

천정 크레인의 모델링 및 위치제어

이 종 규*

(2000년 10월 6일 접수, 2001년 9월 21일 심사완료)

The Modelling and Position Control of Overhead Cranes

Jong Gyu Lee

Key Words: Overhead Cranes(천정 크레인), Nonlinear Model(비선형 모델), Nonlinear Optimal Control(비선형 최적제어), Hamiltonian Function(하밀턴 함수)

Abstract

Overhead cranes consist of trolley, girder, rope, objects, trolley motor, girder motor, and hoist motor. If objects are regarded as mass point, and the acceleration of hoisting motion for objects is neglected, analytical model of overhead cranes becomes a nonlinear model because the length of a rope changes. Equations of motion for this model is derived of simultaneous differential equations for motors and objects. Positions of the model are controlled by optimal inputs which obtain from a nonlinear optimal control method. From the results of computer simulation, even if initial states of objects swing, it is founded that position of overhead cranes is controlled, and that swing of objects is suppressed.

1. 서론

거더모터, 트롤리모터, 호이스트모터의 구동으로 이송 운동하는 천정 크레인을 사용하여 줄의 끝 부분에 연결된 화물을 운송할 때, 운송화물에서 발생하는 진자운동의 영향으로 화물운송시간이 지연되어서, 크레인작업의 생산효율이 떨어진다. 따라서, 화물의 진자운동을 억제시키면서 화물을 목적지까지 운송할 수 있는 크레인 제어기술의 개발이 필요하다.

지금까지 연구 개발되고 있는 크레인시스템의 크레인의 위치 및 화물의 진자각 제어기술은 크레인시스템의 선형모델⁽¹⁻⁴⁾ 및 비선형모델^(5,6)을 이용하였고, 이들 모델은 라그랑지운동방정식으로부터 유도된 것이다. 이러한 방정식으로 유도된 크레인의 모델은 크레인의 위치뿐만 아니라 화물의 진자각이 제어대상으로 표현되므로, 크레

인의 위치 및 화물의 진자각을 동시에 제어할 수 있는 기술을 요구하고 있다.

본 연구는 모터의 전달함수 및 뉴턴의 운동법칙으로부터 크레인의 동특성을 기술할 수 있는 크레인의 비선형 모델을 유도하고, 유도된 모델을 이용하여 크레인의 위치를 제어할 수 있는 비선형 최적제어방법을 제시한 뒤, 컴퓨터 시뮬레이션으로 크레인 위치제어의 타당성을 검증하는 것이다.

2. 천장 크레인의 모델링

크레인 모델링에 적용된 가정은 다음과 같다.

- ① 줄의 질량은 무시되고, 화물은 형상이 무시되는 질점(mass point)이다.
- ② 화물의 흔들림각 θ 는 작다고 간주하여 $|\theta| \ll 1$ 이다.
- ③ 화물의 권상/권하 가속도 Z 가 충분히 작다.
- ④ 화물의 질량이 크지 않고, 크레인 구동 모터의 감속비가 매우 크다.

* 회원, 대구가톨릭대학교 기계자동차공학과
E-mail : jklee81@hanmail.net
TEL : (053)850-2721 FAX : (053)850-2704

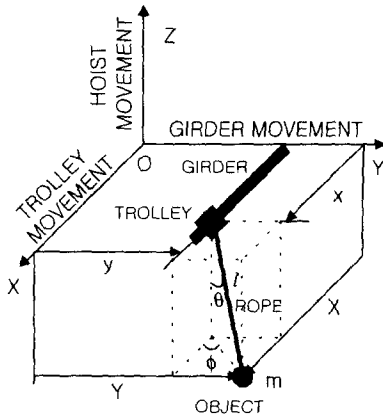


Fig. 1 Overhead cranes which do three dimensional motion

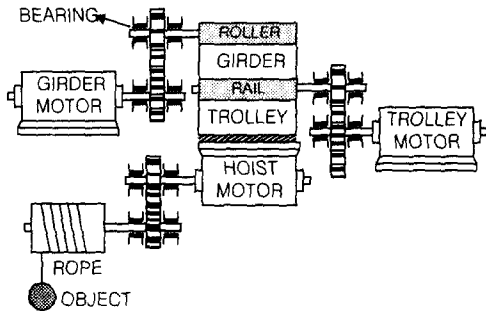


Fig. 2 Process of objects transportation of overhead cranes

크레인이 Fig. 1에서 보는바와 같이 X축 방향의 트롤리운동, Y축 방향의 거더운동, Z축 방향의 호이스트운동으로 화물을 운송할 때, 가정 ①을 적용하면 화물의 위치는 다음과 같다.

