

원통 내 스핀업 유동에서의 관성진동에 관한 수치해석적 연구

서 용 권

동아대학교 기계산업시스템공학부

Numerical Study on Inertial Oscillations in the Spin-up of Fluid in a Circular Cylinder

YONG KWEON SUH

School of Mechanical and Industrial System Engineering, Dong-A University, Pusan 604-714, Korea

KEY WORDS: Inertial oscillation 관성진동, Spin-up 스핀업, Circular cylinder 원통, Ekman pumping/suction 에크만 분출/흡입

ABSTRACT: In this paper we present the aspect of inertial oscillation typically observed in the spin-up of fluids at low Rossby numbers in a circular cylinder. Numerical computations for the quasi three-dimensional equation as well as the one-dimensional equation are performed to estimate the predictability of the one-dimensional equation with Ekman pumping/suction models. It is assumed that the discrepancy between the two results may be attributed to the inertial oscillation. The detailed analysis to the numerical results reveals that the axial plane is dominated by a comparatively strong oscillatory flows caused by the inertial oscillation. In view of the fact that the time-averaged flow field however agrees to the Taylor-Proudman theorem, it is recommended that further analysis is needed to obtain an improved one-dimensional model like the Reynolds-averaged Navier-Stokes equation for turbulent flows.

1. 서 론

스핀업/스핀다운(spin-up or spin-down)은 어떤 일정한 속도로 회전하고 있는 회전체의 속도를 더욱 증가/감소시키는 것을 말한다. 유체를 담고 있는 용기가 어떤 일정한 속도로 회전할 때 시간적으로 충분히 오랫동안 지나면 용기 내의 유체는 강제 회전(solid-body rotation) 상태 즉 용기에 대해 상대적으로 정지한 상태를 유지한다. 그러다가 갑자기 회전 속도를 증가/감소시키면 유체는 상대운동을 시작한다. 충분한 시간이 지나면 용기 내의 유체의 상대운동이 모두 사라지고 새로운 강제회전 상태가 된다. 유체역학에서 스핀업/스핀다운은 이 과정에서 발생하는 유체의 용기에 대한 상대운동을 말한다.

스핀업에 대한 초기 연구는 기하학적으로 가장 단순한 형태의 용기인 원형 실린더를 대상으로 수행되었으며, 유체도 성층화(stratified; 낮은 밀도의 유체가 높은 밀도의 유체 위에 놓이는 경우)되지 않은 균질 유체(homogeneous fluid)를 대상으로 하였다. 초기 연구는 주로 스핀업에 따른 유체운동의 기본 현상을 이해하기 위한 역학적 메커니즘의 규명에 초점을 맞추고 있다. Greenspan & Howard(1963)는 측면벽이 존재하지 않은 무한 평판 사이의 스핀업 문제를 연구하였다. 그들은 회전각속도의 증가 $\Delta\Omega$ 와 최종 회전각속도 Ω_0 의 비 즉 $\epsilon = \Delta\Omega/\Omega_0$ (이것을 Rossby 수라 부른다)가 1보다 매우 작은 경우에 대하여 선형해석을 통해 스핀업 시간의 크기를 예측하였다. 더욱 자세한 내용은 Greenspan(1968)의 교과서에 설명되어 있다. Wedemeyer(1964)는 Rossby 수가 $O(1)$ 인 경우의 비선형 문제에 대해 이론적인

해석을 수행하였다. 결과에 따르면, 비선형 거동에서는 선형의 기동과 달리 측면 벽에 가까운 회전 유체와 중심부의 정지 유체 사이에 불연속 전단 전선(shear discontinuity front)으로 알려진 뚜렷한 경계가 존재하며 이 경계가 2차 유동에 의해 중심부로 이동한다(여기서 2차 유동은 Ekman 경계층에서의 분출/흡입에 의해 측면벽 상에서 형성되며 상대속으로 느린 유동을 말한다). 그의 방법은 그러나 여러 가지 가정을 통하여 가능하였으며 자세한 유동의 정보에 있어서는 실험결과와 차이가 나는 것으로 밝혀졌다. 용기가 정지 상태에서부터 스핀업되는 이 기본적인 유동문제에 대한 수치해석은 Hyun *et al.*(1983)에 의해 처음 수행되었다. 그들의 해석결과는 실험결과와 잘 일치하였으며, 수치해석적 방법이 실험이나 제한된 이론해석으로는 제시하지 못하는 정보까지 제시할 수 있음을 보였다.

1990년대 이전의 스핀업에 대한 대부분의 연구는 용기의 모양이 축대칭인 경우에 대한 것이다. 10여년 전 van Heijst(1989)에 의해 시작된 비축대칭 형상의 스핀업 문제는 더욱 흥미있는 결과들을 보여주고 있다. 원통 내에 여러 가지 길이의 간막이가 있는 경우에 대한 실험 결과는 van de Konijnenberg *et al.*(1996)이, 그리고 반달 형상의 실린더에 대한 수치해석적 연구결과는 Andersson *et al.*(1992)이 발표한 바 있다. 환형 비축대칭 형상의 특징이 가장 두드러진 직사각형의 실린더에 대한 실험결과가 van Heijst *et al.*(1990)에 의해 발표되었으며 동일한 문제에 대한 수치해석적 결과가 서용권(1993)과 Suh(1994)에 의해 발표되었다. van Heijst *et al.*(1994)는 직사각형 용기의 바닥이 경사져 있는 경우에 대하여, 그리고 van de Konijnenberg & van

Heijst(1997)는 자유표면의 영향에 대하여 실험적으로 연구를 수행하였다. 직사각형 내의 스핀업 문제는 계속해서 Henderson *et al.*(1996)에 의해서도 수행되었다. 바닥이 경사진 직사각형 용기에 대해서도 실험적으로 연구되었으나(van de Konijnenberg & van Heijst, 1996, Jillians & Maxworthy, 1994), 수치해석적인 연구는 아직 이루어진 바 없다. 바닥이 경사진 문제는 소위 β -효과(Pedlosky, 1982)라 하여 실제적으로 해양유동이나 지구과학의 분야에서 중요한 의미를 가지고 있다. 최근 Suh & Heijst(2000)는 직사각형 용기 내에 원통이 설치된 경우의 문제를 실험적으로 연구하였으며 준정상 상태의 와류 형성에 미치는 원통의 영향을 보고하였다.

스핀업 유동에 관한 자세한 배경과 수식의 전개, 기본 개념 등의 설명은 Greenspan(1968)의 교재, Benton & Clark(1974) 및 Duck & Foster(2001)의 해설논문들 통해, 그리고 응용에 관한 것은 Vanyo(1993)의 저서를 통해 알아볼 수 있다.

스핀업 유동은 터보기계 유동, 인공위성 내 액체연료의 유동, 해양유동, 지구내 맨틀의 유동 등에 응용된다. 해양유동은 바람, 조석효과(tidal effect) 등에 의해 생성되는데, 그중 바람에 의한 것이 가장 크다. 이 경우 큰 스케일의 유동은 지구자전의 영향을 받으며 따라서 회전유동의 특징을 보인다. 해안에서의 용승류(coastal upwelling)는 스핀업 유동모델로 이해할 수 있는 대표적인 유동이다(Benton & Clark, 1974).

