 해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(x) = \Psi(x, x_0)y(x_0) + \int_{x_0}^{x} \Psi(x, \zeta)[Bf(\zeta) + B_0 w_0(\zeta)]d\zeta \tag{9}$$

본 논문에서는 기호의 복잡성을 피하기 위해 식 (3)과 식 (9)에서 동일한 기호를 사용하였으나, 식 (9)에서는 $y(x)$가 i 번째 모드 기준 상태벡터로서 그 의미는 식 (3)과 다르다. 한편, $\Psi(x, x_0)$는 케일리-해밀톤의 원리를 이용하여 다음과 같이 해석적으로 나타낼 수 있다.

$$\Psi(x, x_0) = \begin{bmatrix} \alpha_0(x, x_0) & \alpha_1(x, x_0) & \alpha_2(x, x_0) & \alpha_3(x, x_0) \\ \nu_i^4\alpha_3(x, x_0) & \alpha_0(x, x_0) & \alpha_1(x, x_0) & \alpha_2(x, x_0) \\ \nu_i^4\alpha_2(x, x_0) & \nu_i^4\alpha_3(x, x_0) & \alpha_0(x, x_0) & \alpha_1(x, x_0) \\ \nu_i^4\alpha_1(x, x_0) & \nu_i^4\alpha_2(x, x_0) & \nu_i^4\alpha_3(x, x_0) & \alpha_0(x, x_0) \end{bmatrix} \tag{10}$$

여기서

$$\begin{aligned} \alpha_0(x, x_0) &= \frac{1}{2}[\cosh\nu_i(x-x_0) + \cos\nu_i(x-x_0)] \\ \alpha_1(x, x_0) &= \frac{1}{2\nu_i}[\sinh\nu_i(x-x_0) + \sin\nu_i(x-x_0)] \\ \alpha_2(x, x_0) &= \frac{1}{2\nu_i^2}[\cosh\nu_i(x-x_0) - \cos\nu_i(x-x_0)] \\ \alpha_3(x, x_0) &= \frac{1}{2\nu_i^3}[\sinh\nu_i(x-x_0) - \sin\nu_i(x-x_0)] \end{aligned} \tag{11}$$

본 논문에서 고려하는 구조물의 길이를 L이라 하고, 구조물의 좌측단을 공간좌표계에서 $x_0 = 0$이라고 하자. 문제의 단순화를 위해 초기조건으로 다음과 같은 정적 일점하중이 구조물의 우측단에 작용하고 있고, 일점하중 구동기가 구조물의 끝단에 작용하고 있는 문제를 생각해 보기로 하자.

$$w_0(x) = \frac{Kx^2}{2EI} - \frac{x^3}{6EI} \tag{12}$$

$$f(x) = \delta(L-x) \tag{13}$$

구조물의 우측단의 상태변수벡터는 다음 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} y(L) &= \Psi(L, 0)y(0) + \int_0^L \Psi(L, \zeta)\delta(L-\zeta)d\zeta \cdot B \\ &+ \int_0^L \Psi(L, \zeta)w_0(\zeta)d\zeta \cdot B_0 \end{aligned} \tag{14}$$

양단의 경계조건을 이용하면 좌측단에서의 상태변수벡터를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} y_3(0) \\ y_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{33}(L, 0) & \Psi_{34}(L, 0) \\ \Psi_{43}(L, 0) & \Psi_{44}(L, 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_3(L) \\ \mu_4(L) \end{bmatrix} \tag{15}$$

여기서 $\begin{bmatrix} \mu_3(L) \\ \mu_4(L) \end{bmatrix}$는 아래와 같이 정의되는 4 × 1 입력영향벡터 $\mu(x)$의 3번째 및 4번째 원소이다.

$$\mu(x) = \int_0^x \Psi(x, \zeta)\delta(L-\zeta)d\zeta \cdot B + \int_0^x \Psi(x, \zeta)w_0(\zeta)d\zeta \cdot B_0 \tag{16}$$

