

속도변환법을 이용한 운동방정식의 시스템자코비안 구성

이재욱[†] · 손정현^{*} · 김광석^{**} · 유완석^{***}
(2001년 2월 1일 접수, 2001년 9월 19일 심사완료)

Construction of System Jacobian in the Equations of Motion Using Velocity Transformation Technique

Jaewook Lee, Jeonghyun Sohn, Kwangsuk Kim and Wansuk Yoo

Key Words: System Jacobian(시스템자코비안), Velocity Transformation Technique(속도변환기법), Implicit Integration Method(암시적 적분방법)

Abstract

The Jacobian matrix of the equations of motion of a system using velocity transformation technique is derived via variation methods to apply the implicit integration algorithm, DASSL. The concept of generalized coordinate partitioning is used to parameterize the constraint set with independent generalized coordinates. DASSL is applied to determine independent generalized coordinates and velocities. Dependent generalized coordinates, velocities, accelerations and Lagrange multipliers are explicitly retained in the formulation to satisfy all of the governing kinematic and dynamic equations. The derived Jacobian matrix of a system is proved to be valid and accurate both analytically and through solution of numerical examples.

1. 서론

운동방정식의 유도에는 절대좌표를 사용하는 경우와 상대좌표를 사용하는 경우, 절대좌표의 일반성과 상대좌표의 효율성이라는 두 좌표계의 장점을 함께 취한 속도변환기법⁽¹⁾이 있고, 병렬 계산에 효율적인 순환공식⁽²⁾이 있으며 기호연산 기법⁽³⁾도 있다. 운동방정식의 해를 구하기 위해 미분 대수 방정식(DAE, differential algebraic equation)의 적분을 위한 세 가지 기본적인 접근들이 제안되었는데, 이는 BDF(backward difference formula)알고리즘⁽⁴⁾을 모든 일반좌표에 직접 적용

하는 것, 예측-수정자에 의해 적분되어진 일반 독립좌표를 결정하기 위한 일반좌표 분리 알고리즘에 기반을 둔 것, 구속조건 안정화 방법이다.⁽⁵⁻⁷⁾

다물체동역학을 해석하는데는 효율적인 적분 알고리즘을 사용하는 것이 중요하며 암시적 적분 알고리즘을 사용하면 뛰어난 수치적 안정성 때문에 큰 적분간격을 취할 수 있어서 계산이 빠르고 강성계(stiff system)에도 사용 가능하다. 그러나, 암시적 적분 알고리즘을 사용하기 위해서는 시스템자코비안을 구해야 하는 것이 전제조건이다. 기존의 절대좌표에 관한 시스템자코비안 연구는 Yen⁽⁸⁾에 의해 수행되었고, 차량 실시간 시뮬레이션을 위한 암시적 적분 알고리즘에 관한 연구는 Lee⁽⁹⁾에 의해 수행되어진 적이 있지만, 속도변환 기법에 관한 시스템자코비안 연구는 아직까지 발표되지 않았다.

따라서, 본 논문에서는 속도변환기법을 사용하여 다물체계의 운동방정식을 상대좌표계에서 유도하고, 암시적 적분 알고리즘인 DASSL(differential

[†] 책임저자, 회원, 삼립산업

E-mail : jaewk@hanmail.net

TEL : (053)850-8712 FAX : (053)850-8700

^{*} 회원, 부산대학교 대학원

^{**} 인하공전 자동차과

^{***} 회원, 부산대학교 기계공학부

algebraic system solver)⁽¹⁰⁾을 사용하기 위해 유도되어진 계의 상대좌표에 관한 시스템자코비안을 해석적으로 구하였다. 속도변환기법을 사용하는 운동방정식에서 시스템 자코비안을 내부적으로 자동 생성하게 만드는 것은 많은 어려움이 있으며 아직까지 완전히 일반화되지는 않았다. 때문에 각 경우별로 시스템의 운동방정식에 대한 자코비안을 각각 유도하였다. 2장에서는 속도변환기법을 이용한 운동방정식 유도과정을 나타내었고, 3장에는 속도변환기법을 이용한 운동방정식의 시스템자코비안 유도에 대해 다루었으며, 4장에서는 암시적 적분방법에 대해 논하였다. 5장에서는 단진자와 공간사절기구에 대해 구체적으로 시스템자코비안 유도과정을 표현하였으며, 부록에 계산식을 첨부하였다. 결론은 6장에 제시하였다.

2. 운동방정식

상대변위는 기구학적 조인트의 형태에 따라 다르지만 일반적으로 회전변위 ϕ_i 와 병진변위 d_i 로 구분되어진다. 절대공간의 속도로부터 상대공간의 속도로의 변환은 Jerkovsky⁽¹¹⁾가 제안한 속도변환기법과 Kim⁽¹⁾이 체계적으로 구한 속도변환행렬을 사용하여 나타낼 수 있다. 절대속도와 상대속도의 관계식은 구성된 속도변환행렬을 사용하여 다음과 같이 관계지어진다.

$$\begin{aligned} \dot{y} &= B(q)\dot{q} \\ \ddot{y} &= B(q)\ddot{q} + \dot{B}(q, \dot{q})\dot{q} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 B 는 속도변환행렬을 의미하고, \dot{y} 와 \ddot{y} 는 각각 절대공간과 상대공간에서의 속도를 의미한다. 식 (1)을 사용하면 시스템의 운동방정식은 상대좌표계에서 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \bar{M} &= B^T M B, \quad \bar{g} = B^T [f - M\dot{B}\dot{q}] \\ \gamma_q &= \gamma_v - \Phi_v \dot{B}\dot{q}, \quad \Phi_q = \Phi_v B \end{aligned} \quad (2)$$

최종적으로 DAE의 형태로 운동방정식을 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \bar{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{g} \\ \gamma_q \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서 \bar{M} 는 일반 질량행렬, \bar{g} 는 수정된 일반력, γ_q 는 상대좌표공간에서의 구속조건식의 가속도 형태의 우변항, Φ_q 는 구속조건식의 자코비안, λ_q 는 라그랑지 곱수(Lagrange multiplier)이다.