본 연구는 축대칭 형상인 원통 내의 비압축성 균질유체의 스핀업 문제를 대상으로 한다. 원통 내 균질 유체의 스핀업 문제는 1960년대부터 관심의 대상이 되어 현재까지 많은 연구가 수행되어 왔다. 그러나 이들 연구는 주로 선형이론의 타당성 확인을 위한 목적 등의 관점에서 수행되었다. 본 연구는 에크만 분출 모델의 개선을 위한 선형 연구(서용권 등, 2000, 최윤환 등, 2001)의 후속으로 생각할 수 있다. 본 유동 모델은 특히 고차 오더의 에크만 분출 모델의 유도가 이론적으로 비교적 쉽고(Hart, 1995a, 1995b, 2000) 또 에크만 경계층과 나머지 영역이 포함된 전체 유동장을 대상으로 한 수치해석이 현실적으로 가능하다는 이점을 갖고 있다.

본 연구의 목표는 위에서 설명한 바와 같이 최근 새롭게 제시되고 있는 개선된 에크만 분출 모델을 축대칭 형상 용기의 스핀업 문제에 적용하고 또 축대칭 스핀업 문제를 축대칭 3차원 해석한 결과와 비교함으로써 그 타당성을 확인하는 것이다. 더불어 두 결과의 차이를 좁힐 수 있는 한 방안으로서 관성진동의 영향을 고려한 새로운 모델의 개발을 염두에 두고 원주 방향 와류의 거동 즉 관성진동에 따른 축단면 상의 유동양상을 자세히 분석하고 이해하는 데 있다. 한편, 관성진동의 현상은 Greenspan(1968)에 의해 이론적으로 검토되었으며, Hyun *et al.*(1982)에 의해 수치해석적으로 관찰되었고, Dolzhanskii *et al.*(1992)에 의해 실험적으로 관찰되었으나 그 자세한 거동에 대해서는 전혀 보고된 바 없다.

2. 수치해석 방법

2.1 축대칭 유동의 준3차원 수치해석

Fig. 1은 스핀업 유동에 대한 기본 개념을 설명하기 위한 그림

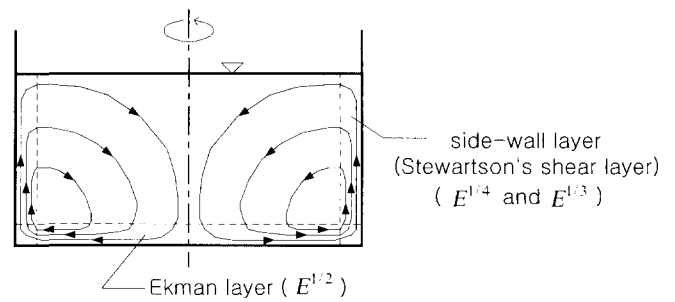


Fig. 1 Schematic drawing for formulation of the axisymmetric spin-up flow

으로서, 용기는 원형 실린더이고 바닥은 수평이다. 용기의 반경을 R 이라 두며, 수심 H 는 이것과 같은 오더(order)이라고 가정한다. 현재, 용기와 유체는 어떤 일정한 각속도 Ω_0 로 회전하는 강제운동의 상태에 있다. 그러다가 용기의 회전 각속도가 갑자기 $\Omega_0 = \Omega_0 + \Delta\Omega$ 로 증가되었다고 가정하자. 바닥과 측면 벽 근처에 있는 유체는 점성으로 인해 곧 증가된 속도를 따른다. 그러나, 용기 내 대부분의 유체는 증가된 속도를 미치지 따르지 못한다. 바닥에서 형성되는 에크만 경계층은 상부의 유체를 흡입하거나 상부에 유체를 분출한다. 이것은 그림과 같은 순환 유동을 유발하여 측면의 Stewartson layer에서 형성되기 시작하는 높은 운동량의 유체를 중심부로 이동시킨다. 이것은 결국 전체 유체의 상대운동이 0이 되는 또 다른 강제운동의 상태를 만드는데 크게 기여하여 스핀업 시간을 단축시킨다. 만약 이러한 순환 유동이 없었다면 스핀업 시간은 순전히 분자적 확산에 따른 것으로서 $O(E^{-1}/\Omega_0)$ 정도이다. 여기서 $E = \nu/H^2\Omega_0$ 는 에크만 수이다. 그러나 에크만 경계층으로부터의 분출/흡입으로 인한 순환유동을 고려한다면 스핀업 시간은 $O(E^{-1/2}/\Omega_0)$ 와 같이 감소된다.

본 연구에서는 우선 이 유동에 대한 수치해석을 수행한다. 축대칭 형상이므로 기본적으로 수치해석은 준3차원적으로 이루어진다. 본 유동에 대한 무차원 지배방정식은 원주방향 와도를 도입함으로써 아래와 같이 쓸 수 있다(자세한 유동 과정은 부록에 수록).

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} + \frac{2}{\epsilon} u = \frac{1}{Re} \Delta_2 v \quad (1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial r} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{u\zeta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^2}{\partial z} + \frac{2}{\epsilon} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{Re} \Delta_2 \zeta \quad (2)$$

$$\Delta_2 \phi = -\zeta \quad (3)$$

여기서, t 는 시간, (r, z) 는 축단면 상에서의 반경방향 및 축방향 공간 좌표, 연산자 Δ_2 은 위의 함수 ϕ 에 대해

$$\Delta_2 \phi = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad u, v, w \text{는 반경방향, 원주}$$

방향, 축방향 유속, ζ 는

$$\zeta = -\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4)$$

로 정의되는 원주방향 와도, ϕ 는

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial(r\phi)}{r\partial r} \quad (5)$$

로 정의되는 축대칭 유동함수이다. 본 유동 문제에서 무차원 파라미터는 레이놀즈 수 Re , 로스비 수 ε , 그리고 무차원 수심 h 로서 아래와 같이 정의된다.

$$Re = \frac{R^2 \Delta \Omega}{\nu}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta \Omega}{\Omega_0}, \quad h = H/R \quad (6)$$

원주방향 운동량 방정식 (1)을 위한 경계조건은 다음과 같다.

$$v = 0 \text{ on } z = 0 \text{ and } r = 0, 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \text{ on } z = h$$

원주방향 와도 방정식 (2)의 경계조건은 다음과 같다.

$$\zeta = 0 \text{ on } r = 0 \text{ and } z = h$$

$$\zeta = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \text{ on } z = 0, \quad \zeta = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \phi}{\partial r} \right) \text{ on } r = 1$$

그리고 축대칭 유동함수를 위한 방정식 (3)의 경계조건은 다음과 같다.

$$\phi = 0 \text{ on } r = 0, 1 \text{ and } z = 0, h$$

초기조건은

$$v = \mp r, \quad \zeta = 0$$

와 같으며 $-$ 부호는 스핀업, $+$ 부호는 스핀다운의 경우에 적용된다.

바닥 근처에서는 지수함수를 이용하여 더욱 조밀한 격자계를 만들어 얇은 Ekman 경계층 내의 유동을 효과적으로 처리하도록 하였다.

위 지배방정식들은 공간적으로 중심차분법에 의해 차분화하였다. 지배 방정식 (1)과 (2)는 시간적으로는 정밀도가 높고 수치적으로 안정한 4개의 Runge-Kutta법을 사용하여 적분하였으며, 타원형 방정식 (3)은 conjugate gradient 방법으로 해를 구하였다. 본 연구에서 채택한 4개의 Runge-Kutta법의 수렴성, 안정성 및 정밀도 등에 대해서는 서용권(1997)의 논문을 통해 알아 볼 수 있다.

