

버블패킹방법을 이용한 2차원 자동격자 생성 및 재구성 알고리즘 개발 (II)

- 비선형 해석 -

정순완* · 김승조†

(2000년 11월 6일 접수, 2001년 9월 12일 심사완료)

Development of Algorithm for Two Dimensional Automatic Mesh Generation and Remeshing Technique Using Bubble Packing Method (II) - Nonlinear Analysis -

Soon Wan Chung and Seung Jo Kim

Key Words: Bubble Packing Method(버블패킹방법), Mesh Generation(격자생성), Remeshing(격자 재구성), Refinement(세밀화), Nonlinear Analysis(비선형 해석)

Abstract

In this second part of the paper, the automatic mesh generation and remeshing algorithm using bubble packing method is applied to the nonlinear problem. The remeshing/refinement procedure is necessary in the large deformation process especially because the mesh distortion deteriorates the convergence and accuracy. To perform the nonlinear analysis, the transfer of state variables such as displacement and strain is added to the algorithm of Part I. The equilibrium equation based on total Lagrangian formulation and elasto-viscoplastic model is used. For the numerical experiment, the upsetting process including the contact constraint condition is analyzed by two refinement criteria. And from the result, it is addressed that the present algorithm can generate the refined meshes easily at the largely deformed area with high error.

기호설명

C_{I-} : 회전없는 현재형상

E : 탄성 변형률, P : 소성 변형률

F : 변형구배텐서, U : 우신장 텐서

ϕ : 자유에너지, ψ : 소산 포텐셜

S : 회전자유 응력(Dienes 응력)

h : 경화 변수

z : 경화 관련 상태변수(h 와 공역관계)

e_ϵ : 변형률 오차, $\epsilon^* - \hat{\epsilon}$

ϵ^* : 복원기법으로 구한 변형률

$\hat{\epsilon}$: 유한요소해석으로 구한 변형률

ϵ_{eq} : 등가 변형률 ($\epsilon_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \epsilon_{ij} : \epsilon_{ij}}$)

$\|e_\epsilon\|$: 변형률 오차의 L_2 norm

$\left(\|e_\epsilon\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \|e_\epsilon\|_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \int_{\Omega} (\epsilon^* - \hat{\epsilon})_i^2 d\Omega} \right)$

η : 상대오차, η^* : 예상상대오차

η_{max}^* : 최대허용 상대오차

q : 버블크기 조절인자

$\|e_\epsilon\|_{i,max}$: 요소당 최대허용오차

1. 서론

비선형 문제의 유한요소해석은 이제는 많은 상용프로그램에서 채택하고 있을 정도로 일반화되고 있다. 그 중 대표적인 비선형 문제인 대변형(large strain) 문제를 해석할 때는 문제의 특성상

* 서울대학교 대학원 항공우주공학과

† 책임저자, 회원, 서울대학교 기계항공공학부

E-mail : sjkim@snu.ac.kr

TEL : (02)880-7388 FAX : (02)887-2662

유한요소가 상당히 찌그러지게 된다. 만약 초기 격자를 그대로 사용한다면 대변형이 진행될수록 근사오차(approximation error)가 커지게 되므로 해의 정확성 뿐만 아니라 수렴성도 악화된다. 따라서 격자의 찌그러짐이나 해의 구배 (solution gradient)가 클 때, 격자 재구성을 통해 이러한 문제점을 해결하려는 노력이 활발히 진행되고 있다.^(1~5) 격자를 재구성하기 위해서는 그에 대한 기준이 필요한데, 일반적으로 유한요소해에 대한 오차예측을 통한 방법^(1~3)과 요소의 기하학적 변형 정도^(4~7)를 사용한 방법으로 나눌 수 있다. 조해구⁽⁸⁾는 변형률 속도 오차가 다른 기하학적 오차보다 격자 재구성 시점을 정확하게 결정한다고 설명했다.