3. 운동방정식의 시스템자코비안 구성

속도변환기법을 이용한 상대좌표를 일반좌표로 하는 운동방정식을 암시적으로 나타내면 다음과 같다.

$$G(q, u, \dot{u}, \lambda) = \begin{bmatrix} B^T M B \dot{u} - B^T f + B^T M \dot{B} u + \Phi_q^T \lambda \\ u - \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서 상태변수를 다음과 같이 정의한다.

$$Y = [u^T \quad q^T]^T, \quad YP = [\dot{u}^T \quad \dot{q}^T]^T \quad (5)$$

암시적 적분 알고리즘은 다음과 같은 시스템자코비안이 필요하다.

$$\frac{\partial G}{\partial Y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial q} \end{bmatrix}^T, \quad \frac{\partial G}{\partial YP} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} & \frac{\partial G}{\partial \dot{q}} \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

여기서 시스템자코비안의 각 요소는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial q} &= \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q} = \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial G}{\partial y} B \\ \frac{\partial G}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (B^T M B \dot{q}) \\ \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} &= B^T M B \end{aligned} \quad (7)$$

운동방정식을 위치와 속도에 관하여 편미분 할 때 상대좌표계의 운동방정식을 상대좌표로 편미분하는 것은 매우 어렵다. 그러므로 먼저 절대좌표에 관해 편미분 한 후 식 (7)의 첫 번째 식처럼 연쇄법칙과 속도변환행렬을 사용하여 상대좌표에 관한 시스템자코비안을 구한다. 주어진 운동방정식에서 가속도의 함수는 $B^T M B \dot{q}$ 뿐이므로 가속도에 관한 편미분은 비교적 쉽게 식 (7)의 마지막 식과 같이 구할 수 있다.

4. 암시적인 적분 방법

4.1 좌표분할법을 사용한 구속방정식의 암시적 적분 알고리즘

좌표분할법을 사용하여 구속이 있는 계의 운동방정식과 구속조건식을 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} M_{uu} \ddot{u} + M_{uv} \ddot{v} + \Phi_u^T \lambda &= Q^{Au} \\ M_{vu} \ddot{u} + M_{vv} \ddot{v} + \Phi_v^T \lambda &= Q^{Av} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Phi(u, v, t) = 0, \quad \Phi_u \dot{u} + \Phi_v \dot{v} = -\Phi_t, \quad \Phi_u \ddot{u} + \Phi_v \ddot{v} = \gamma$$

여기서 u 는 종속좌표를 의미하고, v 는 독립좌표를 의미한다. 구속조건식의 자코비안 행렬의

요소 행렬인 Φ_u 가 $|\Phi_u| \neq 0$ 이라면 속도 및 가속도 구속식은 다음과 같다.

$$\dot{u} = \Phi_u^{-1}[-\Phi_t - \Phi_v \dot{v}], \quad \ddot{u} = \Phi_u^{-1}[\gamma - \Phi_v \ddot{v}] \quad (9)$$

식 (9)를 식 (8)의 첫 번째 식에 대입하면 다음과 같다.

$$\lambda = (\Phi_u^{-1})^T(Q^{Au}(v, \dot{v}, t) - M_{uu}\ddot{u} - M_{uv}\ddot{v}) \quad (10)$$

식 (9)와 (10)의 결과를 식 (8)의 두 번째 식에 대입하면 다음과 같은 독립좌표의 함수로만 이루어진 방정식이 된다.

$$\hat{M}(v, t)\dot{v} = \hat{Q}(v, \dot{v}, t) \quad (11)$$

여기서 \hat{M} 과 \hat{Q} 의 값은 다음과 같다.

$$\hat{M} = M_{vv} - M_{vu}\Phi_u^{-1}\Phi_v - \Phi_v^T(\Phi_u^{-1})^T[M_{uv} - M_{uu}\Phi_u^{-1}\Phi_v]$$

$$\hat{Q} = Q^{Av} - M_{vu}\Phi_u^{-1}\gamma - \Phi_v^T(\Phi_u^{-1})^T[Q^{Au} - M_{uu}\Phi_u^{-1}\gamma] \quad (12)$$

4.2 미분 대수 계의 해법

DASSL은 DAE를 푸는 방법으로 Petzold⁽⁴⁾에 의해 개발되었다. DASSL은 DAE 나 상미분방정식 (ODE, ordinary differential equation)의 해를 구하기 위해 BDF방법을 사용하는 가변 적분간격 및 가변 차수 알고리즘이다. DASSL에서 운동방정식은 다음과 같은 ODE 나 DAE의 암시적인 형태로 표현된다.

$$F(t, y, y') = 0 \quad (13)$$

비선형방정식은 BDF 방법에 의한 선형화 과정에 따라 다음의 식을 매 시간마다 풀게 된다.

$$F(t, y, \alpha y + \beta) = 0 \quad (14)$$

여기서 $\alpha = \alpha_0/h_n$ 인 적분 간격이나 차수가 변하더라도 상수인 값이고, β 는 이전 단계의 해에 의존하는 벡터이다. 그리고 시간 t_n 에서 t, y, α, β 가 결정되어야 한다. 위에서 언급한 $F(y)$ 를 풀 때 DASSL은 수정된 뉴턴 방법을 사용하여 다음과 같이 푼다.

$$y^{(m+1)} = y^{(m)} - \alpha(\alpha \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial F}{\partial y})^{-1} \cdot G(t, y^{(m)}, \alpha y^{(m)} + \beta) \quad (15)$$

이 선형방정식은 DASSL내부에서 직접 적분법에 의해 풀려지는데 이때 필요한 반복행렬, A는 다음과 같다.

$$A = \alpha \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial F}{\partial y} \quad (16)$$

본 논문에서는 반복행렬의 요소가 되는 시스템 자코비안을 해석적으로 구하여 가능한 많은 적분 구간동안에 그 값으로 사용되도록 하였다.

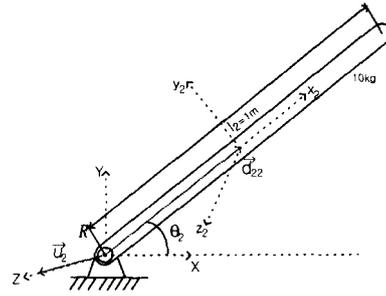


Fig. 1 Definition of vectors in single pendulum

5. 수치예제 및 결과 검증

3장에서 제안한 운동방정식의 시스템자코비안의 검증을 위해 3차원 단순 진자와 공간 4절기구를 예제로 사용하였다.