2.2 에크만 분출/흡입 모델을 사용한 1차원 수치해석

앞의 수치해석에 덧붙여 본 연구에서는 한 차원 더 낮은 계산 방법으로서 준2차원 방법 또는 1차원 방법을 적용하여 해를 구하였다. 이 방법은 로스비 수 ε 이 충분히 작을 때 회전영역으로 바닥의 얇은 Ekman 경계층을 제외한 대부분의 영역이 수직 방향으로의 속도의 변화가 거의 없다는 Taylor-Proudman 이론에 입각한 것으로서 바닥의 Ekman 경계층 효과를 적절한 Ekman 분출/흡입(pumping/suction) 모델로 대체하는 방법이다.

바닥의 Ekman 경계층을 제외한 나머지 영역에서 식 (1)을 수

직 방향으로 평균하면 아래와 같은 원주 방향 평균속도 $V(r, t)$ 의 지배 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{UV}{r} + \frac{2}{\varepsilon} U - \frac{1}{Re} \Delta_1 V \quad (7)$$

여기서 연산자 Δ_1 은 $\Delta_1 \phi = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \phi}{\partial r} \right)$ 을 나타낸다. 수직 방향으로 평균한 반경방향 평균속도 $U(r, t)$ 는 연속 방정식과 Ekman 경계층 끝의 분출/흡입 속도 w_E 에 의해 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$U = \frac{1}{hr} \int_0^r r w_E dr \quad (8)$$

한편 Ekman 분출/흡입 속도 w_E 는 로스비 수가 충분히 작은 조건 하에서 Ekman 경계층 유동에 대한 점진적 해석을 수행함으로써 다음과 같은 1차 수정모델의 식을 유도할 수 있다(자세한 유도과정은 부록에 수록).

$$w_E = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{Re}} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \right) - \varepsilon \left(\frac{9}{80} \frac{V}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{7}{80} V \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{7}{80} \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right] \quad (9)$$

이 식에서 우변의 소괄호 내 첫 항은 축방향 와도로서 선형 에크만 모델에 해당하며, ε 이 곱해진 두 번째 항이 1차 수정모델을 위한 수정 항이다. 이 식은 Hart(2000)가 유도한 바 있는 식과 비교하여 같음을 알 수 있다(Hart의 논문에는 미분을 표현하는 항에 오차가 포함되어 있다). 식 (9) 및 (8)로 구한 U 는 원직상 측면 벽 $r=1$ 에서 0이 되도록 되어 있으나, 수치해석 상의 작은 오차들이 시간과 더불어 누적되면서 수치해석의 진만에 대한 불안정성까지 가져올 수 있음을 확인하였다. 이를 해결하기 위해서 원래의 w_E 로부터

$$\overline{w_E} = 2 \int_0^1 r w_E dr \quad (10)$$

으로 정의된 공간평균 $\overline{w_E}$ 를 매 시간 스텝마다 $\overline{w_E}$ 값을 (8)에 대입하여 U 를 구하였다.

3. 관성진동(inertial oscillation)

로스비 수가 충분히 작을 때 관성진동에 따른 시간 스케일은 스핀업 시간 스케일과 비교하여 매우 작다. 따라서 이 경우에 지배 방정식 (1), (2)는 근사적으로 아래와 같이 선형화된다.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{2}{\varepsilon} u, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{2}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial z} \quad (11)$$

여기서 점성항은 무시되었으며 작은 로스비 수의 조건 하에서 대류 항들도 무시되었다. 위 두 식으로부터 v 를 소거하면

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{4}{\varepsilon^2} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (12)$$

또는

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta \psi + \frac{4}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (13)$$

을 얻게 된다. 이 방정식의 해는

$$\psi = \exp[i(st + kz)]J_1(lr)$$

의 선형적 결합으로 표현될 수 있다. 여기서 k , l 은 각각 z -, r -방향의 파수이며 s 는 진동 각속도로서

$$s = \frac{2k}{\varepsilon \sqrt{k^2 + l^2}} \quad (14)$$

이다. 이 식으로부터 관성진동의 각속도는 k , l 이 $O(1)$ 일 때 $O(1/\varepsilon)$ 임을 알 수 있다. 또한 $l=0$ 즉 유동이 순전히 반경방향일 때(예를들면 전단유동이 반경방향으로 배열된 경우) 각속도 s 는 최대값

$$s_{\max} = \frac{2}{\varepsilon}$$

을 가지며, $k=0$ 즉 유동이 순전히 축방향일 때 $s=0$ 가 된다. 이것은 결국 Taylor-Proudman 이론과 관계 있는 것으로 이해할

수 있다. 구체적인 예로서, 순전히 반경 방향으로 흐르는 유동이면서 축방향으로 변하는 교란이 있는 경우에는 큰 각속도의 관성진동이 발생하여 교란은 빠른 시간 내에 축방향으로 분산(dispersion)되어 결국 축방향의 변화를 제거시키는 효과를 가져오게 되는 것이다. 즉 관성진동의 역할은 축방향으로 성질이 변하는 어떤 교란에 대해 그것을 재빨리 분산시키는 것으로 이해할 수 있다.

그리고 식 (12)는 반경방향 속도의 축방향 구배가 있으면 와도가 생성된다는 것을 의미한다. 이것은 와도의 생성에 관한 진동적인 사고방식의 변화를 요구한다. 즉 와도는 주로 벽면에서 점착(no-slip)조건에 의한 마찰효과로 발생하는 것으로 이해되고 있으나, 회전 유동에서는 원래부터 비점성이며 원주방향 와도가 0인 유동장인 경우에도 반경방향 속도의 축방향 구배가 존재하면 원주방향 와도는 점성과 무관하게 생성되는 것이다.

4. 결과 및 고찰

준 3차원 수치해석을 $\varepsilon=h=0.5$ 에 대해 수행하였다. $Re=10000$ 에 대해서는 201×101 의 격자계를, $Re=30000$ 에 대해서는 301×151 의 격자계를 사용하였으며 시간간격은