해석적 유도과정에 요구되는 $\mu(x)$의 각 항에 대한 계산은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \mu_1(x) &= \frac{x_{0i}}{2\nu_i^3}\int_0^x \{\sinh\nu_i(x-\zeta) + \sin\nu_i(x-\zeta)\} \\ &\quad \times \left(\frac{L\zeta^2}{2EI} - \frac{\zeta^3}{6EI}\right)d\zeta \\ &= -\frac{x_{0i}}{\nu_i^4}\left(\frac{Lx^2}{2EI} - \frac{x^3}{6EI}\right) - \frac{x_{0i}}{2EI\nu_i^7}\{\sinh\nu_i x \\ &\quad - \sin\nu_i x - \nu_i L(\cosh\nu_i x - \cos\nu_i x)\} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \mu_3(L) &= \frac{x_{0i}}{2\nu_i}\int_0^L \{\sinh\nu_i(L-\zeta) + \sin\nu_i(L-\zeta)\} \\ &\quad \times \left(\frac{L\zeta^2}{2EI} - \frac{\zeta^3}{6EI}\right)d\zeta + \alpha_1(L, L)x_{fi} \\ &= -\frac{x_{0i}}{2EI\nu_i^5}\{\nu_i L(\cosh\nu_i L + \cos\nu_i L) \\ &\quad -(\sinh\nu_i L - \sin\nu_i L)\} \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \mu_4(L) &= \frac{x_{0i}}{2}\int_0^L \{\cosh\nu_i(L-\zeta) + \cos\nu_i(L-\zeta)\} \\ &\quad \times \left(\frac{L\zeta^2}{2EI} - \frac{\zeta^3}{6EI}\right)d\zeta + \alpha_0(L, L)x_{fi} \\ &= \frac{x_{0i}}{2EI\nu_i^4}\{\nu_i L(\sinh\nu_i L - \sin\nu_i L) + 2 \\ &\quad -(\cosh\nu_i L + \cos\nu_i L)\} + x_{fi} \end{aligned} \tag{19}$$

식 (15)에서 상태천이행렬의 부행렬의 판별식은 다음과 같이 주어진다.

$$\Delta = 1 + \cosh\nu_i L\cos\nu_i L \tag{20}$$

식 (9)와 (15)를 이용하면 i 번째 모드좌표변위의 공간분포식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\eta_i(x) = \frac{1}{\Delta}\{\Psi_{13}(x,0)\Psi_{41}(L,0)\mu_3(L) - \Psi_{13}(x,0)\Psi_{34}(L,0)\mu_4(L) - \Psi_{14(x,0)}\Psi_{43}(L,0)\mu_3(L) + \Psi_{14}(x,0)\Psi_{33}(L,0)\mu_4(L)\} + \mu_1(x) \quad (21)$$

식 (21)을 초월함수의 항으로 해석적으로 나타내면 다음과 같이 정리된다.

$$\eta_i(x) = \frac{x_{0i}(\cosh\nu_i L + \cos\nu_i L)}{2EI\nu_i^2(1+\cosh\nu_i L\cos\nu_i L)}(\sinh\nu_i x - \sin\nu_i x) + \frac{x_{0i}(\sinh\nu_i L + \sin\nu_i L)}{2EI\nu_i^2(1+\cosh\nu_i L\cos\nu_i L)}(\cosh\nu_i x - \cos\nu_i x) - \frac{x_{0i}(\cosh\nu_i L + \cos\nu_i L)}{4\nu_i^3(1+\cosh\nu_i L\cos\nu_i L)}(\sinh\nu_i x - \sin\nu_i x) + \frac{x_{0i}(\sinh\nu_i L + \sin\nu_i L)}{2EI\nu_i^2(1+\cosh\nu_i L\cos\nu_i L)}(\cosh\nu_i x - \cos\nu_i x) - \frac{x_{0i}}{\nu_i^4}\left(\frac{Lx^2}{2EI} - \frac{x^3}{6EI}\right) \quad (22)$$

식 (22)의 첫 두 항과 마지막 항은 초기변위분포에 의한 모드좌표의 공간전파를 나타내며, 3번째와 4번째 항은 외부입력의 인가에 의한 모달좌표의 공간전파를 나타낸다. 초기변위분포와 외력이 주어지는 구조물의 변위분포는 식 (6)과 식 (22)를 이용하여 구할 수 있다.

