

# 연속성을 갖는 탄성지반 위에 놓인 곡선부재의 자유진동

## Free Vibrations of Curved Members Resting on Elastic Foundation with Continuity Effect

이 병 구\*                      박 광 규\*\*                      오 상 진\*\*\*                      진 태 기\*\*\*\*  
Lee, Byoung-Koo              Park, Kwang-Kyou              Oh, Sang-Jin              Jin, Tae-Ki  
(논문접수일 : 2001년 4월 20일 ; 심사종료일 : 2001년 8월 14일)

### 요 지

이 논문은 연속성을 갖는 탄성지반 위에 놓인 곡선부재의 자유진동에 관한 연구이다. 연속성을 갖는 탄성지반을 Pasternak 지반으로 모형화하여 곡선부재의 자유진동을 지배하는 무차원 상비분방정식을 유도하였다. 상비분방정식에는 회전관성과 전단변형효과를 고려하였다. 곡선부재의 선형은 원호형, 포물선형, 정현형, 타원형의 4가지를 채택하였고, 단부조건으로는 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정의 3가지를 채택하였다. 실험실 규모의 실험을 실시하고 본 연구의 결과와 비교하여 연구의 타당성을 검증하였다. 수치해석의 결과로 무차원 고유진동수와 곡선부재의 변수들 사이의 관계를 표 및 그림에 나타내었으며 진동형의 예를 그림에 나타내었다.

**핵심용어** : 연속성, 곡선부재, 자유진동, Pasternak 지반, 전단층, 진동형, 고유진동수

### Abstract

This paper deals with the free vibrations of horizontally curved members resting on elastic foundations with continuity effect. Taking into account the effects of rotatory inertia and shear deformation, differential equations governing the free vibrations of such beams are derived, in which the Pasternak foundation model is considered as the elastic foundation with continuity effect. The differential equations are solved numerically to calculate natural frequencies and mode shapes. The experiments were performed in which the natural frequencies of such curved beams in laboratorial scale were measured and these results agree quite well with the present numerical studies. In numerical examples, the circular, parabolic, sinusoidal and elliptic curved members with the hinged-hinged, hinged-clamped and clamped-clamped end constraints are considered. The parametric studies are conducted and the lowest four frequency parameters are reported in tables and figures as the non-dimensional forms. Also the typical mode shapes are presented.

**Keywords** : continuity, curved member, free vibration, pasternak foundation, shear layer, mode shape, natural frequency

\* 정회원 · 원광대학교 토목환경공학과, 교수  
\*\* 정회원 · 대전대학교 토목공학과, 교수  
\*\* 정회원 · 담양대학 토목공학과, 조교수  
\*\* 학생회원 · 원광대학교 대학원, 박사과정

• 이 논문에 대한 토론회를 2001년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2002년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

### 1. 서 론

지반 위에 놓인 구조물의 거동특성 규명은 구조공학, 기초공학 및 진동제어분야에서 중요한 연구대상으로 취급되어 이와 관련된 많은 연구가 수행되고 있다. 지반-구조물 상호작용과 관련된 많은 문제들은 탄성지반 위에 놓인 보로 모형화될 수 있으며, 이에 대한 가장 실제적인 예로서는 철도궤도, 파이프라인 및 띠 기초 등을 들 수 있다.

최근까지 여러 가지 조건을 갖는 탄성지반 위에 놓인 보의 정·동적 거동에 관한 연구<sup>1)~8)</sup>가 활발히 이루어지고 있지만, 이들 연구들에서 다루어지고 있는 대상 구조는 대부분 직선 부재이다. 실제 구조인 철도궤도 및 파이프라인 등에는 곡선부재가 존재하며, 원형 띠 기초, 유체 저장조 등은 주요 구조물의 기초로서 이용되고 있어<sup>9)</sup> 탄성지반 위에 놓인 곡선부재의 거동특성에 대한 활발한 연구가 수행되어 많은 설계자료가 제시되어야 한다. Laura와 Maurizi<sup>10)</sup>가 고찰한 바와 같이 지반 위에 놓인 곡선부재에 대한 유용한 연구결과들이 매우 부족한 실정이다. 탄성지반 위에 놓인 곡선부재의 자유진동에 관한 연구는 구조 동역학 분야에서 기초적인 연구일 뿐만 아니라 곡선부재를 이용한 토목구조물의 설계자료를 제공할 수 있는 실질적인 연구이다.