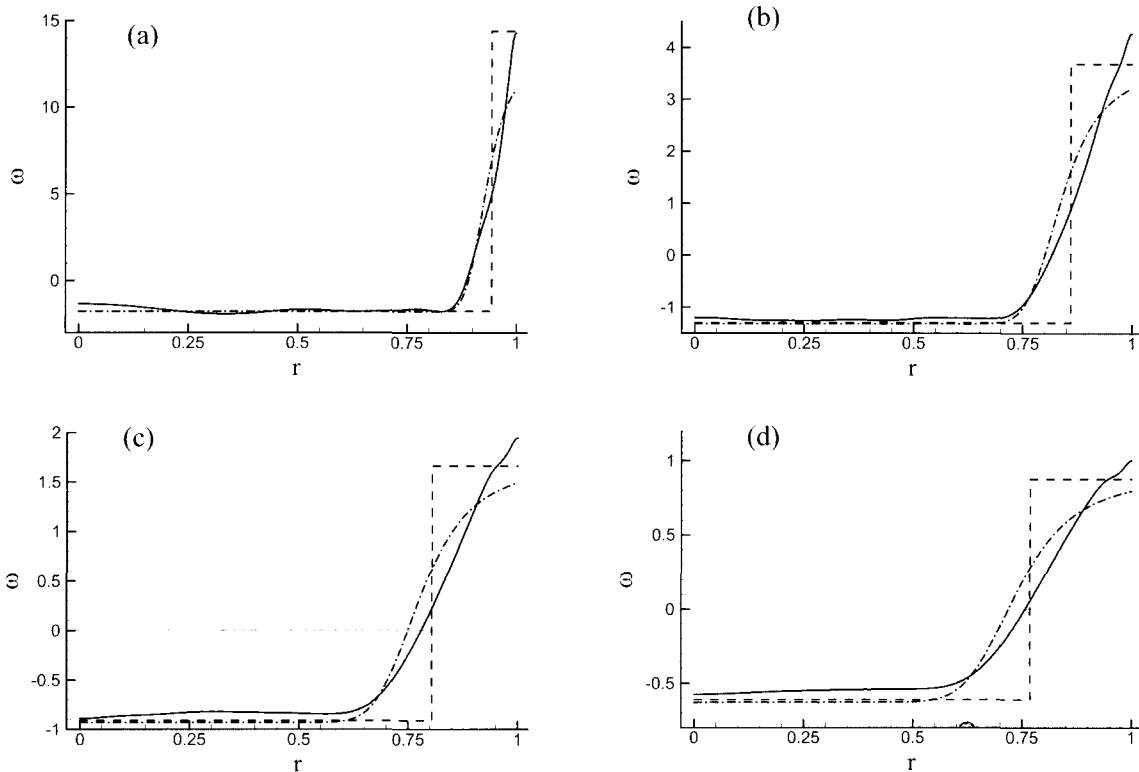


Fig. 2 Distribution of the vertical vorticity ω given by two-dimensional numerics (solid line), one-dimensional numerics (dash-dot) and Wedemeyer's solution (dashed) for $Re=30000$ and $h=\varepsilon=0.5$ at four instant of times; (a) $t=15$, (b) 45, (c) 75, (d) 105

$\Delta t = 0.01$ 로 하였다. 여기서는 $Re = 30000$ 의 결과만 제시한다.

Fig. 2는 수치해석 결과로서 축방향 와도 $\omega = \partial(rv)/r\partial r$ 를 나타낸다. 이 그림에서는 또한 식 (7)에 의한 1차원 수치해석 결과와 Wedemeyer(1964)의 이론 해석 결과도 제시되어 있다. 그림을 보면 Wedemeyer의 이론해석 결과는 불연속 전단 전선의 위치를 예측하는 데에는 유효하나 그 주위의 와도를 예측하는 데에는 상당한 오차를 보이고 있다. 이에 비해 1차원 모델은 대부분의 영역에서 준 3차원 모델의 수치해석 결과에 상당히 근접한 결과를 보여주고 있다. 그러나 전단 전선 근처에서는 여전히 차이를 보이고 있다.

1차원 모델 즉 식 (7)의 결과가 준 3차원 모델의 결과와 차이를 보이는 이유는 두 가지 측면에서 추측될 수 있다. 첫째는 Ekman 분출/흡입 모델에 사용된 w_E 가 Ekman 경계층의 지배방정식을 선형화하여 구한 해로부터 유도되었기 때문이며, 두 번째는 비점성 영역에서 관성진동이 발생하여 유동장이 축방향으로 상당한 변화를 보이기 때문이다. 첫번째 인자가 비록 실용적 있어 보이지만 작은 로스비 수의 범위에서는 그렇게 큰 영향을 미치지 않는다고 판단된다. 그 이유는 식 (9)의 우변 첫 항만을 고려한 경우(선형 모델)와 두 번째 항까지 포함시킨 경우의 1차원 해를 비교한 결과 거의 차이를 보이지 않았기 때문이다. 물론 로스비 수가 더욱 증가하면 그 영향력이 커질 것으로 예측된다. 따라서 Ekman 분출/흡입 모델의 개선과 병행하여 비점성 영역에서 발생하는 관성진동의 양상을 이해할 필요가 있다고 판단되는 것이다.

Fig. 3은 Fig. 2와 같은 조건에서 수치해석으로 구한 축단면 상의 속도벡터를 보여주고 있다. 속도 벡터의 크기는 비록 원주방향 속도의 크기 즉 $O(1)$ 에 비해 매우 작지만 이 단면에서의 유동이 결국 스핀업 시간의 단축을 가져오는 요인이 되기 때문에 중요하게 취급된다. 실제로 바닥 근처에서는 매끄러운 유속 분포의 전형적인 Ekman 경계층 유동 양상이 확인되었다. Fig. 3이 특히 구석 근처에서 수직 방향으로의 유속 변화가 격자 간격에 비하여 너무 급격한 것으로 보이는 이유는 전체 격자 수 301×151 중에서 반경 방향으로 20개씩, 축방향으로 5개씩 주기적으로 스킵(skip)하여 그렸기 때문이다.

Fig. 3을 보면 스핀업 과정의 비교적 초기 시점인 $t = 15$ 는 물론 시간이 제법 경과한 $t = 45$ 에서도 속도벡터는 축방향으로 상당한 변화를 보이고 있다. 이는 1차원 수치해석 모델의 근간이 되는 Taylor-Prodman 가설 즉 유동장이 축방향으로 거의 변화가 없다는 가설에 위배된다. 그러나 이 유동은 매우 짧은 시간 동안 빠르게 변화하며 따라서 관성진동의 양상임을 알 수 있다.

Fig. 4는 이것을 보여주기 위한 것으로서 두 지점 $(0.7, h)$ 및 $(0.7, h/2)$ 의 원주방향 속도를 시간변화에 따라 나타낸 것이다. 그림으로부터 진동주기는 대략 3 정도로 추산된다. 한편 식 (14)에서 $k=1$ 로 가정하면 각속도 s 는 $\sqrt{2}/\epsilon$ 가 되며 따라서 $\epsilon = 0.5$ 의 경우 진동주기는 약 2.2로 주어지므로 수치해석 결과와 크게 다르지 않다. 한편 같은 파라미터 조건에서 무차원 스핀업 시간 $O(E^{-1/3})$ 은 약 87로 계산된다.

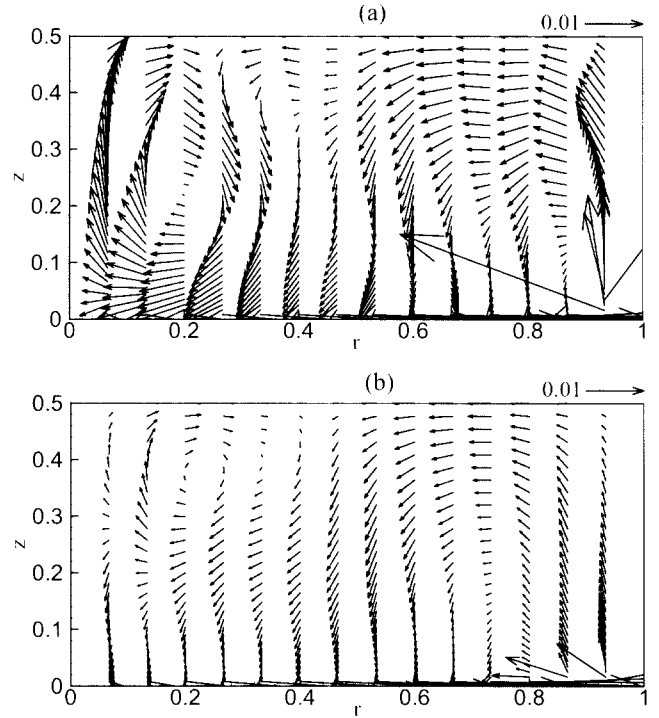


Fig. 3 Velocity vectors computed by two-dimensional numerics for the same parameter set as Fig. 2. (a) $t = 15$, (b) 45