$$X = x + l \sin \theta \cos \phi \tag{1}$$

$$Y = y + l \sin \theta \sin \phi \tag{2}$$

$$Z = -l \cos \theta \tag{3}$$

여기서, X, Y, Z는 각각 화물의 X, Y, Z 방향의 위치이고, x, y는 각각 트롤리, 거더의 이송위치, l은 줄 길이이고, θ, φ는 각각 화물의 흔들림각과 비틀림각을 나타낸다.

이러한 크레인은 Fig. 2에서 보는 바와 같이 거더모터에서 발생된 회전력이 기어상자를 통해 거더에 전달하여 거더, 트롤리 및 호이스트를 이송시키는 거더운동, 트롤리모터에서 발생된 회전력이 기어상자를 통해 트롤리에 전달하여 트롤리와 호이스트를 이송시키는 트롤리운동, 및 호이스트모터에서 발생된 회전력이 기어상자를 통해 줄과 화물을 이송시키는 호이스트운동으로 화물을 운송하므로 크레인은 모터부하로 간주할 수 있다.

따라서, 크레인의 위치변화는 모터와 베어링의 마찰을 무시하면 식 (4)과 같이 표현되는 모터와 부하 사이의 전달함수⁽⁷⁾로부터 얻을 수 있다.

$$\Theta_m(s) = K V(s) / [s(1 + s\tau)] \tag{4}$$

여기서, s는 라플라스 인자, K, τ는 각각 크레인의 특성을 고려한 모터이득상수, 모터시상수, v(t)는 모터의 공급전압, θ_m(t)은 모터의 회전각을 나타내며, K와 τ를 조정함으로써 얻어지는 θ_m으로부터 모터에 연결된 크레인의 위치를 얻을 수 있다. 식 (4)로부터 유도되는 거더, 트롤리, 호이스트 모터의 운동방정식은 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\ddot{\theta}_x = K_x v_x / \tau_x - \dot{\theta}_x / \tau_x \tag{5}$$

$$\ddot{\theta}_y = K_y v_y / \tau_y - \dot{\theta}_y / \tau_y \tag{6}$$

$$\ddot{\theta}_z = K_z v_z / \tau_z - \dot{\theta}_z / \tau_z \tag{7}$$

여기서, $\dot{\theta} = d\theta/dt$, $\ddot{\theta} = d^2\theta/dt^2$, 첨자 x, y, z는 각각 트롤리 모터, 거더 모터, 호이스트 모터와 관련된 변수들이다. 식 (5)~(7)로부터 트롤리, 거더, 줄 길이의 위치를 얻을 수 있는 다음과 같은 운동방정식으로 변환할 수 있다.

$$\ddot{x} = r_x K_x v_x / \tau_x - \dot{x} / \tau_x \tag{8}$$

$$\ddot{y} = r_y K_y v_y / \tau_y - \dot{y} / \tau_y \tag{9}$$

$$\ddot{l} = r_z K_z v_z / \tau_z - \dot{l} / \tau_z \tag{10}$$

여기서, r은 크레인 구동 휠(wheel)의 반지름 $x = r_x \theta_x$, $y = r_y \theta_y$ 는 각각 트롤리, 거더의 위치 $l = r_z \theta_z$ 는 줄 길이를 나타낸다.