유도된 시스템자코비안의 신뢰성을 확보하고자 절대좌표로 유도된 운동방정식을 좌표분할법을 사용한 구속방정식의 암시적 적분 알고리즘의 결과⁽⁸⁾와 비교하였고, 다단계해법인 예측-수정자법 DE루틴⁽¹⁰⁾을 이용하여 상대좌표계로 구성된 운동방정식의 명시적 적분결과와 비교하였다. 예측-수정자법 DE루틴은 Adams-Bashforth법을 개형 다단계법으로 사용하고 Adams-Moulton법을 폐형 다단계법으로 사용한다.

5.1 단일진자 예제

Fig. 1에 단일진자(single pendulum)의 형상과 거리벡터를 도시하였는데, 이는 절단조인트에 의한 구속식을 생성하지 않는 비구속계이다. 속도변환기법을 이용하여 비구속계인 단일진자의 상태방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$G(q, u, \dot{u}) = \begin{bmatrix} B^T M B \dot{u} - B^T f + B^T M \dot{B} u \\ u - \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

식 (17)의 요소는 다음과 같다.

$$B^T M B \dot{q}^* = (\tilde{u}_2 d_{22})^T m_2 (\tilde{u}_2 d_{22}) \dot{q}^* + u_2^T (A_2 J_2' A_2^T) u_2 \dot{q}^* \quad (18)$$

$$B^T f = f_2^T (\tilde{u}_2 d_{22}) + n_2^T u_2$$

$$B^T M \dot{B} \dot{q} = (\tilde{u}_2 d_{22})^T m_2 (\dot{\tilde{u}}_2 \tilde{u}_2 - \tilde{u}_2 \dot{\tilde{d}}_{22}) \omega_2^* \dot{q}^* - u_2^T (A_2 J_2' A_2^T) \tilde{u}_2 \omega_2^* \dot{q}^*$$

여기서 *는 이전 단계에서 계산된 량을 의미하는 것으로 변분에는 상관없다. 단일진자의 상태변수벡터 Y 와 Y_P 는 다음과 같다.

$$Y = [\theta_2 \quad \dot{\theta}_2]^T, \quad Y_P = [\tilde{\theta}_2 \quad \tilde{\dot{\theta}}_2]^T \quad (19)$$

식 (19)로 식 (17)을 미분하면 다음과 같은

2×2 행렬이 나오게 된다.

$$\frac{\partial G}{\partial Y} = \left[\frac{\partial G}{\partial u} \quad \frac{\partial G}{\partial q} \right]^T, \quad \frac{\partial G}{\partial YP} = \left[\frac{\partial G}{\partial \dot{u}} \quad \frac{\partial G}{\partial \dot{q}} \right]^T \quad (20)$$

식 (20)에서 위치에 관한 편미분은 변분법을 이용하여 절대좌표계에 대한 시스템자코비안을 구할 수 있다. 다음은 절대좌표계에 대한 시스템자코비안을 나타낸 것이다.

$$\frac{\partial}{\partial x} [B^T M B \ddot{q}^* - B^T f + B^T M \dot{B} \dot{q}^*] = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial G}{\partial r_2} \quad \frac{\partial G}{\partial \pi_2} \\ 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 2m_2(\tilde{u}_2 d_{22})^T (-\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22}) \ddot{q}^* \\ -u_2^T (A_2 J_2^T A_2^T u_2) \ddot{q}^* + u_2^T (A_2 J_2^T A_2^T \tilde{u}_2) \\ + f_2^T (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22}) \\ + (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22} \omega_2^*)^T m_2 (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22}) \dot{q}^* \\ + (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22})^T m_2 (-\tilde{u}_2 \tilde{\omega}_2 \tilde{d}_{22}) \dot{q}^* \end{array} \right] \quad (21)$$

식 (7)의 첫 번째 식과 식 (21)을 이용하면 상대좌표계에 관한 시스템자코비안을 계산할 수 있다. 속도와 가속도에 관한 편미분도 같은 방식을 적용할 수 있으며 최종 상대좌표계에 관한 시스템자코비안은 다음과 같다.

$$\frac{\partial G}{\partial Y} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -f_2^T (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22}) u_2 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right] \quad (22a)$$

$$\frac{\partial G}{\partial YP} = \left[\begin{array}{c|c} (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22})^T m_2 (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22}) & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right] \quad (22b)$$

식 (22)에 Fig. 1의 벡터들을 직접 대입하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial G}{\partial Y} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -\frac{1}{2} m_2 g l \sin \theta_2 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \right] \quad (23a)$$

$$\frac{\partial G}{\partial YP} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{3} m_2 l^2 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right] \quad (23b)$$

단일진자의 운동방정식은 라그랑지 곱수를 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right)^T + \Phi_i^T \lambda_i = Q \quad (24)$$

여기서 $L = T - V$ 이고, T 는 운동에너지, V 는 포텐셜에너지(potential energy)를 의미한다. 상대좌표 q , 즉 θ_2 에 대한 운동방정식의 시스템자코비안을

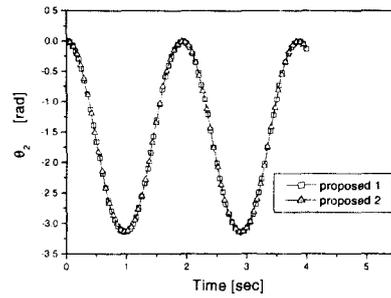


Fig. 2 Independent variable of single pendulum

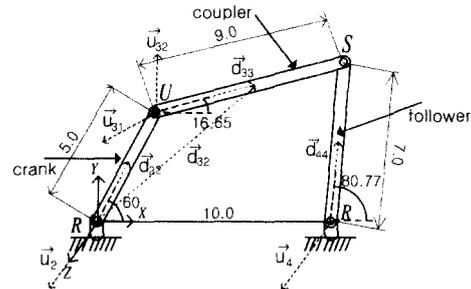


Fig. 3 Definition of vectors in spatial four-bar mechanism

구하면 앞에서 속도변환기법으로 유도된 운동방정식의 상대좌표계에 대한 시스템자코비안 식인 식 (23)과 동일함을 해석적으로 검증할 수 있다. Fig. 2는 자유낙하를 하는 단일진자의 독립좌표를 나타낸 것이다.