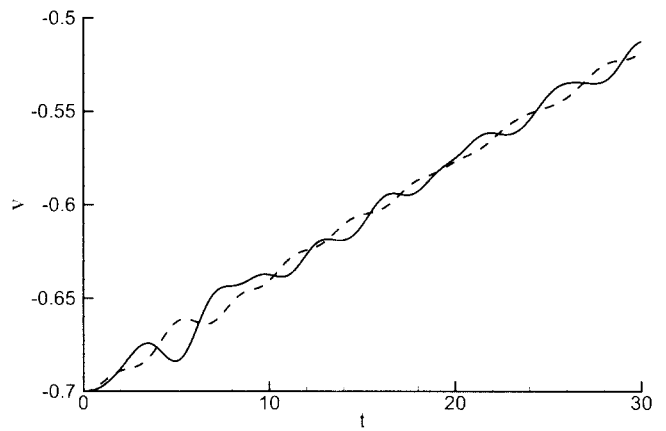


Fig. 4 History of the azimuthal velocity v at $r=0.7$ and at $z=h$ (the free surface, solid line) and at $z=h/2$ (dashed) given by two-dimensional numerics for the same parameter set as Fig. 2

Fig. 5는 $t=30$ 이전의 2π 시간 동안(즉 관성진동의 약 2~3 주기 동안) 속도장을 평균한 것으로서 앞의 Fig. 2와 달리 반경 방향 속도성분은 축방향으로 거의 균일한 분포를 보이며 축방향 속도성분은 자유표면에서 아래로 내려감에 따라 선형적으로 증가한다. 이것은 결국 Taylor-Prodman 가설, 나아가 1차원 유동모델의 타당성을 뒷받침하는 것이다. 이로부터 우리는 다음과 같은 새로운 사실을 깨닫게 된다. 즉 관성진동의 특징이 크게 영향을 미치는 짧은 시간 스케일에서는 Taylor-Proudman 가설이

성립되지 않고 따라서 1차원 유동모델이 타당하지 않지만 그 보다 충분히 긴 시간 스케일(또는 스핀업 시간 스케일)에서는 Taylor-Proudman 가설이 성립되고 따라서 1차원 모델이 타당하다는 것이다.

위 결과들이 의미하는 바는, 식 (1)로부터 식 (7)을 더욱 엄밀하게 유도하기 위해서는 식 (1)을 축방향으로 공간평균화 뿐만 아니라 관성진동의 시간 스케일동안 시간적으로도 평균화할 필요가 있다는 것이다. 식 (1)을 이렇게 시간평균하면 비선형 항들 때문에 식 (7)에 추가되는 항들이 나타나며, 이것은 난류의 수직화 과정에서 나타나는 레이놀즈 응력 항과 유사하다. 문제는, 이 항들이 다른 항들에 비해서 스핀업 시간 스케일의 유동에 얼마나 큰 영향을 줄 것인가에 있다. 따라서 식 (7)의 개선을 위해서는 앞으로 이같은 수직화 작업이 필요하며 더불어 유도된 수식에 나타날 추가 항들의 영향을 심도있게 연구할 필요가 있다.

Fig. 6은 앞의 Fig. 2와 같은 조건에서 수치해석한 결과로서 스핀업의 초기과정에서 얻은 측면면 상에서의 유선 및 와도 분포를 보여주고 있다. 초기에($t=2$) 바닥과 측면이 만나는 구석 근처에서 + 와도로 이루어진 시계방향의 와류가 형성됨을 알 수 있는데, 이는 바닥에서의 Ekman 경계층으로부터 와도가 지속적으로 공급되고 그것이 구석 근처에서 말려지면서(roll-up) 발생한 것으로 유추할 수 있다. 측면 벽 바깥의 가상적인 이미지 와류(image vortex)의 영향으로 그리고 Ekman 경계층으로부터의 지속적인 유체분출로 인해 이 와류는 측면 벽을 따라 상승한다($t=3$). 이에 따라 와류의 좌하측 유체는 일단 와류 쪽 즉 우측으로 갔다가 다시 방향을 바꾸어 좌측으로 돌아서 내려가고 결국 Ekman 경계층에 흡수되는 모양의 유선을 보인다($t=3$). 그러면 와류 가까이 좌하 지역(즉 $t=2$ 에서 $r=0.9$, $z=0.1$ 근처)에서는 $\partial u/\partial z$ 가 음이 되고 식 (12)에 의해 이것은 음의 와도를 생성한다. 이로부터 $t=3$ 때에 이 지역에서 음의 와도로 이루어진 와류가 생기기 시작하는 이유를 이해할 수 있다. $t=5$ 때에 (0.6, 0.3)에 중심을 둔 + 와류도 이와 같은 이치로 그 생성을 이해할 수 있다. 시간이 지나면 이 와류들은 측면 벽 쪽으로 나아가면서 상승한다. Fig. 6과 같은 스핀업의 초기단계에서 유체는 Ekman 경계층을 제외한 대부분의 비점성 영역에서 시간평균적으로 중심 축을 향해 나아가지만 관성진동에 따른

파들은 이와 같이 측면 벽을 향해 나아간다.

Fig. 6에서 확인한 와류의 생성이 순전히 비점성 과정에 의한 것임을 확인하기 위해 다른 조건은 모두 앞과 같이 하고 다만 측면 및 바닥에서의 경계조건으로서 유체가 미끄러질 수 있다는 조건을 설정하여 수치해석한 결과가 Fig. 7이다. 초기에 스핀업을 위한 원주 방향 속도 $v=-r$ 외에, (0.5, $h/2$)의 지점에 반경이 0.05 이고 +1의 와도가 균일하게 분포된 원형 와도물체를 위치시켰다. 시간 $t=2$ 때에 이 와류는 곧 상하로 분리되고 와류의 중심은 음의 와도로 채워진다. 동시에 주위의 네 곳에서도 음의 와도가 생겨나서 전체적으로 H 모양의 음의 와도물체를 볼 수 있다. 그러나 이 와도 물체는 다시 상하로 밀려나고 네 잎 클로버 모양의 양의 와도 물체가 자리잡고($t=4$) 이같은 과정이 계속 반복된다. 처음에 와도 물체들은 길쭉한 모양을 주로 보이지만 나중에는 원형을 이루게 된다($t=8$). 이것은 네 개의 경계에서 파들이 반사되었기 때문인 것으로 판단된다. 한편, 초기 $t=0$ 때의 강한 와류는 $t=8$ 에서 상당히 약화된 것을 볼 수 있다. 이것은 축방향으로의 불균일 유동이 관성진동에 의해 빠른 시간 내에 주위로 분산되고 결국 점성작용에 의해 그것이 쇠퇴해가는 것을 의미하며, 로스비 수가 작은 회전유동에서 국부적으로 발생한 교란이 어떻게 다시 축방향으로의 균일한 유동양상(Taylor-Proudman 이론)으로 변화되어 가는지를 설명하는 미커니즘이 된다.

5. 결 론

원통 용기 내의 스핀업 유동을 준 3차원적으로 수치해석한 결과는 Ekman 분출/흡입 모델을 사용한 1차원 수치해석 결과와 비교적 잘 일치한다. 그러나 특히 전단 전선과 측면 벽 사이의 지역에서 나타난 두 결과의 차이는 관성진동의 특성을 잘 이해함으로써 좁혀질 수 있을 것으로 예측되었다. 준 3차원 수치해석의 결과를 분석한 바에 의하면 측면면 상에서의 속도장은 상당한 진동의 양상을 보이며 그 진동주기가 선형화된 지배 방정식의 해석 결과와 대체로 일치하므로 관성진동에 의한 것으로 확인되었다. 그리고 수치해석 결과를 관성진동 주기의 2~3배에 해당하는 시간만큼 평균한 결과는 Taylor-Proudman 이론을 뒷받침하는 속도분포를 보인다는 것을 확인하였다. 이로부터 원래의 유동장이 스핀업 시간 스케일로 특징지워지는 성분과 관성진동 시간 스케일로 특징지워지는 성분으로 나눌 수 있고 나아가 난류 모델링과 같은 방법으로 적절히 모델링할 수 있음이 예측되었다. 관성진동과 관련한 와도의 생성이 비점성적임을 확인하기 위해 바닥과 측면 벽에서 미끄러짐 조건을 허용하고 수치해석한 결과 과연 와도는 경계의 마찰과 무관하게 내부에서 생성된다는 것을 확인할 수 있었다. 그리고 초기의 작은 와도 물체는 빠른 시간 내에 사방으로 분산되었고, 이로부터 수직 방향으로 변화하는 교란이 있다면 이것은 관성진동의 작용에 의해 빠른 시간 내에 분산·쇠퇴하고, 회전유동의 특성(즉 유동장이 축방향으로 변하지 않는 성질)이 다시 유지된다는 것을 이해할 수 있었다.