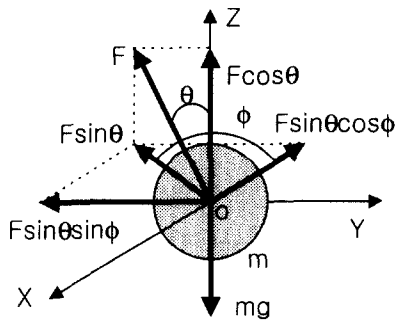


Fig. 3 Forces operating objects

질점인 화물은 모멘트 운동방정식을 고려하지 않으므로, Fig. 3에서 보는바와 같이 화물의 운동방정식은 뉴턴의 운동법칙⁽⁸⁾을 적용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$m\ddot{X} = -F \sin \theta \cos \phi \quad (11)$$

$$m\ddot{Y} = -F \sin \theta \sin \phi \quad (12)$$

$$m\ddot{Z} = F \cos \theta - mg \quad (13)$$

여기서, m은 화물의 질량, F는 줄의 장력, g는 중력가속도다. 식 (11)~(13)에서 F를 소거하면, X, Y방향의 화물 운동방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{X} = - (g + \ddot{Z})(X-x) / (l \cos \theta) \quad (14)$$

$$\ddot{Y} = - (g + \ddot{Z})(Y-y) / (l \cos \theta) \quad (15)$$

여기서, 가정 ②로부터 $\theta \neq \pi/2$ 이므로 $\cos \theta \neq 0$ 이다. 가정 ③로부터 $g \gg \ddot{Z}$ 가 되므로, 식 (14), (15)는 다음과 같다.

$$\ddot{X} = -g(X-x) / (l \cos \theta) \quad (16)$$

$$\ddot{Y} = -g(Y-y) / (l \cos \theta) \quad (17)$$

따라서, 크레인 운동방정식은 모터 운동방정식 (8)~(10)과 화물 운동방정식 (16), (17)의 연립방정식으로 표현되는 비선형 운동방정식이다. 이러한 운동방정식에서 얻어진 크레인의 위치를 이용하면 크레인의 화물운송시간에 영향을 미치는 흔들림각 θ 은 식 (1), (2)로부터 다음과 같이 유도된다.

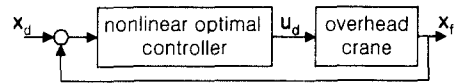


Fig. 4 Block diagram of the position control for overhead cranes

$$\theta = \sin^{-1} [(X-x) / (l \cos \phi)] \quad (18)$$

여기서, $\phi = \tan^{-1} [(Y-y) / (X-x)]$

식 (8)~(10), (16), (17)로 표현되는 크레인의 운동방정식은 트롤리, 거더, 호이스트 모터의 입력 전압으로 트롤리, 거더, 줄, 화물의 위치를 결정하는 다변수시스템이고, 가정 ②로부터 $\cos \theta=1$ 이므로 다음과 같은 비선형 상태방정식⁽⁹⁾이 된다.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_2 / \tau_x + r_x K_x u_1 / \tau_x \\ x_4 \\ -x_4 / \tau_y + r_y K_y u_2 / \tau_y \\ x_6 \\ -x_6 / \tau_z + r_z K_z u_3 / \tau_z \\ x_8 \\ -g(x_7 - x_1) / x_5 \\ x_{10} \\ -g(x_9 - x_3) / x_5 \end{pmatrix} \quad (19)$$

여기서, $x_1=x, x_2=\dot{x}, x_3=y, x_4=\dot{y}, x_5=l, x_6=\dot{l}, x_7=X, x_8=\dot{X}, x_9=Y, x_{10}=\dot{Y}, u_1=v_x, u_2=v_y, u_3=v_z$ 이다.

3. 천정 크레인의 위치제어

크레인의 위치제어는 Fig. 4에서 보는바와 같이 비선형 최적제어방법을 적용하여 초기입력 u_0 가 크레인의 최종치 x_f 가 목표치 x_d 에 도달하도록 하는 최적입력 u_d 를 구한 다음, 그 최적입력을 사용하여 크레인의 위치를 제어하는 것이다.

이러한 최적제어방법에 사용되는 크레인의 성능지수는 다음과 같이 정의한다.⁽⁹⁾

$$J = \frac{1}{2} vS(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} wL(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \quad (20)$$

여기서, v, w 는 가중치이고, 함수 S, L 은 다음과 같이 정의된다.

$$S = (x_{1f} - x_{1d})^2 + \dots + (x_{10f} - x_{10d})^2 + (\theta_f - \theta_d)^2 + (\dot{\theta}_f - \dot{\theta}_d)^2 \quad (21)$$

$$L = x_1^2 + \dots + x_{10}^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad (22)$$