Fig. 2에서 제안 1(proposed 1)은 4.1절의 절대좌표계로 유도된 운동방정식의 좌표분할기법을 사용한 암시적 알고리즘의 결과이며, 제안 2(proposed 2)는 본 논문에서 유도된 시스템자코비안을 사용한 DASSL의 결과 값이다. 두 결과가 잘 일치함을 확인할 수 있다.

5.2 공간 4절기구 예제

공간 4절기구(spatial four-bar mechanism)는 절대좌표공간에서 폐쇄연쇄기구이다. 따라서, 절단조인트를 생성하게 되고 이 절단조인트가 상대좌표공간에서 구속식을 형성하게 된다. 본 예제에서는 구면조인트를 절단조인트로 사용한다. 공간 4절기구의 초기형상과 거리벡터는 Fig. 3과 같다.

절대좌표계의 구면조인트의 구속식과 구속식의 자코비안 그리고 가속도 구속식의 우변항은 다음

과 같다.

$$\Phi^{sph} = r_j + A_s s_i' - r_j - A_s s_j' = 0$$

$$\Phi_y^{sph} = [I_{3 \times 3} \quad -\tilde{s}_i \quad -I_{3 \times 3} \quad \tilde{s}_j]_{(3 \times 12)} \quad (25)$$

$$\gamma_y = -\tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_s s_i + \tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_s s_j$$

속도변환기법을 사용하여 식 (25)의 절대좌표에 관한 구속식을 상대좌표공간으로 변환시키면 다음과 같다.

$$\Phi_q = \Phi_y B_{34}, \quad \gamma_q = \gamma_y - \Phi_y \tilde{B}_{34} \dot{q} \quad (26)$$

여기서 B_{34} 는 3번과 4번 물체사이의 속도변환 행렬이다. 이를 사용하여 구속식이 포함된 구속계의 운동방정식을 속도변환기법을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C(q, u, \dot{u}, \lambda) = \begin{bmatrix} B^T M B \dot{u} - B^T f + B^T M \dot{B} u + \Phi_q^T \lambda \\ u - \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

상태변수 Y 와 YP 는 다음과 같다.

$$Y = [u^T \quad q^T]^T, \quad YP = [\dot{u}^T \quad \dot{q}^T]^T \quad (28)$$

여기서 $q = [\theta_2 \quad \theta_3^s \quad \theta_3^i \quad \theta_4]^T$ 이다.

식 (28)로 식 (27)을 미분하면 시스템자코비안 8×8 행렬을 유도할 수 있으며 유도과정과 행렬 요소 값은 부록 A에 수록하였고, 해석적인 검증은 부록 B에 나타내었다.

$$\frac{\partial G}{\partial Y} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{15} & F_{16} & F_{17} & F_{18} \\ F_{21} & F_{25} & F_{26} & F_{27} & F_{28} \\ F_{31} & F_{35} & F_{36} & F_{37} & F_{38} \\ F_{41} & F_{45} & F_{46} & F_{47} & F_{48} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29a)$$

$$\frac{\partial G}{\partial YP} = \begin{bmatrix} FP_{11} & FP_{12} & FP_{13} & FP_{14} & F_{11} \\ FP_{21} & FP_{22} & FP_{23} & FP_{24} & F_{21} \\ FP_{31} & FP_{32} & FP_{33} & FP_{34} & F_{31} \\ FP_{41} & FP_{42} & FP_{43} & FP_{44} & F_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (29b)$$

자유낙하를 하는 공간 4절기구의 독립좌표를 Fig. 4에 나타내었고, 나머지 2개의 종속좌표를 Fig. 5에 나타내었다. Fig. 4와 Fig. 5의 제안 1과 제안 2는 단일진자의 경우와 동일하며, 제안 3은 상대좌표를 사용한 운동방정식의 명시적인 적분 알고리즘인 PECE 적분 방법에 의한 결과이다.

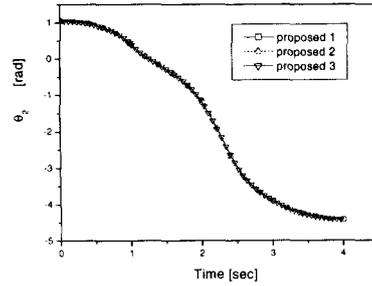


Fig. 4 Independent variable of four-bar, crank angle

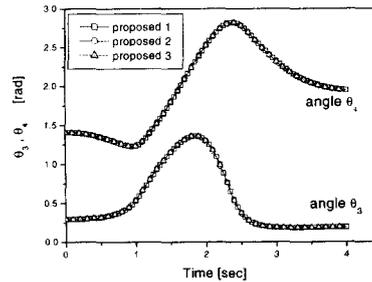


Fig. 5 Dependent variable of four-bar, coupler and follower angle

두 그래프에 있어 세 가지 적분법의 결과가 모두 잘 일치함을 볼 수 있다.

6. 결론

본 논문에서는 속도변환기법을 사용하여 주어진 다물체계의 운동방정식을 상대좌표계로 유도하고, 유도된 운동방정식의 시스템자코비안을 해석적으로 구함으로써, 암시적 적분 알고리즘인 DASSL의 사용을 가능하게 하였다.

유도된 시스템자코비안의 신뢰성을 확보하기 위해 해석적으로 라그랑지 식을 사용하여 검증하였으며, 수치적으로는 본 논문에서 제시된 시스템자코비안을 사용한 DASSL의 결과를 절대좌표계 운동방정식의 암시적 적분 알고리즘 결과와 상대좌표계 운동방정식의 명시적인 적분 알고리즘인 PECE의 적분 결과와 비교하여 검증하였다. DASSL은 강한(stiff) 시스템에 대해 계산효율성이 뛰어나지만, 본 논문에서 사용한 예제가 비교적 단순한 예제이므로 다른 방법과의 계산효율성 비교는 하지 않았다.