공학에서 지반 위에 놓인 구조물의 거동해석에 주로 이용되고 있는 지반모형은 1867년 Winkler<sup>11)</sup>가 제안한 Winkler 지반모형이다. 이 모형은 무한개의 독립적인 스프링으로 지반을 표현한 가장 간단한 모형이지만, 비교적 이론전개에 용이하기 때문에 많은 지반 문제들에서 이용되고 있다. Winkler 모형은 독립적인 스프링으로 구성되어 있기 때문에 Fig. 1(a)에 나타낸 바와 같이 하중 작용점의 처짐이 인접한 지역의 처짐에 영향을 미치지 못하는 단점이 있다. 이러한 Winkler 모형의 문제점을 보완하기 위한 시도 즉 지반의 연속성(foundation continuity)을 고려하기 위하여 Pasternak가 두 개의 인자로 표현하는 지반모형(two-parameter foundation)을 제안하였다.<sup>12)</sup> Pasternak 모형은 Fig. 1(b)에 나타낸 바와 같이 Winkler 모형의 스프링에 전단층을 연결하여 연속성을 고려한 보다 합리적인 모형이다.

이와 같은 연구배경으로 본 연구에서는 연속성을 갖는 탄성지반 위에 놓인 곡선부재의 면외 자유진동에 대한 수학적 모형을 전개하고, 해석모형으로부터 고유진동

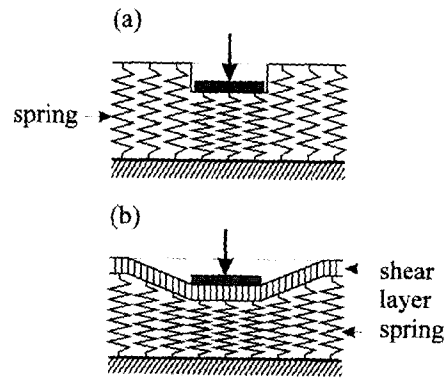


Fig. 1 (a) Winkler foundation and (b) Foundation with continuity effect

수 및 진동형을 산출할 수 있는 알고리즘을 개발한다. 본 연구와 실험의 결과를 비교하여 본 연구방법의 타당성을 검증하고, 실제적인 공학문제에서 필요한 다양한 선형 및 단부조건에 따른 진동특성을 고찰한다.

### 2. 수학적 모형

Fig. 2는 연속성을 갖는 탄성지반 위에 놓인 지간길이  $l$ , 수평높이  $h$ ,  $y=y(x)$ 의 임의선형을 갖는 곡선부재의 기하학적 형상을 나타낸다. 이 곡선부재가 자유진동하면 점선으로 표시된 진동형을 갖는 동적 변위를 갖게 된다. 이 그림에서  $(x, y)$ 는 곡선부재의 좌단을 원점으로 하는 직교좌표계이며,  $\rho$  및  $\theta$ 는 부재축상의 임의점에서 곡률반경 및  $x$ 축과 곡률중심방향이 이루는 각도이며,  $\psi$ ,  $\Psi$ ,  $\beta$  및  $\phi$ 는 각각 수직 방향 변위, 휨에 의한 단면 회전각, 전단에 의한 회전각 및 비틀림각이다. 한편  $R_s$ 와  $R_r$ 는 지반반력 성분으로 각각 단위

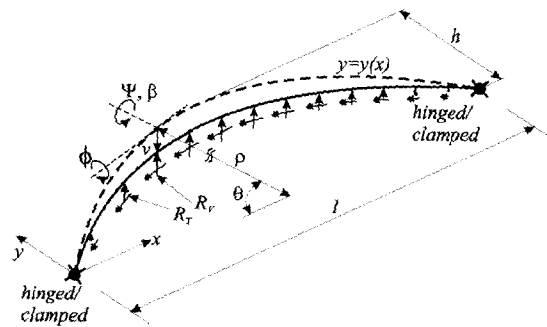


Fig. 2 Curved beam resting on foundation and its variables

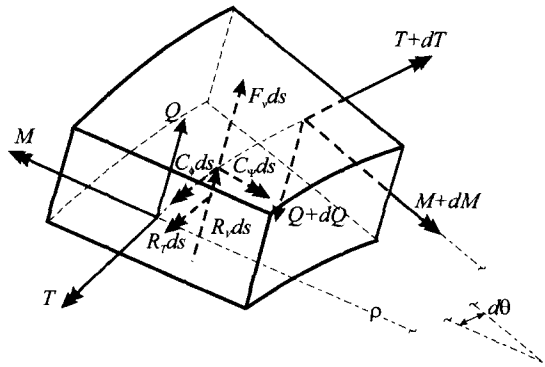


Fig. 3 Stress resultants, inertia forces and restoring forces on an element of curved member