본 논문에서는 Part 1⁽⁹⁾에서 설명한 알고리즘에 비선형 해석을 위해 몇가지 사항을 추가하였다. 우선 자동격자 생성 과정은 선형해석에서 사용한 알고리즘과 동일하다. 그러나 격자 재구성 과정에서 대변형으로 인해 경계 절점사이의 간격이 벌어지는 경우에 버블을 그 사이에 채워나가는 기능과 선형탄성해석에서는 초기형상에서 다시 하중을 가했기 때문에 고려하지 않았던 상태변수들(변위, 응력, 변형률 등)의 전달과정을 추가하였다. 비선형 이론으로는 극분해 이론(polar decomposition theorem)과 탄점소성 이론을 사용하여 기하학적 및 재료학적 비선형 효과를 구현하였다. 수치예제로 사용한 업세팅 문제는 접촉조건을 포함하기 때문에 확장된 내부벌칙 함수법으로 접촉 구속조건을 나타내었다. 세밀화 영역의 격자크기를 조절하기 위해 제한한 변수 q 가 서로 다른 두 가지 경우에 대해 해석을 수행하였다.

2. 비선형 이론

2.1 기하학적 비선형 이론

변형구배텐서 F 는 식 (1)과 같이 우신장 텐서 U 와 회전텐서 R 로 나누어질 수 있다.

$$F = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (1)$$

회전없는 현재형상 C_t 와 소성과 관련된 중간형상 C_p 를 가정하면(Fig. 1) 우신장 텐서는 다음과 같이 분해될 수 있다.⁽¹⁰⁾

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^e + \mathbf{U}^p - \mathbf{I} \quad (2)$$

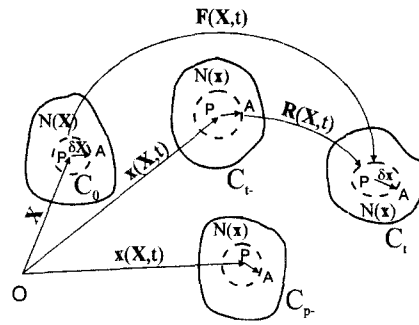


Fig. 1 Configuration of right polar decomposition

여기서 U^e 와 U^p 는 각각 탄성 인장 텐서와 소성 인장 텐서를 의미한다. 식 (2)를 식 (1)에 대입하면 식 (3)이 되고, 속도 구배 텐서와 속도 변형률 텐서가 식 (4),(5)처럼 구해진다.

$$F = \mathbf{R}\mathbf{U}^e + \mathbf{R}\mathbf{U}^p - \mathbf{R} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} L &= \dot{F}F^{-1} \\ &= \dot{R}R^t + R(\dot{U}^e U^{-1} + \dot{U}^p U^{-1})R^t \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} D &= L|_{sym} \\ &= R(\dot{U}^e U^{-1}|_{sym} + \dot{U}^p U^{-1}|_{sym})R^t \end{aligned} \quad (5)$$

C_t 상에서의 변형률은 식 (5)의 괄호안의 성분(탄성 변형률 속도 \dot{E} , 소성 변형률 속도 \dot{P})을 적분하여 구할 수 있다.

$$\dot{E} = \dot{U}^e U^{-1}|_{sym}, \quad \dot{P} = \dot{U}^p U^{-1}|_{sym}$$

2.2 재료학적 비선형 이론

탄점소성 거동을 위한 N형 재료이론⁽¹¹⁾은 다음 두 개의 포텐셜을 사용한다.

♣ 자유에너지

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{1}{2} \{ \lambda (\text{tr} \mathbf{E})^2 + 2\mu (\text{tr} \mathbf{E}^2) \} \right. \\ &\quad \left. + h_1 z + \frac{1}{m} (h_1 - h_0) \exp(-mz) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

♣ 소산포텐셜

$$\psi = D_0 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{\beta^i h^{2i-1}}{i!(2i-1)!^{1/2}} \quad (7)$$

여기서, $\beta = \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)$ 이고, 위의 포텐셜을 미분하여 다음의 구성방정식을 얻게 된다.

$$\mathbf{S} = \frac{\rho}{\rho_0} [\lambda (\text{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}] \quad (8)$$

$$h = \frac{\rho}{\rho_0} [h_1 + (h_0 - h_1) \exp(-mz)] \quad (9)$$

$$\dot{P} = D_0 \frac{1}{2h\sqrt{J_2}} \exp\left(-\frac{\beta h^2}{J_2}\right) S' \quad (10)$$

$$\dot{z} = \frac{1}{h} S' : \dot{P} \quad (11)$$

식 (10),(11)은 시간에 대한 미분꼴이므로 P 는 backward Euler 법으로, z 는 predictor-corrector 법으로 적분하였다.