여기서, 첨자 f, d 는 각각 최종치와 목표치를 나타낸다. 식 (20)을 이용한 비선형 최적제어방법은 보완상태 $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{10}]^T$ 을 도입하여 식 (23)과 같이 정의된 하밀턴함수 H 를 이용하여 최종 시간 t_f 가 고정될 때, 식 (24), (25)를 유도한다.⁽¹⁰⁾

$$H = \lambda^T f - wL/2 \quad (23)$$

$$\dot{x} = \partial H / \partial \lambda = H_\lambda \quad (24)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x} = H_x, \quad \lambda_f = -\frac{v}{2} \frac{dS}{dx} \Big|_{t_f} \quad (25)$$

식 (23)에서 부호를 “-”로 함으로써 최적입력을 구하는 알고리즘에 이용되는 탐색방향 s_i 를 Fig. 5에서 보는 바와 같이 편미분방정식으로 표현할 수 있고, 식 (24)는 상태방정식을 나타내며 크레인의 비선형 상태방정식 (19)과 일치하고, 식 (25)은 보완상태방정식과 그 방정식의 최종상태를 나타낸다. 식 (20)~(25)를 사용하여 크레인의 최적입력을 구하는 알고리즘은 Fig. 5에 보여주며, 이 알고리즘에서 구한 최적입력 u_d 는 식 (26)으로부터 구할 수 있다.

$$u_{i+1} = u_i + \alpha s_{i+1}, \quad (26)$$

여기서, u_i 는 현재입력을 나타내고, s_{i+1} 은 현재입력에서 크레인의 목표상태를 만족시키는 새로운 입력을 탐색하는 탐색방향을 나타내고, α 는 현재입력에서 새로운 입력으로 이동할 수 있는 이동거리이며, 2차함수의 최소치를 구하는 이차보간법을 이용하여 구할 수 있다.⁽¹¹⁾ 또한 탐색방향을 결정하는 탐색방향 계수 β 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\beta_i = \int_{t_0}^{t_i} s_i^T s_i dt / \int_{t_0}^{t_i} s_{i-1}^T s_{i-1} dt \quad (27)$$

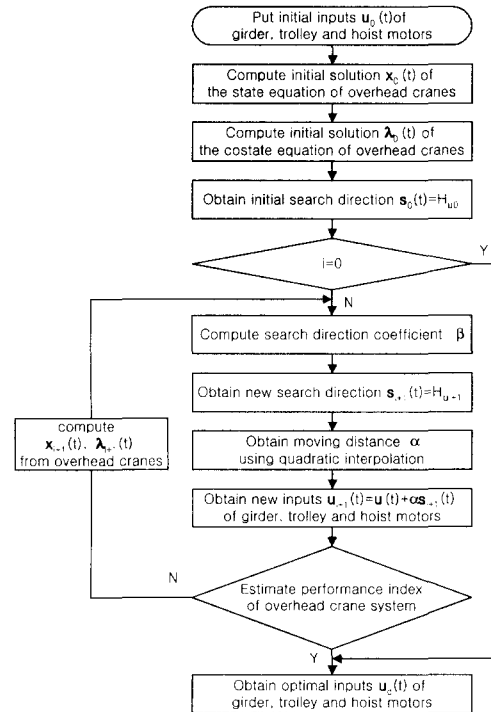
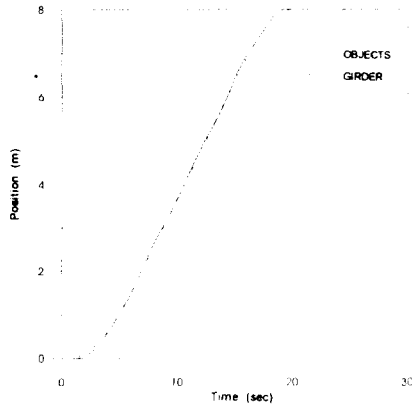