길이당 수직반력과 비틀림반력이다. 이 논문에서는 휨과 전단에 의한 단면 회전각  $\psi$ 와  $\beta$ 를 수학적 모형에 고려함으로써 지배미분방정식에 회전관성과 전단변형효과를 포함한다.

Fig. 3은 진동시 부재 미소요소에 작용하는 힘들을 나타낸 것으로  $M$ ,  $T$  및  $Q$ 는 휨모멘트, 비틀림모멘트와 전단력이고,  $F_v$ ,  $C_\psi$  및  $C_\phi$ 는 단위길이당 수직방향 관성력, 회전관성우력 및 비틀림관성우력이다. 부재 미소요소에 작용하는 합응력과 관성력 및 반력  $R_v$ ,  $R_t$  사이의 동적 평형방정식을 세우면 식(1)~(3)과 같다.

$$Q' - \rho F_v - \rho R_v = 0 \tag{1}$$

$$M' - \rho Q + T + \rho C_\psi = 0 \tag{2}$$

$$M - T' + \rho C_\phi + \rho R_t = 0 \tag{3}$$

여기서, (')은  $d/d\theta$ 의 미분연산자이다.

부재단면에 발생하는 합응력  $M$ ,  $T$  및  $Q$ 는 식(4)~(6)과 같이 쓸 수 있다.<sup>6)</sup>

$$M = EI\rho^{-1}(\phi - \Psi) \tag{4}$$

$$T = GJ\rho^{-1}(\Psi + \phi') \tag{5}$$

$$Q = \alpha AG\beta = \alpha AG(\rho^{-1}v' - \Psi) \tag{6}$$

여기서,  $A$ 는 단면적,  $I$ 와  $J$ 는 부재단면의 단면 2차

모멘트 및 비틀림상수,  $E$ 와  $G$ 는 재료의 탄성계수 및 전단탄성계수,  $\alpha$ 는 단면형상에 따른 상수이다.

부재가 조화진동을 한다고 가정하면 단위길이당 수직방향관성력  $F_v$ , 회전관성우력  $C_\psi$  및 비틀림관성우력  $C_\phi$ 는 각각 다음과 같다.

$$F_v = -m A \omega^2 v \tag{7}$$

$$C_\psi = -m I \omega^2 \Psi \tag{8}$$

$$C_\phi = -m I_p \omega^2 \phi \tag{9}$$

여기서,  $m$ 은 부재재료의 질량밀도,  $\omega$ 는 고유각진동수(rad/sec)이다.

이상의 합응력 및 관성력 식들에서 식(6)이 전단변형효과이고, 식(8)이 회전관성효과이다. 식(1)~(9)의 기본 관계식들을 이용하면 탄성지반 위에 놓인 곡선부재의 면의 자유진동을 지배하는 기본 미분방정식을 얻을 수 있으며, 단위길이당 수직반력  $R_v$ 와 비틀림반력  $R_t$ 는 연속성을 갖는 지반모형의 선택에 따라서 결정된다.

본 연구에서는 서론에서 언급한 바와 같이 연속성을 갖는 지반모형으로 두 개의 인자로 지반특성을 표현하는 Pasternak 모형을 채택하였다. Fig. 4는 Pasternak 지반 위에 놓인 곡선부재의 단면과 비틀림각으로 인한 단면회전을 나타낸 것으로  $B$ 는 지반과 접하는 단면폭,  $k$ 는 지반계수,  $G_p$ 는 전단지반계수,  $r$ 은 단면도심을 원점으로 하는 곡률중심방향의 좌표이다.