2.3 접촉구속조건

많은 하중전달체계에서 접촉현상이 일어나므로 이에 관한 이론도 많이 개발되어 왔다. 본 연구에서는 확장된 역장벽 벌칙 범함수(inverse barrier extended interior penalty functional)(식 (12))를 사용한 확장된 내부벌칙 함수법⁽¹²⁾을 사용하여 접촉 구속조건을 부가하였다.

$$Q(u) = \begin{cases} - \int_{\Gamma} \frac{1}{u \cdot N - s} d\Gamma & \text{if } u \cdot N - s \leq \epsilon' \\ - \int_{\Gamma} \frac{1}{\epsilon'} \left\{ \left[\frac{u \cdot N - s}{\epsilon'} \right]^2 - 3 \left[\frac{u \cdot N - s}{\epsilon'} \right] + 3 \right\} d\Gamma & \text{if } u \cdot N - s > \epsilon' \end{cases} \quad (12)$$

여기서, s 는 초기간극, ϵ' 은 음수를 나타내는 벌칙매개변수, N 은 접촉면의 수직벡터를 의미한다. 식 (12)의 위 식은 허용영역 내에 존재하는 해를, 아래 식은 허용영역 외부에 존재하는 해를 구하게 한다.

3. 격자 재구성 알고리즘

전체적으로 Part 1의 알고리즘을 바탕으로 하고 대변형을 고려한 몇가지 알고리즘을 추가하였다.

3.1 선형해석시 사용한 알고리즘⁽⁹⁾

3.1.1 재구성 영역 결정과 새로운 버블크기

사용자가 정한 최대허용 상대오차 η_{max}^* 를 이용하여 각 요소당 최대허용오차 $\|e_\epsilon\|_{i,max}$ (식 (13))를 구하고 이보다 큰 오차를 갖는 요소를 중심으로 세밀화 원(refining circle) 내부에서 새로운 버블크기의 버블들이 생성된다.

$$\|e_\epsilon\|_{i,max} = \frac{\eta_{max}^*}{\sqrt{m}} (\|\epsilon^*\|^2 + \|e_\epsilon\|^2)^{1/2} \quad (13)$$

그리고 이 세밀화 원 내부에 놓이는 버블 크기는 버블크기 조절인자 q 를 통해 결정된다.(식 (14))

$$d_{new} = \left(\frac{\|e_\epsilon\|_{i,max}}{\|e_\epsilon\|_i} \right)^q d_{ave} \quad (14)$$

3.1.2 경계절점의 추가

경계에 인접한 요소에서 오차가 크면 이 요소의 경계선분의 중점에 새로운 절점을 추가하여 세밀화된 경계절점을 나타낸다.

3.1.3 새로운 격자로의 변수전달

선형해석에서는 격자를 재구성 할 때 초기 상태에서 하중을 작용하므로 경계조건과 하중조건이 작용하는 절점들의 정보만을 고려하면 된다.

3.2 격자 재구성 기준

비선형 해석에서 격자 재구성 여부의 판단은 각 하중중분 단계내에서 수렴이 이루어진 시점에서 이루어졌는데 선형해석과 달리 전체 요소의 예상상대오차 η^* (식 (15))를 계산하고 η_{max}^* 보다 클 경우에 격자를 재구성하였다. 이것은 요소별로 오차를 비교하면 오차가 큰 하나의 요소 때문에 전체적으로 격자를 재구성해야 하기 때문에 하중중분이 많을 때는 비효율적이다. 일단 격자를 재구성할 필요가 있으면 3.1.1항과 같이 세밀화 원 내부에 식 (14)의 버블크기를 갖는 버블을 배치한다.