본 논문에서는 정해진 시스템에 대하여 시스템 자코비안을 구했으며, 구해진 시스템자코비안을 이용하면 제어계에서도 활용가능 할 것으로 사료된다. 시스템 자코비안을 일반화시키기 위해서는 입력파일로부터 속도변환행렬이 구해지고 전체 행렬이 구해졌을 때, 프로그램 내부에서 자동적으로 시스템자코비안을 구할 수 있도록 해야 할 것이다. 이는 향후 연구과제로 삼을 계획이다.

후 기

본 연구는 한국과학재단 특정연구과제(과제 번호 97-0200-1001-5)의 지원에 의해 수행되었음.

참고문헌

(1) Kim, S. S. and Vanderploeg, M. J., 1984, "A State Space Formulation for Multibody Dynamic Systems Subject to Control," *Technical Report No.* 84~20.
 (2) Bae, D. S. and Haug, E. J., 1987, "A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics: Part II, Closed Loop Systems," *Mechanics of Structures and Machines*, Vol. 15.
 (3) 최대환, 유완석, 2000, "실시간 동역학 시뮬레이션을 위한 기호연산기법의 효율성에 관한 연구," 대한기계학회 논문집A, 24(7), 1878~1884.
 (4) Petzold, L., 1982, "A Description of DASSL: A Differential/Algebraic Systems Solver," *Proc. 10th IMACS World Congress on System Simulation and Scientific Computation*, Montreal, August 8~13.
 (5) Chace, M. A., 1984, "Methods and Experience in Computer Aided Design of Large Displacement Mechanical Systems," NATO ASI Vol. F9, *Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics*, Ed by E. J. Haug, Spingerverlag, Berlin-Heidelberg.
 (6) Wehage, R. A. and Haug, E. J., 1982, "Generalized Coordinates Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamic System," *J. of Mechanical Design*, Vol. 104, pp. 247~255.
 (7) Baumgarte, J., 1972, "Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems,"

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 1, pp. 1~16.

(8) Haug, E. J. and Yen, J., 1989, "Implicit Numerical Integration of Constrained Equations of Motion via Generalized Coordinate Partitioning," *Technical Report R-39*.
 (9) 박민영, 이정근, 1998, "차량 실시간 시뮬레이션을 위한 암시적 수치 적분 알고리즘 개발," 한국자동차공학회논문집, 제6권 제3호, 143~153.
 (10) Shampine, L. F. and Gordon, M. K., 1975, "Computer Solution of Ordinary Differential Equations: The Initial Value Problem," W. J. Freeman, San Francisco, California.
 (11) Jerkovsky, W., 1978, "The Structure of Multibody Dynamics Equations," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 1, No. 3, pp. 173~182.

부록 A : 공간 4절기구의 시스템자코비안 요소

상태방정식을 속도에 관하여 편미분한 요소들은 $F_{11} \sim F_{14}$ 로써 3×1 의 벡터를 형성한다.

$$\begin{aligned}
 F_{11} = & -(\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (2\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22} \omega_2^* + \tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} \omega_3^*) I_{\theta_1} \\
 & -(\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (2\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22} \dot{q}_1^*) \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{q}} \\
 & -(\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} \dot{q}_1^*) \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{q}} - (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{u}_3 \tilde{d}_{33} \omega_3^*) I_{\theta_3} \\
 & -(\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{u}_3 \tilde{d}_{33} \dot{q}_2^*) \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{q}} - (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{d}_{33} \dot{q}_3^*) I_{\theta_3} \\
 & -(\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{d}_{33} \frac{\partial \dot{u}_3^2}{\partial \dot{q}}) \dot{q}_3^* \\
 & -(\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{u}_3 \tilde{d}_{33} \omega_3^*) I_{\theta_2} - (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{u}_3 \tilde{d}_{33} \dot{q}_3^*) \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{q}} \\
 F_{12} = & -(\tilde{u}_3 d_{33})^T m_3 (2\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22} \omega_2^* + \tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} \omega_3^*) I_{\theta_1} \\
 & -(\tilde{u}_3 d_{33})^T m_3 (2\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22} \dot{q}_1^*) \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{q}} \\
 & -(\tilde{u}_3 d_{33})^T m_3 (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} \dot{q}_1^*) \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{q}} - (\tilde{u}_3 d_{33})^T m_3 (\tilde{u}_3 \tilde{d}_{33} \omega_3^*) I_{\theta_3} \\
 & -(\tilde{u}_3 d_{33})^T m_3 (\tilde{u}_3 \tilde{d}_{33} \dot{q}_2^*) \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{q}} + (\tilde{u}_3 d_{33})^T m_3 (\tilde{u}_3 \tilde{d}_{33} + \tilde{u}_3^2 \tilde{d}_{33}) I_{\theta_3} \\
 & -(\tilde{u}_3 d_{33})^T m_3 (\tilde{d}_{33} \frac{\partial \dot{u}_3^2}{\partial \dot{q}}) \dot{q}_3^* - (\tilde{u}_3 d_{33})^T m_3 (\tilde{u}_3 \tilde{d}_{33} \dot{q}_3^*) \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{q}}
 \end{aligned}$$

$$F_{13} = -(\tilde{u}_3^* d_{33})^T m_3 (2\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22} \omega_2^* + \tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} \omega_3^*) I_{\theta_1} \\ - (\tilde{u}_3^* d_{33})^T m_3 (2\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22} \dot{q}_1) \frac{\partial \omega_2}{\partial q} \\ - (\tilde{u}_3^* d_{33})^T m_3 (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} \dot{q}_1) \frac{\partial \omega_3}{\partial q} + (\tilde{u}_3^* d_{33})^T m_3 (\tilde{u}_3^* d_{33}) I_{\theta_1} \\ - (\tilde{u}_3^* d_{33})^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} \dot{q}_2) \frac{\partial \omega_3}{\partial q}$$

$$F_{14} = \vec{0}$$

속도에 관하여 편미분된 요소에 사용된 변수들

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(\theta_2 + \theta_{31}) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta_2 + \theta_{31}) & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{\theta_2} = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad I_{\theta_1} = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$$I_{\theta_c} = [0 \ 0 \ 1 \ 0], \quad I_{\theta_s} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$$

$$u_3^* = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_2 + \theta_{31})(\theta_2 + \theta_{31}) \\ -\sin(\theta_2 + \theta_{31})(\theta_2 + \theta_{31}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial u_3^*}{\partial q} = \begin{bmatrix} -\cos(\theta_2 + \theta_{31}) & -\cos(\theta_2 + \theta_{31}) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_2 + \theta_{31}) & -\sin(\theta_2 + \theta_{31}) & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