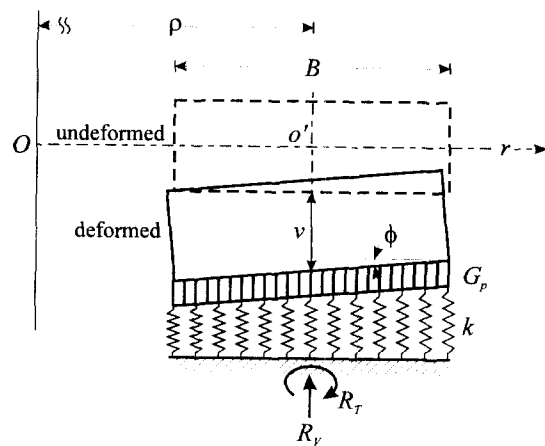


Fig. 4 Restoring forces of Pasternak foundation

부재와 지반이 접하는 면에서 압력과 처짐의 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.<sup>8)</sup>

$$p(r, \theta) = kz(r, \theta) - G_p \rho^{-2} d^2 z(r, \theta) / d\theta^2 \quad (10)$$

위의 식에서  $p(r, \theta)$  는 곡선보축상 임의점에서 곡률중심방향의 압력변화이고  $z(r, \theta)$  는 곡선보 단면을 따라 변화하는 면의방향 수직변위이다.

곡선보축상 임의점의 중심축에서 수직방향변위는  $v$  이고,  $\phi$  는 미소각이므로  $z(r, \theta)$  는 식(11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$z(r, \theta) = v - r\phi \quad (11)$$

식(10)과 식(11)을 이용하면 부재와 지반이 접하는 면에서 압력분포를 얻을 수 있으며, 이로부터 곡선부재 중심축에 대한 단위길이당 수직반력  $R_v$  와 비틀림반력  $R_t$  를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$R_v = kBv - BG_p \rho^{-2} v'' \quad (12)$$

$$R_t = (1/12)B^3 (k\phi - G_p \rho^{-2} \phi'') \quad (13)$$

지배 미분방정식을 무차원 형태로 나타내기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x/l, \quad \delta = y/l, \quad f = h/l \quad (14\sim 16)$$

$$\zeta = \rho/l, \quad \eta = v/l \quad (17,18)$$

$$s = l/\sqrt{I/A}, \quad s_p = l/\sqrt{I_p/A} \quad (19,20)$$

$$\epsilon = GJ/(EI), \quad \mu = \alpha G/E \quad (21,22)$$

$$\lambda = kl^5/(\pi^4 EI), \quad g = G_p l^3/(\pi^2 EI) \quad (23,24)$$

$$b = B/l \quad (25)$$

$$c_i = \omega_i l^2 \sqrt{mA/(EI)}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (26)$$

여기서 ( $\xi, \delta$ ) 는 무차원 직교좌표계,  $f, \zeta, \eta$  는  $h, \rho, v$

를 지간길이  $l$  로 정규화한 것으로  $f$  는 수평높이대 지간길이 비로 정의한다.  $s$  와  $s_p$  는 세장비 관련 변수,  $\epsilon$  과  $\mu$  는 강성변수와 전단변수,  $\lambda, g$  및  $b$  는 무차원화한 지반계수, 전단지반계수 및 접촉면의 폭 비이며,  $c_i$  는 무차원 고유진동수이고  $i$  는 모드 번호이다.

식(4), (5), (6)에서  $M', T', Q'$  을 구하고 이들 식과 합응력식(4)~(6), 관성력식(7)~(9), 및 지반 반력식(12), (13)을 동적 평형방정식(1)~(3)에 대입하고 무차원 변수들인 식(14)~(26)를 이용하면 연속성을 갖는 탄성지반 위에 놓인 곡선부재의 자유진동을 지배하는 상미분방정식들을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\eta'' = a_1 \eta' + (a_2 + a_3 c_i^2) \eta + a_4 \Psi' \quad (27)$$

$$\Psi'' = a_5 \Psi' + (a_6 + a_7 c_i^2) \Psi + a_8 \phi' + a_5 \phi + a_9 \eta' \quad (28)$$

$$\phi'' = a_{10} \phi' + (a_{11} + a_{12} c_i^2) \phi + a_{13} \Psi' + a_{10} \Psi \quad (29)$$

위의 식에서  $a_1 \sim a_{13}$  은 상미분방정식의 계수이며 부록에 수록하였다.