$$\eta^* = \sqrt{\frac{\|e_\epsilon\|^2}{\|\epsilon^*\|^2 + \|e_\epsilon\|^2}} \quad (15)$$

3.3 경계절점의 추가

본 알고리즘은 버블배치나 삼각화 과정이 경계에서 출발하여 안으로 진행하기 때문에 격자를 재구성하기 위해서는 경계절점들의 정보와 버블크기 함수만 고려하면 진 영역에 걸쳐 새로운 격자가 구성된다. 대변형 문제에서는 경계에서의 대변형으로 기존의 경계선분으로는 변형을 묘사하기 어려운 경우(예를 들어, 복잡한 기하학적 구속이 있는 부분과 경계선분이 닿을 때)가 발생할 수 있다. 이러한 경계선분에서는 버블간의 거리가 버블지름의 평균보다 매우 커질 수 있기 때문에 버블패킹방법의 두 번째 단계인 “경계선 버블 채움”⁽⁹⁾ 과정으로 절점을 추가하였다. 그리고 밴드폭 최소화(bandwidth minimization) 과정 전후의 절점번호 변경 정보를 이용하여 새로 추가된 절점의 경계조건 및 하중조건 등을 결정하였다.

3.4 새로운 격자로의 변수 전달

비선형 해석에서는 전 하중단계에서의 상태변수들을 이용하여 다음 평형상태를 찾아야 하므로, 격자 재구성이 이루어지면 새로운 격자의 상태변수를 이전 격자로부터 구해야 한다.

응력이나 변형률과 같은 적분점 값은 다음의 3단계를 거쳐 구 격자(old mesh)에서 신 격자(new mesh)로 전달되고, 변위와 같은 절점 값은 3단계 중 두 번째 단계로 전달된다.

- (1단계) SPR(Superconvergent Patch Recovery)로 구 격자에서 적분점 값을 절점 값으로 변환한다.
- (2단계) 구 격자의 절점 값을 신 격자의 절점 값으로 전달한다.
- (3단계) 신 격자에서 절점 값을 적분점 값으로 변환한다.

복원기법(recovery technique)인 SPR은 불연속한 적분점 값을 최소사승개념(유한요소해와 연속함수로 가정한 다항식 사이의 차를 최소화)을 사용하여 절점 값으로 바꿔준다. 2단계를 위해서는 우선 신 격자의 절점이 구 격자의 어느 요소내에 존재하는가를 알아야 한다. 이를 위해 구 격자 삼각형 요소의 세 변을 바깥 경계선으로 간주하고 Part 1 논문⁹⁾의 NSA(Node Search Algorithm)-2 알고리즘을 사용하였다. 신 격자의 한 점의 좌표 (x_1, y_1) 가 구 격자의 어떤 삼각형의 세 변에 대해 식 (16)을 모두 만족할 때, 즉 타당영역에 놓여 있을 때 그 요소내에 점 (x_1, y_1) 이 존재하게 된다.

$$-v_y x_1 + v_x y_1 + c > 0 \quad (16)$$

여기서 (v_x, v_y) 는 반시계 방향을 기준으로 본 직선의 방향벡터를 의미한다. 그 다음, 면적 좌표(area coordinate)를 이용하여 구 격자의 절점 값을 보간하여 신 격자의 절점 값을 구한다. 3단계에서는 본 연구에서 선형 삼각형 요소를 사용하므로 절점 값을 평균하여 적분점 값을 계산한다.

그리고 새로 추가된 경계절점이 접촉예상 절점에 포함되는가를 살펴보았다. 경계조건이 부가 때와 마찬가지로, 만약 추가된 절점의 양쪽에 접촉예상 절점이 있으면 이 절점을 접촉예상 절점에 포함시키고 작용하는 접촉력을 계산하였다.