상태방정식을 위치에 관하여 편미분한 행렬

$$F_{15} = f_2^T (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22} u_2) + f_3^T (2\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22} u_2) + f_3^T (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} u_2) \\ - \lambda^T (2\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22} u_2) - \lambda^T (2\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} u_2)$$

$$F_{16} = f_3^T (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} u_3^*) - \lambda^T (2\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} u_3^*) - 2(\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (2\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_1^* \\ - (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_2^* + (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{d}_{33} \tilde{u}_3^* u_3^*) \dot{q}_3^* \\ - (\tilde{u}_3^* d_{33})^T m_3 (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_3^* - (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{u}_2 \tilde{\omega}_3 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_1^* \\ + (2\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22} \omega_2^* + \tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} \omega_3^*)^T m_3 (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_1^* \\ + (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} \omega_3^*) \frac{\partial \pi_3^1}{\partial \pi_3^1} u_3^* \dot{q}_1^* - (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{\omega}_3 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_2^* \\ + (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} \omega_3^*)^T m_3 (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_2^* + (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} \omega_3^*) \frac{\partial \pi_3^1}{\partial \pi_3^1} u_3^* \dot{q}_3^* \\ + (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{d}_{33} \tilde{\omega}_3 \tilde{u}_3^* u_3^*) \dot{q}_3^* - (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{d}_{33} \tilde{u}_3^* \omega_3^*) \frac{\partial \pi_3^1}{\partial \pi_3^1} u_3^* \dot{q}_3^* \\ - (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{d}_{33} \omega_3^* \tilde{u}_3^* u_3^*) \dot{q}_3^* + (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} \omega_3^*)^T m_3 (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_3^*$$

$$F_{17} = f_3^T (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} u_3^*) - \lambda^T (2\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} u_3^*) - 2(\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_1^* \\ - (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_2^* - (\tilde{u}_3^* d_{33})^T m_3 (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_2^* \\ - (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_3^* - (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{u}_2 \tilde{\omega}_3 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_1^* \\ + (2\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22} \omega_2^* + \tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} \omega_3^*)^T m_3 (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_1^* \\ - (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{\omega}_3 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_2^* + (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} \omega_3^*)^T m_3 (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_2^* \\ + (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{\omega}_3 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_3^* - (\tilde{d}_{33} \tilde{u}_3^* \omega_3^*)^T m_3 (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_3^* \\ - (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{\omega}_3 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_3^*$$

$$F_{18} = 0, F_{25} = -f_3^T (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} u_2) - \lambda^T (2\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} u_2)$$

$$F_{26} = -f_3^T (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} u_3^*) - \lambda^T (2\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} u_3^*) - (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_1^* \\ - (\tilde{u}_3^* d_{33})^T m_3 (\tilde{u}_2 \tilde{\omega}_3 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_1^* \\ + (2\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22} \omega_2^* + \tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} \omega_3^*)^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_1^*$$

$$F_{27} = -f_3^T (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} u_3^*) - \lambda^T (2\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} u_3^*) - (\tilde{u}_3^* d_{33})^T m_3 (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_1^* \\ - (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_1^* - 2(\tilde{u}_3^* d_{33})^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_2^* \\ + (\tilde{u}_3^* d_{33})^T m_3 (\tilde{u}_2 \tilde{\omega}_3 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_1^* \\ + (2\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22} \omega_2^* + \tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} \omega_3^*)^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_1^* \\ - (\tilde{u}_3^* d_{33})^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{\omega}_3 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_2^* \\ + (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} \omega_3^*)^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_2^* + (\tilde{u}_3^* d_{33})^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{\omega}_3 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_3^* \\ - (\tilde{d}_{33} \tilde{u}_3^* \omega_3^*)^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_3^*$$

$$F_{28} = 0, F_{35} = -f_3^T (\tilde{d}_{33} \tilde{u}_3^* u_2) + \lambda^T (2\tilde{d}_{33} \tilde{u}_3^* u_2)$$

$$F_{36} = -f_3^T (\tilde{d}_{33} \tilde{u}_3^* u_3^*) + \lambda^T (2\tilde{d}_{33} \tilde{u}_3^* u_3^*) + (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{d}_{33} \tilde{u}_3^* u_3^*) \dot{q}_1^* \\ - (\tilde{u}_3^* d_{33})^T m_3 (\tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_1^* + (\tilde{u}_3^* d_{33})^T m_3 (\tilde{u}_2 \tilde{\omega}_3 \tilde{d}_{33} \omega_3^*) \frac{\partial \pi_3^1}{\partial \pi_3^1} u_3^* \dot{q}_1^*$$

$$F_{37} = f_3^T (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} u_3^*) - \lambda^T (2\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} u_3^*) - (\tilde{u}_2 d_{32})^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_1^* \\ - (\tilde{u}_3^* d_{33})^T m_3 (\tilde{u}_2 \tilde{\omega}_3 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_1^* \\ + (2\tilde{u}_2 \tilde{d}_{22} \omega_2^* + \tilde{u}_2 \tilde{d}_{33} \omega_3^*)^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_1^* \\ - (\tilde{u}_3^* d_{33})^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{\omega}_3 \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_2^* + (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} \omega_3^*)^T m_3 (\tilde{u}_3^* \tilde{d}_{33} u_3^*) \dot{q}_2^*$$

$$F_{38} = 0, F_{45} = 0, F_{46} = 0, F_{47} = 0$$

$$F_{48} = f_3^T (\tilde{u}_4 \tilde{d}_{44} u_4) + \lambda^T (2\tilde{u}_4 \tilde{d}_{44} u_4)$$

위치에 관하여 편미분된 요소에 사용된 변수들

$$\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_2 \end{bmatrix}, \quad \omega_3^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_2 + \theta_{31} \end{bmatrix}, \quad \omega_3^2 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_2 + \theta_{31}) \theta_{32} \\ \cos(\theta_2 + \theta_{31}) \theta_{32} \\ \theta_2 + \theta_{31} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \pi_3^1}{\partial \pi_2} = \frac{\partial \pi_3^1}{\partial \pi_3^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

부록 B : 공간 4절기구의 시스템자코비안의 해석적 검증

라그랑지식을 사용하면 8개의 공간 4절기구의 운동방정식을 유도할 수 있다.