4. 수치예제

본 절에서는 본 논문에서 유도한 구조물의 해석적 공간전파식을 검증하기 위해 수치시뮬레이션을 수행하였다. 유연한 구조물의 모델에 대한 매개변수의 공칭 값들은 Table 1에 정리되어 있다. Fig. 1과 2는 구조물의 초기조건반응을 보여주고 있다.

여기서 초기조건으로 주어진 구조물의 변위분포는 $w_0(x)$ 이다. 그림에서 보듯이 본 논문에서 제안한 해석적 해와 기존의 상태천이행렬을 이용한 공간전파기법은 전 공간영역에서 정확히 일치하고 있음을 알 수 있다. Table 1의 공칭값을 사용했을 경우에 Ω_{22} 의 역조건수는 대략 1.4×10^{-4} 이므로 적절한 유연도를 가진 시스템이라고 할 수 있다. 따라서 Table 1로 주어지는 유연한 구조물 모델에서는 수치적인 오차에 의한 문제가 발생하지 않는다.

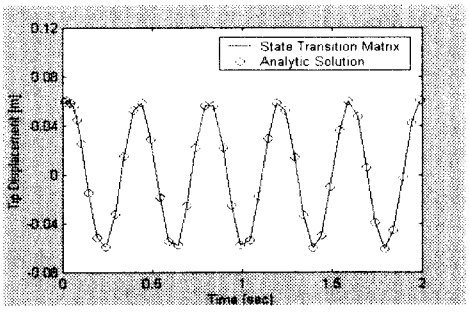
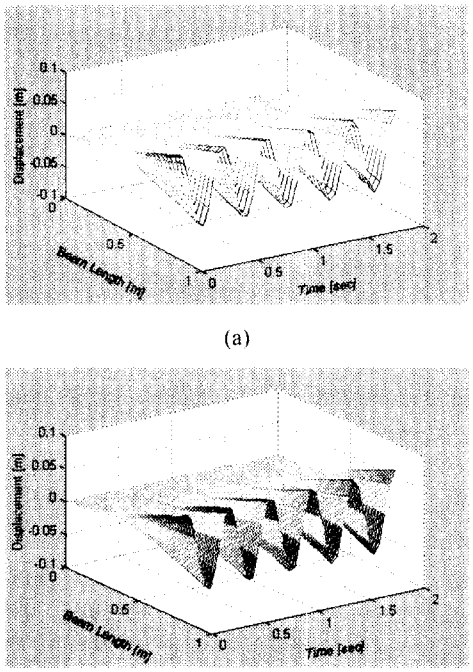


Fig. 1 Tip displacement for open-loop response: moderately flexible structure

Fig. 3과 4는 동일한 물성치를 가진 구조물에 외력이 가해진 경우의 반응을 보여주고 있다. 여기서 외력은 구조물의 우측단에 위치한 작동기에 선형 최적제어기법에 의해 계산된 개회로 입력을 인가하였다. 그림으로부터 적절한 유연도를 가진 시스템의 경우에는 해석적 해와 상태천이행렬기법에 의한 해가 서로 일치하고 있음을 알 수 있다.



(a)

(b)

Fig. 2 3-Dimensional plot for the open-loop response: moderately flexible case
(a) Using state transition matrix
(b) Using analytic solution