4. 수치해석

사용한 대변형 문제는 속이 팽창 AI 2024 원형 실린더의 업세팅 문제이다. 축대칭 가정을 사용

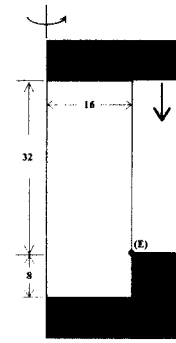
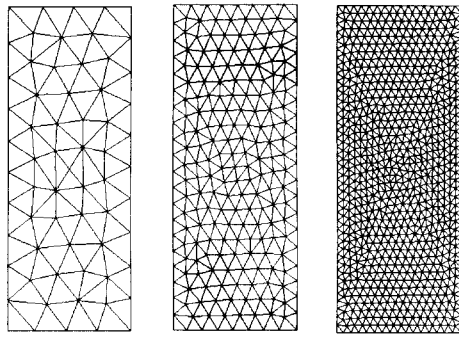


Fig. 2 Boundary and loading conditions of upsetting problem

하였고, 총 변형률의 등가 성분 (ϵ_{eq}) 을 사용하여 오차를 예측하였다. Fig. 2은 사용한 수치모델 형상(단위 : mm)을 보이고 있다.

만약 주어진 반복계산 횟수내에서 수렴조건을 만족하지 않으면 하중중분(die의 이동량)을 절반으로 줄이는 해법을 사용하였다. 우선 균일한 버블크기 4mm, 2mm, 1mm를 사용하여 격자를 생성하였는데, 그 형상은 Fig. 3에, 절점수와 요소수는 Table 1에 나타내었다. 격자 재구성을 고려하지 않을 때의 Mesh-1~3의 변형형상을 Fig. 4에 도시하였는데 높이 감소가 진행될수록 요소의 찌그러짐이 점점 심해졌다. 특히 Mesh-1처럼 요소크기가 큰 경우에는 Fig. 2의 (E)지점 부근의 격자는 아래쪽 틈과 간섭을 일으킬 수 있으므로 변형이 물리적으로 타당하지 않다. 다시 말해서 초기의 굵은 격자로는 복잡한 형상을 갖는 경계조건을 만족시키기 어렵다. 이를 극복하기 위해 Liu⁽¹³⁾는 자동 국부 격자 분할 알고리즘을 제안하기도 하였다. Mesh-2,3처럼 보다 세밀한 격자를 사용하면 전체적으로 찌그러짐 정도는 줄어들지만 국부적인 오차가 여전히 클 수 있다. 이에 대한 그래프는 격자 재구성 결과와 함께 도시할 것이다.

따라서 Mesh-1을 초기 격자로 사용하고 두 개의 세밀화 기준 $(\eta_{max}^* = 8\%, q=1$ 과 $\eta_{max}^* = 8\%, q=1.5)$ 을 사용하여 격자 재구성을 수행하였다. 변형과정 동안 두 기준에 대해 각각 3번의 재구성을 수행했는데, 이 때 얻은 새로운 격자의 절점수와 요소수를 Table 2에 정리하였고 재구성 전후의 격자와 그때의 오차분포를 각각 Fig. 5와 Fig. 6에 나타내었다. 공통적으로 오차가 큰 부분



(a) Mesh-1 (size=4mm) (b) Mesh-2 (size=2mm) (c) Mesh-3 (size=1mm)