Fig. 5 Algorithm which obtains optimal inputs for overhead cranes

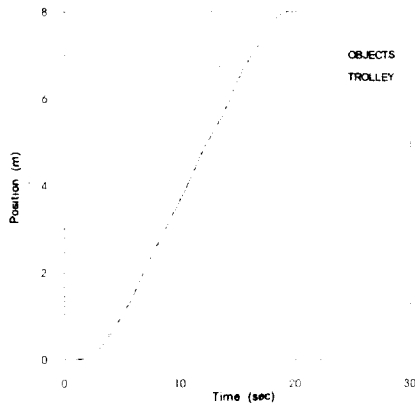
4. 컴퓨터 시뮬레이션

크레인을 이송시키는 거더모터, 트롤리모터, 호이스트모터의 전달함수와 줄과 화물 사이에 작용하는 힘의 관계를 표현하는 뉴턴의 운동 제2법칙을 적용하여 유도한 크레인의 비선형 모델을 사용하여 비선형 최적제어방법에서 구한 최적입력으로 그 모델의 위치를 제어하는 것을 컴퓨터 시뮬레이션으로 보여줄 때, 거더, 트롤리, 호이스트 구동 휠의 반지름 $r_x=r_y=r_z=14\text{mm}$ 로 하였다. 또한, 크레인의 성능지수 식 (20)에서 과도응답을 제어하는 가중치 w 를 사용하지 않고, 모터 시상수 τ 와 모터 이득상수 K 만을 조정하여도 Fig. 6, 8에서 보는바와 같이, 크레인이 원활하게 이송되면서 화물을 목표위치에 운송할 수 있으며, 본 연구에서 사용된 값들은 Table 1에 보여준다.

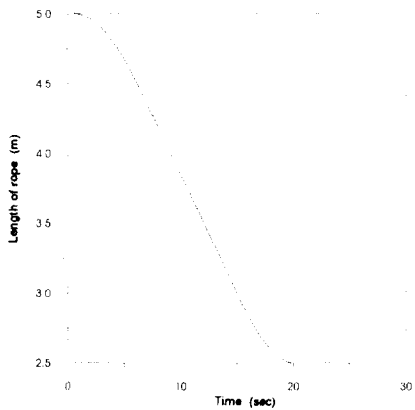
Fig. 6~9에서 보여주는 크레인의 시뮬레이션은 초기시간 $t_0=0$ 초에서 $t_f=20$ 초까지는 비선형 최적제어방법을 적용하여 구한 최적입력을 사용하



(a) Position for girder and Y-direction of objects



(b) Position for trolley and X-direction of objects



(c) Position for the length of rope

Fig. 6 Position of overhead cranes when the initial states of object is stopped

Table 1 Parameters of trolley, girder, and hoist motor

Parameters		Value
Time constant of motor	τ_x	0.62
	τ_y	0.67
	τ_z	0.60
Gain constant of motor	K_x	0.19
	K_y	0.19
	K_z	0.06

여 크레인의 위치를 제어할 수 있는 크레인 모터의 구동구간으로, 모터의 초기입력은 $t_0=0$ 초에서 5초까지의 가속운동, 15초까지의 등속운동, 최종 시간 $t_f=20$ 초까지의 감속운동을 하며 최대 입력전압은 220V로 하였다. 그리고, $t_f=20$ 초에서 $t=30$ 초까지는 비선형 최적제어방법이 적용되지 않는 모터의 정지구간으로, 모터의 입력전압은 0V로 하였다. 이와 같이 모터의 운동구간을 구동구간과 정지구간으로 나눈 것은 Fig. 6, 8에서 보는바와 같이 모터의 구동구간에서 크레인의 위치가 제어된다면 Fig. 7, 9에서 보는바와 같이 화물의 흔들림이 모터의 구동구간에서 지속적으로 발생하여 크레인의 화물운송에 어떠한 영향을 주는지 알 수 없지만, 모터의 정지구간에서 모터의 구동구간에서 제어된 크레인의 최종 위치의 변화상태에 따라서 화물의 흔들림이 크레인의 화물운송에 어떠한 영향을 미치는가를 판단할 수 있기 때문이다.

Fig. 6, 7은 크레인이 정지된 화물을 목표위치까지 운송할 때 크레인의 위치와 화물 흔들림의 결과이고, Fig. 8, 9는 크레인이 초기 흔들림이 존재하는 화물을 목표위치까지 운송할 때 크레인의 위치와 화물 흔들림의 결과를 보여준다.