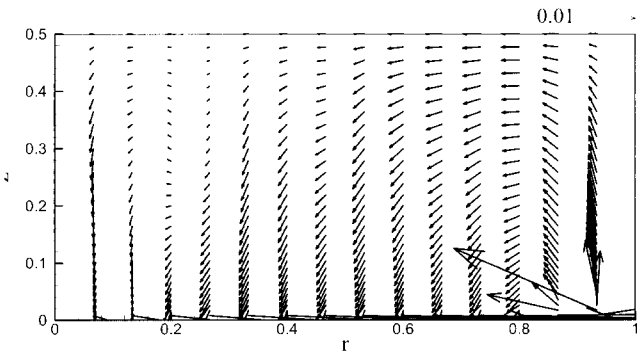


Fig. 5 Velocity vectors averaged for $30 - 2\pi \leq t \leq 30$ given by two-dimensional numerics for the same parameter set as Fig. 2

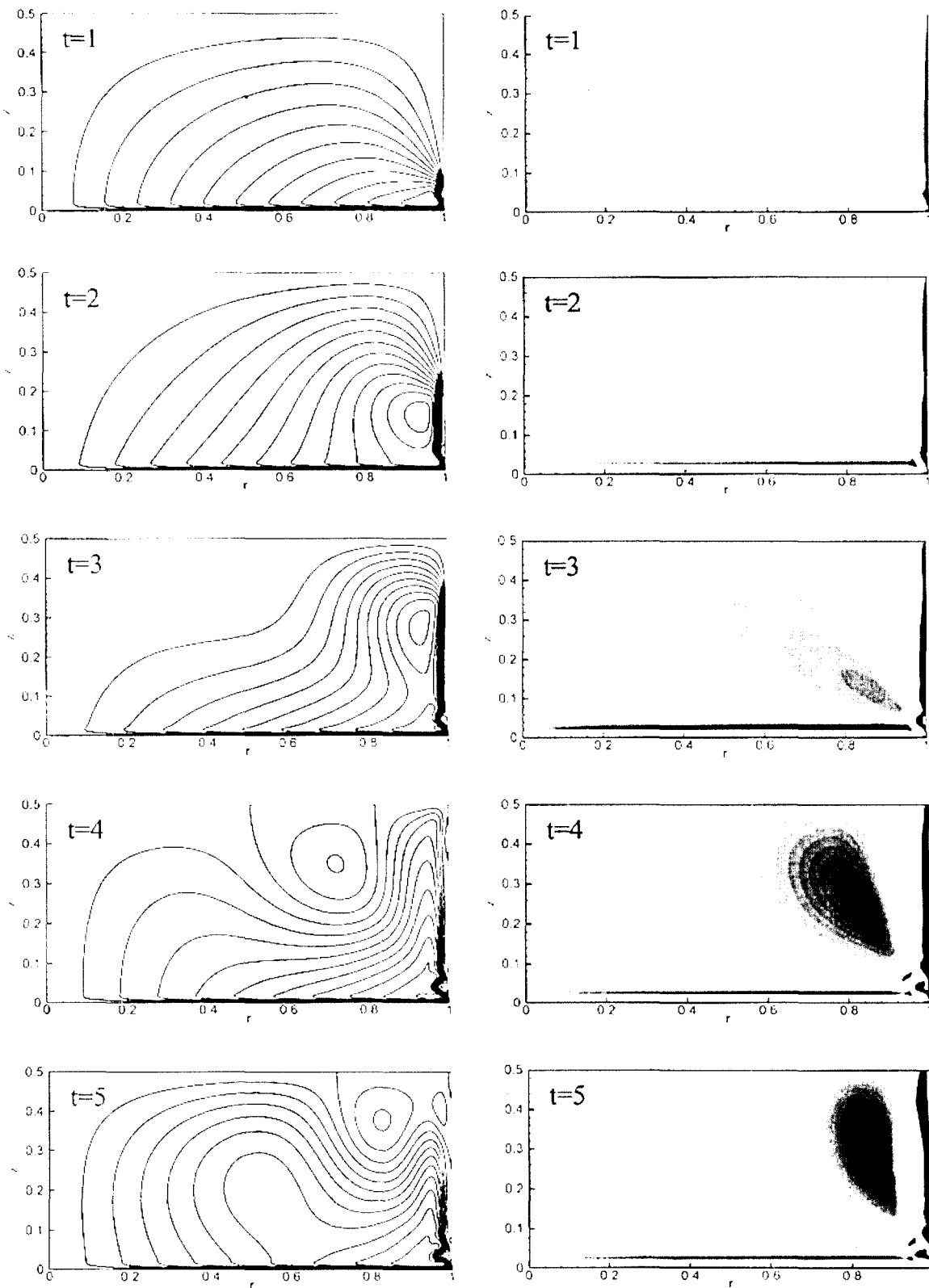


Fig. 6 Streamlines (left) and vorticity countours (right) obtained by two-dimensional numerics for the same parameter set as Fig. 2. Increment of stream functions is 0.0002, and the vorticity is colored white for the value greater than 0.2 and black for lower than -0.2