Fig. 3 Meshes generated by uniform refinement in upsetting problem

Table 1 Numbers of nodes and elements of uniform refinement in upsetting problem

	Mesh-1	Mesh-2	Mesh-3
절점수	65	221	813
요소수	100	384	1512

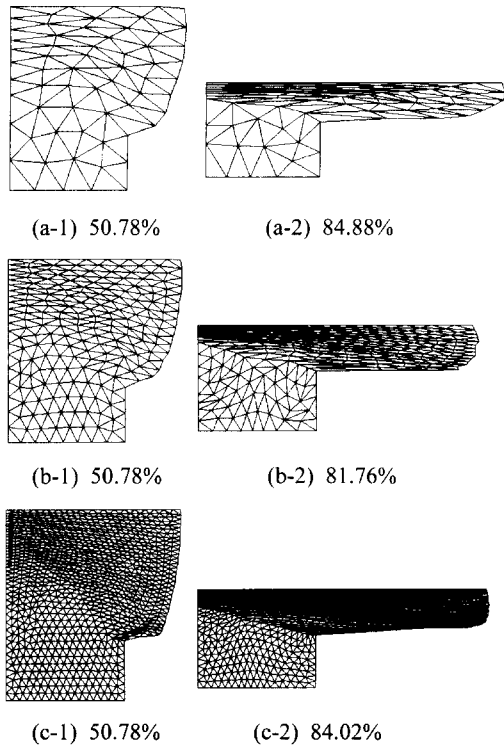
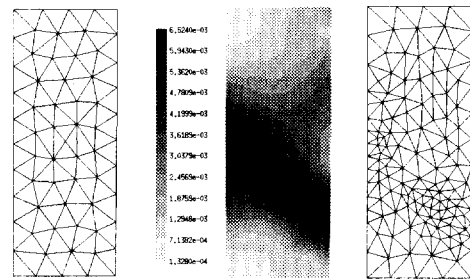


Fig. 4 Deformed shapes of uniform meshes

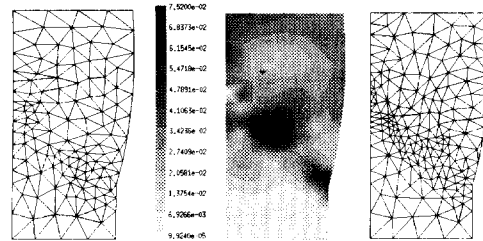
Table 2 Numbers of nodes and elements of adaptive refinement in upsetting problem

(Mesh-r(N1)-(N2)-(N3), N1 : η_{max}^* ,
N2 : q , N3 : remeshing order)

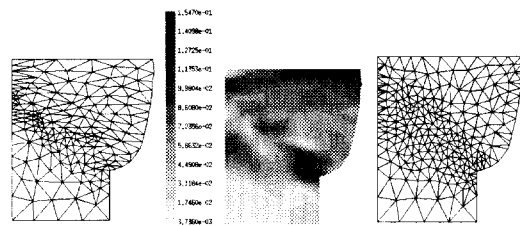
	절점 수	요소 수
Mesh-r8-1-1	137	237
Mesh-r8-1-2	195	340
Mesh-r8-1-3	267	467
Mesh-r8-1.5-1	165	291
Mesh-r8-1.5-2	416	770
Mesh-r8-1.5-3	561	1029



(a) 1st remeshing(1.95% reduction)



(b) 2nd remeshing(21.48% reduction)



(c) 3rd remeshing(47.27% reduction)

Fig. 5 Finite element meshes before and after remeshing($\eta_{max}^* = 8\%$, $q = 1$);