Fig. 6에서 보는바와 같이 거더, 트롤리 및 호이스트 모터의 구동구간에서 거더, 트롤리, 및 줄길이는 원활하게 움직이면서 목표위치에 도달하고 있고, 정지구간에서 그 위치를 유지하고 있으며, 거더 및 트롤리의 이송방향에서 본 화물은 구동구간에서 거더 및 트롤리의 이송경로를 중심으로 조금씩 흔들리면서 목표위치에 도달하고 있고, 정지구간에서 흔들림이 발생하지 않고 있다.

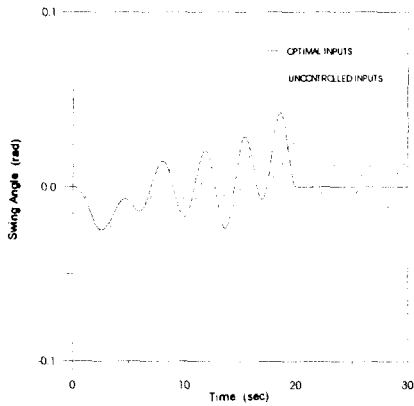


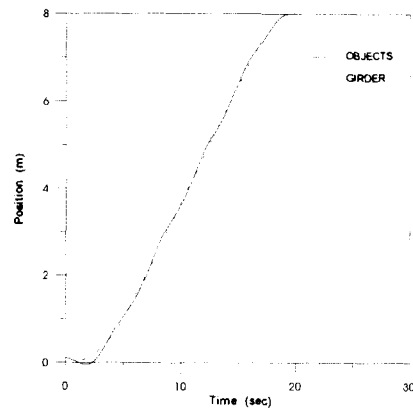
Fig. 7 Swing angle θ of objects when the initial states of object is stopped

Fig. 7은 Fig. 6에서 얻은 계산치를 화물의 흔들림 식 (18)에 대입하여 얻은 결과를 보여주는 것으로, 제어되지 않은 입력으로 이송된 크레인에서 발생된 화물의 흔들림은 모터의 구동구간에서만 뿐만 아니라 정지구간에서도 지속되고 있으므로 크레인의 화물운송시간을 지연시킬 수 있지만, 비선형 최적제어방법에서 구한 최적입력으로 이송된 크레인에서 발생된 화물의 흔들림은 모터의 구동구간에서만 지속되고, 정지구간에서 발생하지 않고 있다.

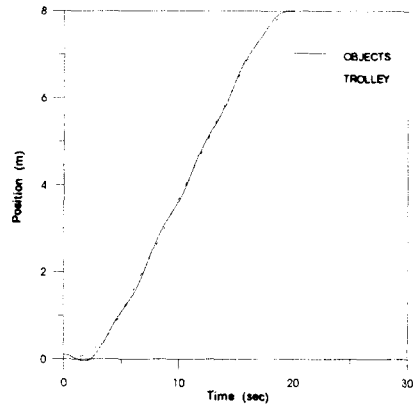
Fig. 8은 화물의 초기상태가 흔들릴 때의 결과를 보여주는 것으로, 거더, 트롤리 및 호이스트 모터의 구동구간에서 거더, 트롤리 및 줄 길이는 원활하게 움직이면서 목표위치에 도달하고 있고 정지구간에서 그 위치를 유지하고 있으며, 거더 및 트롤리의 이송방향에서 본 화물은 구동구간에서 출발 위치부근에서 짧은 시간 동안 언더슈트 현상이 발생하지만, 이 현상이 사라진 다음 거더 및 트롤리의 이송경로를 중심으로 조금씩 흔들리면서 목표위치에 도달하고 있고 정지구간에서 흔들림이 발생하지 않고 있다.

Fig. 9는 Fig. 8에서 얻은 계산치를 화물의 흔들림 식 (18)에 대입하여 얻은 결과를 보여주는 것으로, 운송초기에 화물의 흔들림이 존재하더라도 모터의 구동구간에서 화물 흔들림의 진폭이 점점 줄어들고 있으며, 정지구간에서 화물의 흔들림이 거의 발생하지 않고 있다.