본 연구에서 곡선부재의 단부조건으로 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정의 단부조건을 고려하며, 각 단부 조건에 대한 경계조건은 다음과 같다. 회전단에서는 수직방향변위, 비틀림각 및 식(4)의 휨모멘트가 "0", 고정단에서는 수직방향변위, 비틀림각 및 단면회전각이 "0"이므로 무차원 변수를 이용하여 회전단, 및 고정단의 경계조건식을 나타내면 각각 식(30)~(32) 및 (33)~(35)과 같다.

$$\eta = 0, \quad \phi = 0, \quad \Psi' = 0 \quad (30) \sim (32)$$

$$\eta = 0, \quad \phi = 0, \quad \Psi = 0 \quad (33) \sim (35)$$

### 3. 형상 함수

위에서 유도한 상미분방정식을 수치해석하기 위해서는 상미분방정식의 계수  $a_1 \sim a_{13}$  에 포함되어 있는 형상 함수  $\zeta, \xi'$  가 정의되어야만 한다. 이 형상함수는 주어진 곡선부재의 선형에 대하여 다음과 같이 대수적으로 산출한다. Fig. 2에서  $y = y(x)$  의 선형식은 식(14)와

(15)에 의하여 식(36)의 무차원 선형식  $\delta$ 로 나타낼 수 있고, 무차원 곡률반경  $\xi$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\delta = \delta(\xi) \tag{36}$$

$$\xi = \left( \frac{d^2 \delta}{d\xi^2} \right)^{-1} \left[ 1 + \left( \frac{d\delta}{d\xi} \right)^2 \right]^{3/2} \tag{37}$$

곡선보축상 임의점에서  $x$  축과 곡률중심방향이 이루는 각도  $\theta$ 는 다음 식과 같다.

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left( \frac{d\delta}{d\xi} \right) \tag{38}$$

나머지 곡률변화계수  $\zeta'$ 는 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$\zeta' = \frac{d\zeta}{d\xi} \frac{d\xi}{d\theta} \tag{39}$$

이상의 식(36)~(39)을 이용하면 주어진 곡선부재의 선형에 대한 변화곡률항인  $\zeta$ ,  $\zeta'$ 를 계산할 수 있다. 본 연구에서는 곡선부재의 선형으로 원호형, 포물선형, 정현형, 타원형의 곡선부재를 채택하였다.

#### 4. 수치해석 결과 및 고찰

이상에서 상미분방정식, 경계조건 및 형상 함수식이 유도되었으므로 곡선부재의 선형, 단부조건 및  $f$ ,  $s$ ,  $s_p$ ,  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $g$ ,  $b$ 가 주어지면 무차원 고유진동수  $c_i$ 를 수치해석 방법에 의하여 산출할 수 있다. 이 연구에서 상미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta 법을 이용하였고  $c_i$ 를 산출하기 위해서는 행렬값 탐사법과 Regula-Falsi 법을 이용하였다. 이러한 수치해석 방법은 이미 다수의 문헌들<sup>13),14)</sup>에 의하여 그 타당성이 입증되었다.

이 연구의 수치해석 예에서는 단면 및 재료의 성질로부터 결정되는  $s_p=0.32s$ ,  $\epsilon=1.15$ ,  $\mu=0.35$ 로 결정하여 수치해석하였고 나머지 무차원 변수  $f$ ,  $s$ ,  $\lambda$ ,  $g$ ,  $b$ 는 변수연구에 이용하였다. 수치해석을 실시하기 전에 먼저 Runge-Kutta 법에서 단계길이  $\Delta\xi$ 를 결정하기 위하여 수렴해석을 실시하였다. Fig. 5에서처럼  $1/\Delta\xi$

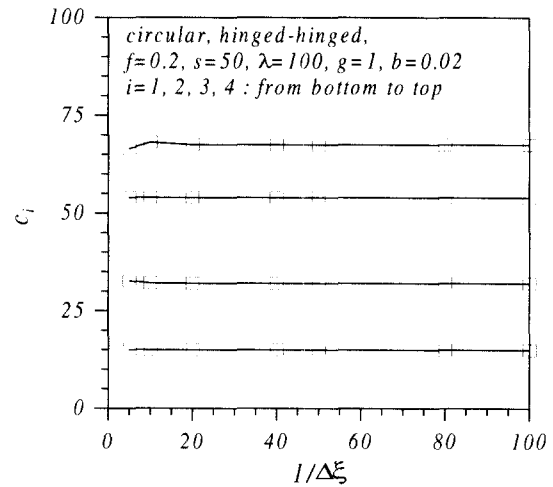


Fig. 5 Convergence analysis

$= 20$  즉,  $\Delta\xi=0.05$ 이면 수치해는 충분한 정도로 수렴하였다. 실제의 수치해석에서는 수치해의 정도를 강화하기 위하여  $1/\Delta\xi=100$ 으로 수치해석하였다.