유도되어진 시스템자코비안은 다음과 같다.

$$\frac{\partial G}{\partial Y} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & F_{16} & F_{17} & F_{18} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} & F_{26} & F_{27} & F_{28} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} & F_{35} & F_{36} & F_{37} & F_{38} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} & F_{45} & F_{46} & F_{47} & F_{48} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{B.2.a}$$

시스템자코비안의 행렬 요소는 다음과 같다.

$$F_{11} = -m_3 l_2 l_3 \theta_{31} c \theta_{32} \theta_{31} - \frac{1}{2} m_3 l_3^2 c \theta_{32} s \theta_{32} \theta_{32} - m_3 l_2 l_3 c \theta_{31} s \theta_{32} \theta_{32}$$

$$\begin{aligned}
 F_{12} &= -\frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 s \theta_{31} c \theta_{32} \dot{\theta}_2 - m_3 l_2 l_3 c \theta_{31} s \theta_{32} \dot{\theta}_{32} \\
 &\quad - \frac{1}{2} m_3 l_3^2 c \theta_{32} s \theta_{32} \dot{\theta}_{32} - \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 s \theta_{31} c \theta_{32} \dot{\theta}_{31} \\
 &\quad - \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 s \theta_{31} c \theta_{32} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_{31}) \\
 F_{13} &= -m_3 l_2 l_3 c \theta_{31} c \theta_{32} \dot{\theta}_{32} - m_3 l_2 l_3 c \theta_{31} s \theta_{32} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_{31}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} m_3 l_3^2 c \theta_{32} s \theta_{32} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_{31}) \\
 F_{14} &= 0 \\
 F_{15} &= -m_3 g \frac{l_2}{2} s \theta_2 - m_3 g (l_2 s \theta_2 + \frac{l_4}{2} s (\theta_2 + \theta_{31}) c \theta_{32}) \\
 &\quad - (l_2 c \theta_2 + l_3 c (\theta_2 + \theta_{31}) c \theta_{32}) \lambda_1 \\
 &\quad - (l_2 s \theta_2 + l_3 s (\theta_2 + \theta_{31}) c \theta_{32}) \lambda_2 \\
 F_{16} &= -(m_3 l_2 l_3 s \theta_{31} c \theta_{32}) \ddot{\theta}_2 - (\frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 s \theta_{31} c \theta_{32}) \ddot{\theta}_{31} \\
 &\quad - (\frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 c \theta_{31} s \theta_{32}) \ddot{\theta}_{32} - m_3 g (\frac{l_3}{2} s (\theta_2 + \theta_{31}) c \theta_{32}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 c \theta_{31} c \theta_{32} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_{31} - \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 c \theta_{31} c \theta_{32} \dot{\theta}_{32}^2 \\
 &\quad + m_3 l_2 l_3 s \theta_{31} s \theta_{32} \dot{\theta}_{32} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_{31}) - \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 c \theta_{31} c \theta_{32} \dot{\theta}_{31} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_{31}) \\
 &\quad - (l_3 c (\theta_2 + \theta_{31}) c \theta_{32}) \lambda_1 - (l_3 s (\theta_2 + \theta_{31}) c \theta_{32}) \lambda_2 \\
 F_{17} &= -(m_3 l_2 l_3 c \theta_{31} s \theta_{32} + \frac{1}{2} m_3 l_3^2 c \theta_{32} s \theta_{32}) \ddot{\theta}_2 \\
 &\quad - (\frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 c \theta_{31} s \theta_{32} + \frac{1}{2} m_3 l_3^2 c \theta_{32} s \theta_{32}) \ddot{\theta}_{31} \\
 &\quad - (\frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 s \theta_{31} c \theta_{32}) \ddot{\theta}_{32} - m_3 g (\frac{l_3}{2} c (\theta_2 + \theta_{31}) s \theta_{32}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 s \theta_{31} s \theta_{32} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_{31} + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 s \theta_{31} s \theta_{32} \dot{\theta}_{32}^2 \\
 &\quad - m_3 l_2 l_3 c \theta_{31} c \theta_{32} \dot{\theta}_{32} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_{31}) + \frac{1}{2} m_3 l_3^2 s^2 \theta_{32} \dot{\theta}_{32} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_{31}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} m_3 l_3^2 c^2 \theta_{32} \dot{\theta}_{32} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_{31}) + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 s \theta_{31} s \theta_{32} \dot{\theta}_{31} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_{31}) \\
 &\quad + (l_3 s (\theta_2 + 3l_3) s \theta_{32}) \lambda_1 - (l_3 c (\theta_2 + \theta_{31}) s \theta_{32}) \lambda_2 \\
 F_{18} &= 0, F_{21} = m_3 l_2 l_3 s \theta_{31} c \theta_{32} \dot{\theta}_2 - \frac{1}{2} m_3 l_3^2 c \theta_{32} s \theta_{32} \dot{\theta}_{32}, F_{24} = 0 \\
 F_{22} &= -\frac{1}{2} m_3 l_3^2 c \theta_{32} s \theta_{32} \dot{\theta}_{32}, F_{23} = -\frac{1}{2} m_3 l_3^2 c \theta_{32} s \theta_{32} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_{31}) \\
 F_{25} &= -m_3 g (\frac{l_3}{2} s (\theta_2 + \theta_{31}) c \theta_{32}) - (l_3 c (\theta_2 + \theta_{31}) c \theta_{32}) \lambda_1 \\
 &\quad - (l_3 s (\theta_2 + \theta_{31}) c \theta_{32}) \lambda_2 \\
 F_{26} &= -(\frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 s \theta_{31} c \theta_{32}) \ddot{\theta}_2 - m_3 g (\frac{l_3}{2} s (\theta_2 + \theta_{31}) c \theta_{32}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 c \theta_{31} c \theta_{32} \dot{\theta}_{32}^2 - (l_3 c (\theta_2 + \theta_{31}) c \theta_{32}) \lambda_1 \\
 &\quad - (l_3 s (\theta_2 + \theta_{31}) c \theta_{32}) \lambda_2 \\
 F_{27} &= -(\frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 c \theta_{31} s \theta_{32} + \frac{1}{2} m_3 l_3^2 c \theta_{32} s \theta_{32}) \ddot{\theta}_2 \\
 &\quad - (\frac{1}{2} m_3 l_3^2 c \theta_{32} s \theta_{32}) \ddot{\theta}_{31} - m_3 g (\frac{l_3}{2} c (\theta_2 + \theta_{31}) s \theta_{32}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 s \theta_{31} s \theta_{32} \dot{\theta}_{32}^2 - \frac{1}{2} m_3 l_3^2 c^2 \theta_{32} \dot{\theta}_{32} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_{31}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} m_3 l_3^2 s^2 \theta_{32} \dot{\theta}_{32} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_{31}) \\
 &\quad + (l_3 s (\theta_2 + \theta_{31}) s \theta_{32}) \lambda_1 - (l_3 c (\theta_2 + \theta_{31}) s \theta_{32}) \lambda_2 \\
 F_{28} &= 0, F_{31} = m_3 l_2 l_3 c \theta_{31} s \theta_{32} \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_3 l_3^2 s \theta_{32} s \theta_{32} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_{31})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{32} &= \frac{1}{2} m_3 l_3^2 s \theta_{32} c \theta_{32} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_{31}), F_{33} = F_{34} = 0 \\
 F_{35} &= -m_3 g (\frac{l_3}{2} c (\theta_2 + \theta_{31}) s \theta_{32}) + (l_3 s (\theta_2 + \theta_{31}) s \theta_{32}) \lambda_2 \\
 &\quad - (l_3 c (\theta_2 + \theta_{31}) s \theta_{32}) \lambda_2 \\
 F_{36} &= -(\frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 c \theta_{31} s \theta_{32}) \ddot{\theta}_2 - m_3 g (\frac{l_3}{2} c (\theta_2 + \theta_{31}) s \theta_{32}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 c \theta_{31} c \theta_{32} \dot{\theta}_{31}^2 + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 c^2 \theta_{32} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_{31})^2 \\
 &\quad - \frac{1}{4} m_3 l_3^2 s^2 \theta_{32} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_{31})^2 - (l_3 c (\theta_2 + \theta_{31}) c \theta_{32}) \lambda_1 \\
 &\quad - (l_3 s (\theta_2 + \theta_{31}) c \theta_{32}) \lambda_2 + (l_3 s \theta_{32}) \lambda_3 \\
 F_{37} &= -(\frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 s \theta_{31} c \theta_{32}) \ddot{\theta}_2 - m_3 g (\frac{l_3}{2} s (\theta_2 + \theta_{31}) c \theta_{32}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 c \theta_{31} c \theta_{32} \dot{\theta}_{32}^2 + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 c^2 \theta_{32} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_{31})^2 \\
 &\quad - \frac{1}{4} m_3 l_3^2 s^2 \theta_{32} (\dot{\theta}_2 + \theta_{31})^2 - (l_3 c (\theta_2 + \theta_{31}) c \theta_{32}) \lambda_1 \\
 &\quad - (l_3 s (\theta_2 + \theta_{31}) c \theta_{32}) \lambda_2 + (l_3 s \theta_{32}) \lambda_3 \\
 F_{38} &= 0, F_{41} = F_{43} = F_{43} = F_{44} = 0, F_{45} = F_{46} = F_{47} = 0
 \end{aligned}$$