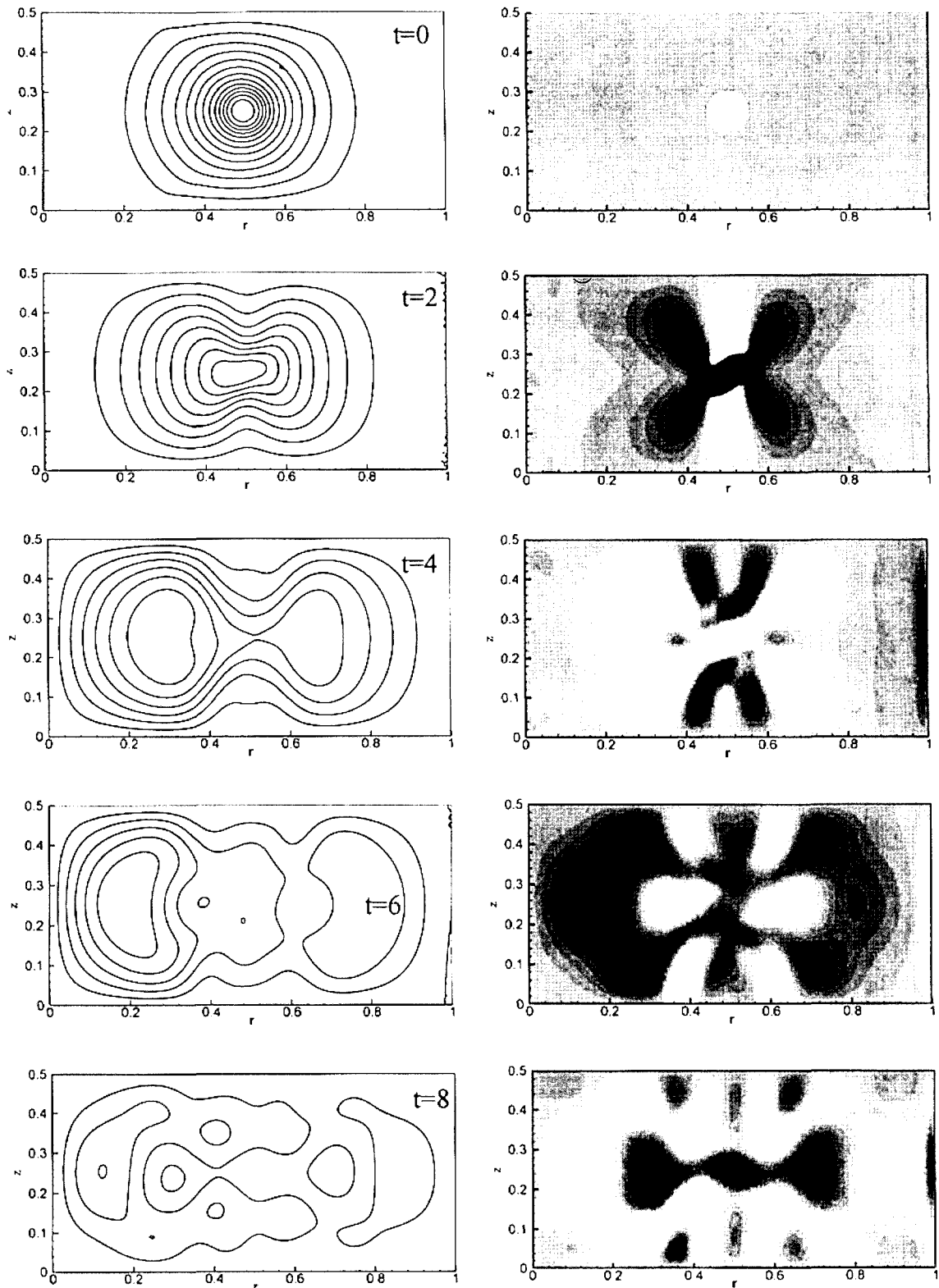


Fig. 7 Streamlines (left) and vorticity contours (right) obtained by two-dimensional numerics for the same parameter set as Fig. 2. Increment of stream functions is 0.0002, and the vorticity is colored white for the value greater than 0.2 and black for lower than -0.2. Initially the azimuthal velocity is specified and a circular vortex patch with uniform vorticity resides at the center point

감사의 글

본 연구는 2001학년도 동아대학교 교내 학술연구비(공모과제) 지원에 의하여 수행되었음.

참고 문헌

서용권(1993). "직사각형 내부에서의 2차원 스핀업", 대한기계학회논문집, 제17권, 제7호, pp 1805 ~ 1812.

서용권(1997). "비정상 Navier-Stokes 방정식의 수치해석을 위한 다단계 외계법의 성능 비교", 대한기계학회논문집(B), 제21권, 제2호, pp 202 ~ 212.

서용권, 최유환, 김성관, 이두연(2000). "PIV를 이용한 비방회전 하에서 회전요동하는 직사각형 용기내의 유동해석", 대한기계학회논문집(B), 제24권, 제6호, pp 845 ~ 851.

최유환, 박준관, 서용권(2001). "직사각형 용기내의 스핀업 유동을 위한 수치해석적 및 실험적 연구", 대한기계학회논문집 (B), 제23권, 제5호, pp 680 ~ 687.

Andersson, H.I., Billdal, J.T. and van Heijst, G.J.F.(1992) "Spin-up in a semicircular cylinder", *Int. J. Num. Methods Fluids*, Vol. 15, pp 503 ~ 524.

Benton, E.R. and Clark, Jr., A.(1974). "Spin-up", *Annu Rev. Fluid Mech.*, Vol. 6, pp 257 ~ 280.

Dolzanskii, F.V., Krymov, V.A. and Manin, D.Yu.(1992). "Self-similar spin-up and spin-down in a cylinder of small ratio of height to diameter", *J. Fluid Mech.*, Vol. 234, pp 473 ~ 486.

Duck, P.W. and Foster, M.R.(2001). "Spin-up of homogeneous and stratified fluids", *Annu Rev. Fluid Mech.*, Vol. 33, pp 231 ~ 263.

Greenspan, H.P.(1968). *The Theory of Rotating Fluids*, Cambridge University Press.

Greenspan, H.P. and Howard, L.N.(1963). "On a time dependent motion of a rotating fluid", *J. Fluid Mech.*, Vol. 17, pp 385 ~ 404.

Hart, J.(1995a). "Nonlinear Ekman suction and ageostrophic effects in rapidly rotating flows", *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, Vol. 79, pp 201 ~ 222.

Hart, J.(1995b). "Nonlinear Ekman surface-layer pumping", *J. Phys. Oceanography*, Vol. 26, pp 1370 ~ 1374.

Hart, J.(2000). "A note on nonlinear corrections to the Ekman layer pumping velocity", *Phys. Fluids*, Vol. 12, No. 1, pp 131 ~ 135.

Henderson, D.M., Lopez, J.M. and Stewart, D.L.(1996). "Vortex evolution in non-axisymmetric impulsive spin-up from rest", *J. Fluid Mech.*, Vol. 324, pp 109 ~ 134.

Hyun, J.M., Fowles, W.W. and Warn-Varnas, A.(1982). "Numerical solutions for the spin-up of a stratified fluid", *J. Fluid Mech.*, Vol. 117, pp 71 ~ 90.

Hyun, J.M., Leslie, F., Fowles, W.W. and Warn-Varnas, A.(1983). "Numerical solutions for spin-up from rest in a cylinder", *J. Fluid Mech.*, Vol. 127, pp 263 ~ 281.

Jillians, W.J. and Maxworthy, T.(1994). "Experiments on spin-up and spin-down on a β -plane", *J. Fluid Mech.*, Vol. 271, pp 153 ~ 172.

Pedlosky, J.(1982). *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag.

Suh, Y.K.(1994). "Numerical study on two-dimensional spin-up in a rectangle", *Phys. Fluids*, Vol. 6, No. 7, pp 2333 ~ 2344.

Suh, Y.K. and van Heijst, G.J.F.(2000). "Spin-up in a rectangular container with an internal cylindrical obstacle", *Phys. Fluids*, Vol. 12, No. 8, pp 1986 ~ 1996.

van de Konijnenberg, J.A. and van Heijst, G.J.F.(1996). "Spin-up in a rectangular tank with a discontinuous topography", *Phys. Fluids*, Vol. 8, No. 11, pp 2943 ~ 2952.

van de Konijnenberg, J.A., Wessels, T.L. and van Heijst, G.J.F.(1996). "Spin-up in a circular tank with a radial barrier", *Phys. Fluids*, Vol. 8, No. 8, pp 2048 ~ 2059.

van de Konijnenberg, J.A. and van Heijst, G.J.F.(1997). "Free-surface effects on spin-up in a rectangular tank", *J. Fluid Mech.*, Vol. 334, pp 189 ~ 210.

van Heijst, G.J.F.(1989). "Spin-up phenomena in non-axisymmetric containers", *J. Fluid Mech.*, Vol. 206, pp 171 ~ 191.

van Heijst, G.J.F., Davies, P.A. and Davis, R.G.(1990). "Spin-up in a rectangular container", *Phys. Fluids A2*, No. 2, pp 150 ~ 159.

van Heijst, G.J.F., Maas, L.R.M. and Williams, C.W.M.(1994). "The spin-up of fluid in a rectangular container with a sloping bottom", *J. Fluid Mech.*, Vol. 265, pp 125 ~ 159.