Left:Before remeshing, Middle:error distribution, Right:After remeshing

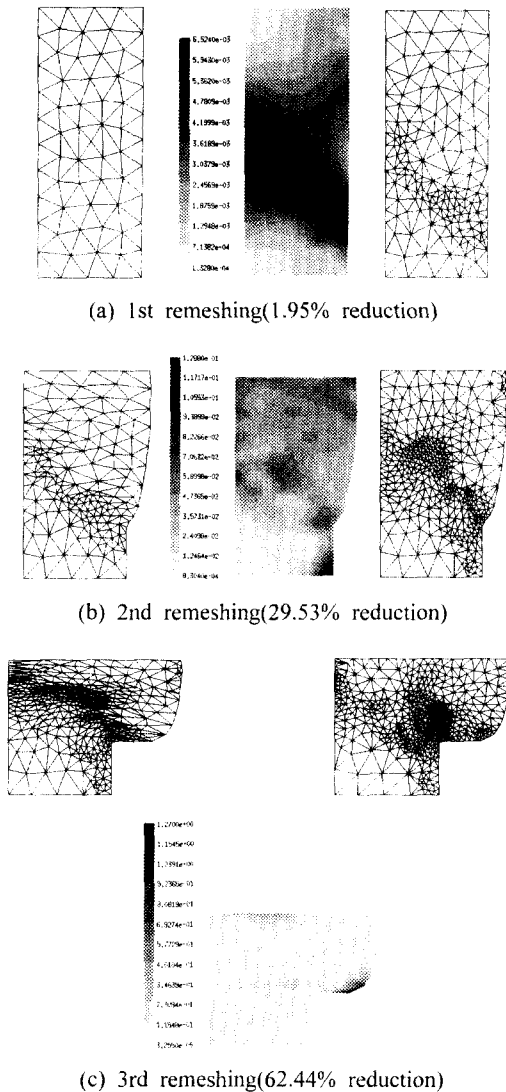


Fig. 6 Finite element meshes before and after remeshing ($\eta_{\max}^* = 8\%$, $q = 1.5$):
Left: Before remeshing, Middle: error distribution, Right: After remeshing

을 중심으로 세밀한 격자가 생성됨을 볼 수 있고, $q = 1.5$ 인 경우 격자 재구성으로 $q = 1$ 일 때보다 많은 요소가 생성되고 그로 인해 다음 재구성 시점도 더 뒤에 일어남을 알 수 있다. 그리고 격자 재구성 직후에 평형상태를 찾기 위해 보다 많은 반복계산이 요구되었는데, 이는 전달된 상태변수들이 아직 완전하게 평형상태를 만족시키지 못했기 때문이다. Fig. 7에는 위의 해석들에서

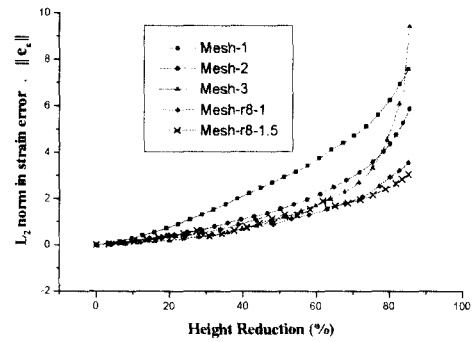


Fig. 7 L_2 norm in strain error vs. height reduction

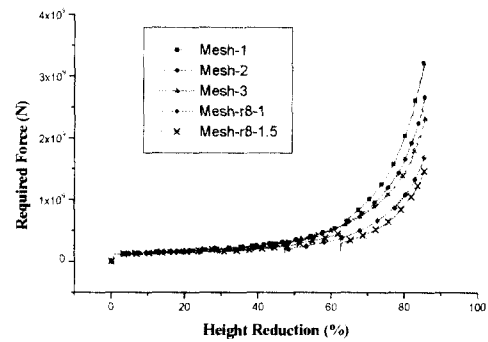


Fig. 8 Required force vs. height reduction

높이 감소에 따라 $\|e_e\|$ 이 어떻게 변하는지를 도시하였다. Mesh-1,2,3에서는 오차는 높이 감소에 따라 계속 증가하였고 격자 재구성을 사용하는 경우에는 그 재구성 과정을 거칠 때마다 오차가 감소하였다. 그리고 업세팅에 필요한 하중크기를 Fig. 8에 나타내었는데, 격자 재구성을 한 직후에 하중이 감소함을 관찰할 수 있다. 이것은 큰 응력값을 갖는 요소가 복원기법에 의해 감소한다는 사실로부터 상태변수의 전달 과정 중에 내부 일(internal work)이 감소하기 때문이라고 생각할 수 있다. 그러나 다음 증분 단계에서 평형점을 찾아가고 하중곡선의 기울기가 격자를 재구성할 때마다 Mesh-1에서 Mesh-3으로 접근하는 경향을 보인다. 만약 요소수를 일정하게 하면 격자 재구성 이후의 하중곡선은 다시 Mesh-1에 접근해 갈 것이다.⁽⁶⁾ 이상의 결과로부터, 본 격자 재구성 알고리즘은 오차를 줄여 정확한 해를 얻을 수 있고 초기격자를 크게 하고 선택적으로 격자를 세밀화하