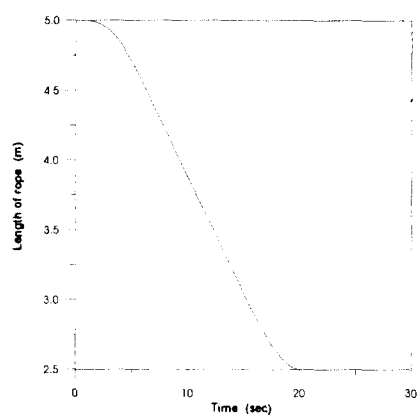
이와 같이 비선형 최적제어방법에서 구한 최적



(a) Position for girder and Y-direction of objects



(b) Position for trolley and X-direction of objects



(c) Position for the length of rope

Fig. 8 Position of overhead cranes when the initial states of object is not stopped

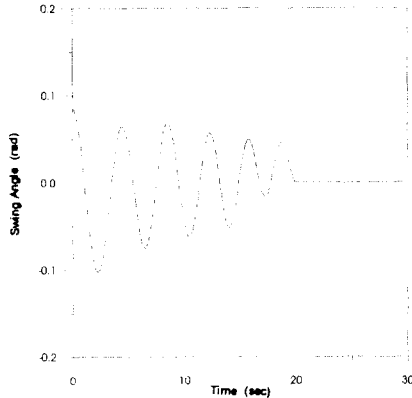


Fig. 9 Swing angle θ of objects when the initial states of object is not stopped

입력을 이용하면 화물의 초기 흔들림에 상관없이 크레인의 위치를 제어할 뿐만 아니라 화물운송시간을 지연시키는 화물의 흔들림도 억제할 수 있으므로, 본 연구에서 제안한 위치제어 알고리즘이 크레인의 화물운송작업 효율을 향상시킬 수 있음을 알 수 있다.

5. 결론

모터의 전달함수 및 뉴턴의 운동법칙으로부터 유도된 크레인의 비선형 모델을 이용하여 크레인의 위치를 제어한 결과로부터, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- (1) 화물을 질점으로 간주하고, 화물의 권상/권하의 가속도가 충분히 작을 때, 크레인의 동특성을 기술할 수 있는 크레인의 비선형 모델을 유도하였다.
- (2) 크레인의 과도상태는 모터 시상수와 이득상수만을 조정하여도 제어가 가능하므로 성능지수의 최종상태만을 적용하여 크레인의 위치를 제어할 수 있을 뿐만 아니라 화물의 흔들림도 억제할 수 있었다.
- (3) 화물의 초기 흔들림에 상관없이 본 연구에서 제안한 위치제어 알고리즘으로 크레인의 위치를 제어할 수 있을 뿐만 아니라 화물의 흔들림도 억제할 수 있었다.

참고문헌

- (1) 윤지섭, 강이석, 1995, "천정크레인의 무진동/위치 제어기 개발에 관한 연구," 대한기계학회 논문집, 제19권, 제6호, pp. 1391~1401.
- (2) 홍금식, 손성철, 1996, "크레인 진자운동의 시간최적제어에 대한 단계적 접근," 대한기계학회 춘계학술대회논문집(A), pp. 453~457.
- (3) 이호훈, 조성근, 1999, "권상/권하를 포함하는 2차원 천정크레인의 무진동 제어," 대한기계학회 논문집(A), 제23권, 제1호, pp. 22~30.
- (4) Kaneshige, A., Kitaoka, T., Munetoshi, H. and Terashima, K., 1997, "Motion Control of an Overhead Travelling Crane with Hoisting Motion and Curve Trajectory," *JSME(C)*, Vol. 63, No. 607, pp. 921~928.
- (5) Moustafa, K. A. F. and Ebeid, A. M., 1988, "Nonlinear Modeling and Control of Overhead Crane Load Sway," *ASME DSMC*, Vol. 110, pp. 266~271.
- (6) 이종규, 이상룡, 1995, "부분상태 제한제어를 이용한 비선형 천정크레인의 진자각제어," 대한기계학회논문집(A), 제21권, 제6호, pp. 907~917.
- (7) Koren, Y., 1983, "Computer Control of Manufacturing Systems," McGraw-Hill.
- (8) Sandor, B.I., 1987, "Engineering Mechanics Dynamics," Prentice-Hall.
- (9) Brogan, W. L., 1991, *Modern Control Theory*, Prentice-Hall.
- (10) 嘉納秀明, 1987, "시스템의 최적이론과 최적화," 코로나사.
- (11) 叛和正敏, 1986, "비선형시스템의 최적화," 임북출판.