$$F_{48} = -\frac{1}{2} m_4 g l_4 s \theta_4 + l_4 c \theta_4 \lambda_1 + l_4 s \theta_4 \lambda_4$$

$$\frac{\partial G}{\partial YP} = \begin{bmatrix} FP_{11} & FP_{12} & FP_{13} & FP_{14} & F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ FP_{21} & FP_{22} & FP_{23} & FP_{24} & F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ FP_{31} & FP_{32} & FP_{33} & FP_{34} & F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ FP_{41} & FP_{42} & FP_{43} & FP_{44} & F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{B.2.b}$$

$$\begin{aligned}
 FP_{11} &= \frac{1}{4} m_2 l_2^2 + J_z + m_3 l_2^2 + m_3 l_2 l_3 c \theta_{31} c \theta_{32} + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 c^2 \theta_{32} + J_z \\
 FP_{12} &= \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 c \theta_{31} + c \theta_{32} + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 c^2 \theta_{32} + J_z \\
 FP_{13} &= -\frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 s \theta_{31} s \theta_{32}, FP_{14} = 0 \\
 FP_{21} &= \frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 c \theta_{31} c \theta_{32} + \frac{1}{4} m_3 l_3^2 c^2 \theta_{32} + J_z \\
 FP_{22} &= \frac{1}{4} m_3 l_3^2 c^2 \theta_{32} + J_z, FP_{23} = 0, FP_{24} = 0 \\
 FP_{31} &= -\frac{1}{2} m_3 l_2 l_3 s \theta_{31} s \theta_{32}, FP_{32} = 0, FP_{33} = \frac{1}{4} m_3 l_3^2 + J_x \\
 FP_{34} &= 0, FP_{41} = FP_{42} = FP_{43} = 0, FP_{44} = \frac{1}{4} m_4 l_4^2 + J_z
 \end{aligned}$$

편의상 $\cos \theta$, $\sin \theta$ 의 경우 $c\theta$ 와 $s\theta$ 로 표시하였으며, 유도된 위의 식은 속도변환기법으로 유도된 시스템자코비안 식 (29)에 Fig. 3의 벡터를 대입하여 구한 결과와 정확하게 일치한다.