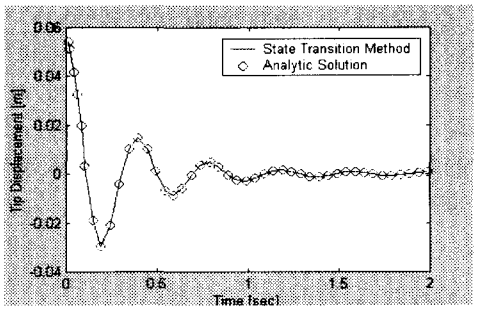


Fig. 3 Tip displacement for the forced response: moderately flexible structure

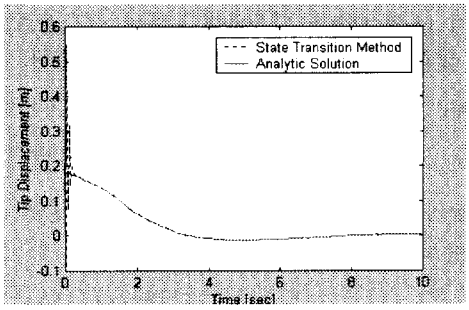
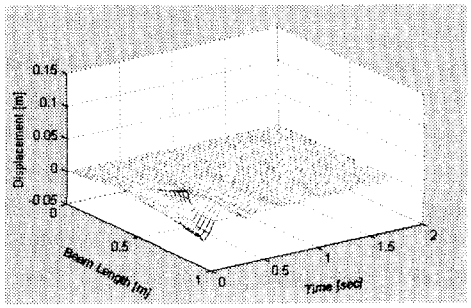
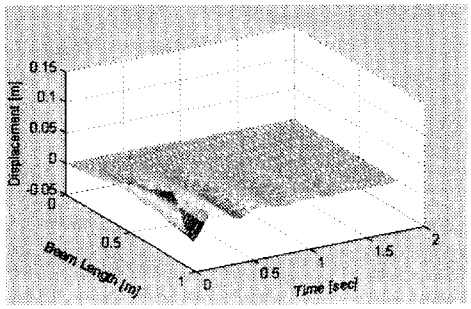


Fig. 5 Tip displacement for the forced response: highly flexible structure



(a)



(b)

Fig. 4 3-dimensional plot for the forced response: moderately flexible structure

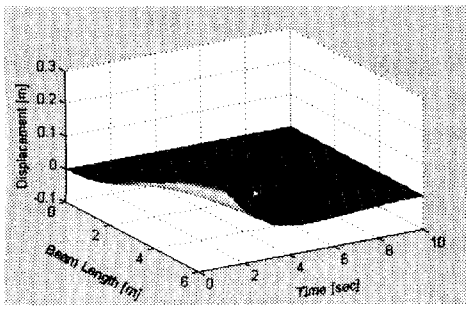


Fig. 6 3-dimensional plot for the forced response: highly flexible structure

Fig. 5는 상태천이행렬 Ω_{22}의 역조건수가 1.2×10^{-12}로 상당히 유연한 구조물에 외력이 인가되었을 때의 반응을 보여주고 있다. 본 문제에서 구조물의 폭, 두께 및 길이는 각각 0.5m, 0.005m, 그리고 6m로 설정하였다. Fig. 5로부터 상태천이행렬 기법을 이용한 결과는 초기단계에서 수치오차에 의하여 발산하고 있음을 알 수 있으나, 해석적 해는 타당한 결과를 제공하고 있음을 보여주고 있다. 식 (22)로 주어지는 해석적 해도 구조물의 길이에 따라 발산하는 초월함수항을 가지고 있으나, 공간전파식이 수렴하는 이유는 각 모드에 대해 초월함수의 지배계수에서 알 수 있다. 발산하는 항인 $\cosh\nu_i x$와 $\sinh\nu_i x$는 $\nu_i x$가 커질수록 지수함수적으로 증가하며, 이 두 항은 $\nu_i x$가 큰 값을 가지게 되면 서로 같은 값으로 수렴한다. 그 계수들은 반대의 부호를 가지며 그 절대값은 같아지게 되고, 따라서 발산하는 항들은 상쇄되어 수렴하는 해들만으로 공간전파식이 유도된다. Fig. 6은 매우 유연한 구조물에 대해 해석적 해를 이용하여 3차원 그림을 도시한 것이다. 수치예제에서 유연한 구조물의 특징을 보여주기 위해 최종시간을 증가시켰으며, 예상대로 매우 느리고 부드러운 반응이 얻어졌다.

해석적 해법의 또 다른 장점은 계산시간이 아주 작다는 것이다. 이것은 해석적 해가 각 시간 모드에서 초월함수의 대수연산식으로 이루어지기 때문에 가능한 데, 초월함수의 계산은 대부분 내장함수로 처리되기 때문에 계산시간의 절감이 가능하다. 상태천이행렬기법에서는 경계치의 값을