여 계산의 효율을 높일 수 있으므로 대변형 문제에서도 잘 활용될 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 Part 1의 버블패킹기법을 이용한 자동격자 생성 및 격자 재구성 알고리즘을 대변형이 유발되는 비선형 해석에 적용하였다. 이를 위해 전 영역의 예상상대오차가 허용오차보다 큰 지를 비교하여 재구성 여부를 판단하였고, 대변형으로 경계절점간의 거리가 멀어질 때에 새로운 경계절점을 삽입하는 기능을 추가하였다. 그리고 구 격자와 신 격자사이의 상태변수 전달은 3단계에 걸쳐서 수행하였다. 수치해석에 사용된 업세팅 문제는 접촉 조건을 포함하고 있기 때문에 추가된 경계절점이 접촉예상 절점들 사이에 놓여있는가도 살펴보았다. 세밀화 영역과 그 곳의 격자 크기를 결정하는 두 변수를 조절하여 오차가 큰 영역에서 격자 재구성이 잘 이루어짐을 업세팅 문제에서 볼 수 있었는데, 이 두 변수의 최적값은 향후 연구에서 검토될 예정이다. 따라서 본 알고리즘은 정확성과 효율성 측면에서 선형 문제뿐만 아니라 비선형 문제에도 활용 가능성을 확인하였다.

후 기

본 연구는 과학기술부의 국가지정연구실 사업(과제번호 00-N-NL-01-C-026)에 의해 지원되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) Khoei, Amir R. and Lewis, Roland W., 1999, "Adaptive Finite Element Remeshing in a Large Deformation Analysis of Metal Powder Forming," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 45, pp. 801~820.
- (2) Yang Henry T.Y., Martin Heinstein and Shih, J.M., 1989, "Adaptive 2D Finite Element Simulation of Metal Forming Processes," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 28, pp. 1409~1428.
- (3) Cheng Jung-Ho, 1988, "Automatic Adaptive Remeshing for Finite Element Simulation of Forming Process," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 26, pp. 1~18.
- (4) 강연식, 박치용, 조종래, 양동열, 1992, "평균형을 이용한 축대칭 열간 압출의 유한요소해석," *대한기계학회 논문집*, 16(2), pp. 207~225.
- (5) 이낙규, 박치용, 윤정호, 양동열, 1993, "단위체격자 재구성법과 약형격자 재구성을 이용한 3차원 불단조의 유한요소 해석," *대한기계학회 논문집*, 17(4), pp. 863~872.
- (6) PavanaChand Ch. and KrishnaKumar, R., 1998, "Remeshing Issues in the Finite Element Analysis of Metal Forming Problems," *Journal of Materials Processing Technology*, 775, pp. 63~74.
- (7) Habraken, AM. and Cescotto, S., 1990, "An Automatic Remeshing Technique for Finite Element Simulation of Forming Processes," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 30, pp. 1503~1525.
- (8) 조해규, 채수원, 박종진, 1996, "대변형 유한요소해석에서의 요소망의 재구성을 위한 기준," *한국정밀공학회지*, 13(10), pp. 78~87.
- (9) 정순완, 김승조, 2001, "버블패킹방법을 이용한 2차원 자동격자 생성 및 재구성 알고리즘 개발(I) -선형해석-", *대한기계학회 논문집 A권*, 25(6), pp. 1004~1014.
- (10) Kim Seung Jo and Chung Soon Wan, 1998, "Numerical Simulation of Finite Rotation Based on Strain Kinematics by Polar Decomposition," *International Conference on Computational Engineering and Science*, pp. 691~696, Atlanta, GA, October 6-9.
- (11) Kim, S.J. and Oden, J.T., 1985, "Finite Element Analysis of a Class of Problem in Finite Elastoplasticity Based on the Thermodynamical Theory of Type N," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 53, pp. 277~307.
- (12) Kim Seung Jo and Kim Jin Hee, 1993, "Finite Element Analysis of Laminated Composites with Contact Constraint by Extended Interior Penalty Methods," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 36, pp. 3421~3439.
- (13) Liu, D., Luo, Z.J. and Gu, M.X., 1998, "The Algorithm of Automatic Local Mesh Subdivision and its Application to Finite-Element Analysis of a Large Deformation Forming Process," *Journal of Materials Processing Technology*, 83, pp. 164~169.