Vanyo, J.P.(1993). *Rotating Fluids in Engineering and Science*, Butterworth-Heinemann.

Wedemeyer, E.H.(1964). "The unsteady flow within a spinning cylinder", *J. Fluid Mech.*, Vol. 20, pp 383 ~ 399.

2001년 6월 14일 원고 접수

2001년 8월 7일 수정본 채택

부 록

1. 식 (1) 및 (2)의 유도과정

비압축성 축대칭 유동의 지배 방정식을 일정한 각속도 Ω_0 로 회전하는 원통 좌표계 (r^*, z^*) 를 사용하여 나타내면 아래와 같다.

$$\frac{\partial u^*}{\partial r^*} + \frac{u^*}{r^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \tag{A1}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \frac{v^{*2}}{r^*} - 2\Omega_0 v^* = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \nu \nabla_{\perp}^2 u^* \tag{A2}$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{u^* v^*}{r^*} + 2\Omega_0 u^* = \nu \Delta^* v^* \quad (\text{A3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + \nu \left[\Delta^* w^* + \frac{w^*}{r^{*2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

여기서 상첨자 *는 유차원 변수를 나타내며, ρ 와 ν 는 각각 유체의 밀도와 동점성계수를 나타낸다. 그리고 다른 기호들은 본문에서 설명한 바와 같다. 우선, 대표 시간을 $1/\Delta\Omega$, 대표 길이 R , 대표 속도를 $R\Delta\Omega$, 대표 압력을 $\rho R^2 \Omega_0 \Delta\Omega$ 로 하여 위 방정식들을 무차원화 시킨다. 그러면 식 (A3)는 곧바로 본문의 식 (1)이 된다.

다음으로, 식 (A4)의 무차원 형태를 r 에 대해 미분하고 그 결과를 식 (A3)의 무차원 형태를 z 에 대해 미분한 것으로 빼준 뒤 식 (A1)과 와도의 정의 (4)를 적용하면 식 (2)가 얻어진다.

2. 식 (9)의 유도과정

우선 전체 유동장을 Ekman 경계층과 그 외의 지역 즉 상층 (upper layer)으로 나눈다. 축대칭 스핀업 과정에서 상층의 유동은 거의 원주방향이며 그 무차원 지배 방정식은 식 (7)과 같다. 한편, Ekman 경계층 내에서는 반경방향 유속 $u(r, z)$ 와 원주방향 유속 $v(r, z)$ 가 같은 크기의 오더를 가지며 무차원 지배식은 아래와 같다.

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial \xi} = 0 \quad (\text{A5})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2v = \\ 2V + \varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \dot{w} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{v^2}{r} + \frac{V^2}{r} - \frac{1}{Re} \Delta_1 u \right] \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2u = \\ \varepsilon \left[\frac{\partial(v-V)}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \dot{w} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{uv}{r} - \frac{1}{Re} \Delta_1 (v-V) \right] \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

여기서, ξ 와 \dot{w} 는 각각

$$\xi = \frac{z}{\sqrt{\varepsilon/Re}}, \quad \dot{w} = \frac{w}{\sqrt{\varepsilon/Re}}$$

와 같이 정의된 것이다. 식 (A6)의 유도에서 압력항 $\partial p/\partial r$ 은 상층의 $\partial p/\partial r$ 과 동일하며 또한 이것은 상층의 코리올리스 항 $2V/\varepsilon$ 과 원심력 항 V^2/r 의 합과 균형을 이룬다는 가정 하에서 이것들로 교체되었다.

작은 파라미터 ε 에 근거한 섭동법을 사용하기 위해 유속 성

분들을

$$(u, v, \dot{w}) = (u_0, v_0, \dot{w}_0) + \varepsilon(u_1, v_1, \dot{w}_1) + \dots \quad (\text{A8})$$

로 전개한 뒤 (A6), (A7)에 대입하고 ε 의 같은 차수끼리 모으면 $u_k, v_k (k=0, 1, \dots)$ 를 위한 $O(1), O(\varepsilon), \dots$ 의 방정식들을 얻을 수 있다. 각 방정식들로부터 해가 구해지면 식 (A5)에 대입한 뒤 적분함으로써 Ekman 분출속도

$$\begin{aligned} w_E = w_{E0} + \varepsilon w_{E1} + \dots = \\ \sqrt{\varepsilon/Re} \left[\dot{w}_0(r, \infty) + \varepsilon \dot{w}_1(r, \infty) + \dots \right] \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

의 각 항을 구할 수 있으며, $u_k(r, \xi)$ 로부터 $w_{Ek}(r)$ 을 구하는 식은 다음과 같다.

$$w_{Ek} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \int_0^\infty u_k(r, \xi) d\xi \quad (\text{A10})$$

먼저, (A6) 및 (A7)의 $O(1)$ 의 방정식을 풀어서 해를 구하면,

$$u_0 = -V(r) \exp(-\xi) \sin \xi \quad (\text{A11})$$

$$v_0 = V(r)(1 - \exp(-\xi) \cos \xi) \quad (\text{A12})$$

이 된다. 이 결과를 식 (A10)에 대입하면 잘 알려진 선두오더의 Ekman 분출속도

$$w_{E0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{Re}} \left(\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \right) \quad (\text{A13})$$

을 얻을 수 있다.

다음, 식 (A11)과 (A12)를 (A6), (A7)의 $O(\varepsilon)$ 의 식에 대입하고 해 u_1, v_1 을 구한 뒤 그 결과를 (A10)에 대입하면 Ekman 분출속도를 위한 1차 수정 w_{E1} 을 구할 수 있다. 중간 결과로서 A(10)의 우변 적분 형태는 다음과 같이 된다.

$$\int_0^\infty u_1 d\xi = \frac{1}{8} \left(\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{Re} \Delta_1 V \right) + \frac{7}{80} V \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{80} \frac{V^2}{r} \quad (\text{A14})$$

여기서 우변의 첫 항은 무시된다. 그 이유는 다음과 같다.

우선 식 (A14)의 우변 첫 항의 괄호 내는 상층의 식 (7)에 의해

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{Re} \Delta_1 V = U \left(\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \right) + \frac{2U}{\varepsilon} \quad (\text{A15})$$

의 우변으로 교체할 수 있다. 한편, 상층의 반경방향 속도성분 U 는 식 (8)과 선두 오더의 식 (A13)에 의해 $O(\sqrt{\varepsilon/Re})$ 의 크기를 가진다. 따라서, 식 (A15)의 우변 첫 항은 (A14)의 우변 둘째 및 셋째 항에 비해 무시될 수 있다. 식 (A15)의 우변 둘째 항은

$$\frac{2U}{\varepsilon} = O(1/\sqrt{\varepsilon Re})$$

의 크기를 가진다. 따라서 이 항도

$$\epsilon Re \gg 1 \tag{A16}$$

의 조건 하에서 무시될 수 있다. 본 연구에서 위 조건은 충분히 만족된다.

이에 따라 (A14)는 결국

$$\int_0^\infty u_1 d\xi = \frac{7}{80} V \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{80} \frac{V^2}{r} \tag{A17}$$

와 같이 단순화된다. 이 결과를 (A10)에 대입하면,

$$w_E = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{Re}} \left(\frac{9}{80} \frac{V}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{7}{80} V \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{7}{80} \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} \right)$$

(A18)

을 얻고, 이것이 Ekman 분출속도의 1차 수정에 해당한다.

식 (A13)과 (A18)을 (A9)에 대입함으로써 본문의 식 (9)를 얻을 수 있게 된다.