얻기 위해서 행렬지수식의 계산과 행렬의 역변환이라는 두 개의 과정을 거쳐야 하며, 이렇게 구해진 경계치 조건을 이용하여 상태공간식을 풀기 위해 수치시뮬레이션을 수행함으로써 계산시간의 증가와 수치적 오차를 추가하게 된다. 그러나 해석적 해는 공간좌표계에 대한 공간전파식이 외재적으로 표현되므로 수치오차가 누적되지 않는다. 위에서 기술한 여러 가지 특성들이 공간전파식에 대한 해석적 해법의 유효성을 입증하고 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 시간유한요소 해석을 이용한 구조물의 공간전파에 관해 구조물의 유연도가 수치오차에 미치는 영향에 대해 고찰하였다. 구조물의 유연도는 시간유한요소법에 의한 행렬구성 방법과 함께 구조물의 기하학적/구조적 특성에 의해 결정된다. 매개변수 연구로부터 매우 유연한 구조물에 대해 기존의 상태천이행렬기법을 이용한 공간전파식을 적용하면 역변환 과정에서 발생하는 수치적인 오차에 의해 부정확한 결과를 유발함을 알 수 있다. 즉, 구조물의 강성이 감소할수록, 선밀도가 증가할수록, 그리고 구조물의 길이가 증가할수록 상태천이행렬의 특이성 정도가 심화된다. 이러한 문제점을 해결하기 위한 대안으로 본 논문에서 제안된 해석적 해는 상태변수 벡터의 공간분포가 공간좌표에 대한 초월함수의 항으로 결정되며, 따라서 공간전파해를 구함에 있어 수치오차의 누적이 없다. 해석적 해에서 발산하는 초월함수의 항은 서로 상쇄됨으로써 수렴하는 해가 구해지며, 행렬지수식과 행렬역변환의 필요성을 없앰으로써 계산시간을 매우 단축하는 결과를 가져온다.

적절한 유연도를 가진 시스템에 대해서 기존의 상태천이행렬을 이용한 방법과의 비교를 통해 제안된 해석적 해법이 타당한 결과를 유도함을 검증하였으며, 구조물이 매우 유연하여 상태천이행렬을 이용한 공간전파의 해가 심각한 수치적 오차를 유발하는 경우에도 본 논문에서 제안한 해석적 해법은 좋은 결과를 제공함을 알 수 있었다. 또한 본 논문에서 제안된 해석적 해법은 체계적인 선형시스템 이론을 이용함으로써 경계조건을 부여하기가 직관적으로는 매우 어렵거나 불가능한 경우에도 해를 안정적으로 구할 수 있으며, 따라서 다양한 종류의 유연한 구조물의 동적 해석에 적용될 수 있다.

참고문헌

(1) Heyden, T., 2000, "They're Flying High," *Newsweek*, Vol. 454.

(2) Meirovitch, L. and Baruh, H., 1982, "Control of Self-Adjoint Distributed Parameter Systems," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 5, No. 1, pp. 60~66.

(3) Turner, J. and Chun, H., 1984, "Optimal Distributed Control of a Flexible Spacecraft During A Large-Angle Maneuver," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 7, No. 3, pp.257~264.

(4) Kane, T., Ryan, R., and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of a Cantilever Beam attached to a Moving Base," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 10, No. 2, pp. 139~151.

(5) 박정훈, 유홍희, 1998, "끝단질량 및 관성모멘트를 갖는 회전외팔보의 면외방향 진동해석," 대한기계학회논문집(A), 제22권, 제7호, pp. 1299~1306.

(6) Bailey, C., 1975, "Application of Hamilton's Law of Varying Action," *AIAA Journal*, Vol. 13, 1154~1157.

(7) Simkins, T., 1978, "Unconstrained Variational Statements for Initial and Boundary Value Problems," *AIAA Journal* Vol. 16, No. 6, pp. 559~563.

(8) Borri, M., Ghiringhelli, G., Lanz, M., Mantegazza, P., and T. Merlini, 1985, "Dynamic Response of Mechanical Systems by a Weak Hamiltonian Formulation," *Computers and Structures* Vol. 20, No. 1-3, pp. 495~508.

(9) 장인식, 맹주원, 1999, "시간유한요소법에서 선형형상함수를 이용한 자동 시간간격제어 기법," 대한기계학회논문집(A), 제23권, 제2호, pp. 190~198.

(10) Suk, J. and Kim, Y., 1998, "Time Domain Finite Element Analysis of Dynamic Systems," *AIAA Journal*, Vol. 36, No. 7, pp. 1312~1319.

(11) Kwakernaak, H. and Sivan, R, 1972, *Linear Optimal Control Systems*, John Wiley & Sons, USA.