이 연구결과와 타당성을 검증하기 위하여 실험실 규모의 모형실험을 실시하고 본 연구의 결과와 Table 1에서 비교하였다. 이 표의 하단에 실험에 사용한 곡선부재의 재원들을 표기하였다. 실험방법에 대해서는 이미 여러 논문<sup>13),14)</sup>을 통하여 발표한바 있으므로 여기

Table 1 Comparison of  $c_i$  between this study and experiments\*

End constraint	$i$	This study		Experiments $\omega_i$ , B	Error(%) $ A-B /B \times 100$
		$c_i$	$\omega_i$ , A		
Hinged - hinged	1	15.54	325	290	12.1
	2	29.01	606	575	5.4
	3	60.42	1263	1102	14.7
	4	106.3	2222	2050	8.4
Hinged - clamped	1	16.00	334	311	7.4
	2	36.23	757	784	3.4
	3	70.46	1473	1423	3.5
	4	120.0	2508	2321	8.1
Clamped - clamped	1	20.30	424	398	6.5
	2	42.55	889	821	8.3
	3	81.63	1706	1626	4.9
	4	134.3	2807	2716	3.4

\* parabolic,  $l=0.35$  m,  $h=0.105$  m,  $I=5.4 \times 10^{-10}$  m<sup>4</sup>,  $I_p=1.40 \times 10^{-8}$  m<sup>4</sup>,  $J=1.89 \times 10^{-9}$  m<sup>4</sup>,  $E=2.1$  GPa,  $G=0.75$  GPa,  $m=960$  kg/m<sup>3</sup>,  $k=4.5 \times 10^5$  N/m<sup>3</sup>,  $G_p=428$  N/m ( $f=0.3$ ,  $s=202$ ,  $s_p=40$ ,  $\epsilon=1.25$ ,  $\mu=0.30$ ,  $\lambda=21.4$ ,  $g=1.64$ ,  $b=0.086$ ,  $\omega_i=20.9 c_i$ )

에서는 설명을 생략한다. 이 표에서와 같이 두 결과들은 서로 매우 근접한 값들을 보이고 있어 본 연구의 이론적, 수치적 방법이 모두 타당함을 알 수 있다. 두 결과의 오차는 전술한 문헌<sup>13),14)</sup>에서 보여준 오차들과 매우 유사한 약 4~15% 정도의 오차의 범위를 보여주고 있다. 참고로 실험에서 얻어진 고정-고정 곡선부의 응답함수를 Hz 단위로 Fig. 6에 나타내었다.

Table 2는 곡선부재의 단부조건별, 선형별로  $c_i$  값을 비교한 것이다. 이 표에 보인 바와 같이  $c_i$  값은 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정의 단부조건 순서로 큰 것을 알 수 있으며, 선형이  $c_i$  값에 미치는 영향은 크

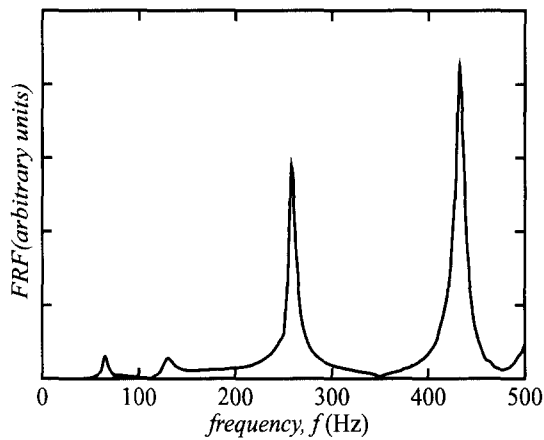


Fig. 6 Frequency response function of acceleration for experimental clamped-clamped beam

Table 2 Comparison of  $c_i^*$  by end constraints and types of curve

End constraint	Shape of member	Frequency parameter, $c_i$			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
Hinged - hinged	Circular	14.94	31.98	53.94	67.47
	Parabolic	15.54	32.81	54.32	68.75
	Sinusoidal	15.70	33.02	54.50	69.08
	Elliptic	15.30	32.50	54.12	68.23
Hinged - clamped	Circular	17.50	39.49	53.95	77.86
	Parabolic	18.02	40.20	54.37	78.95
	Sinusoidal	18.12	40.41	54.54	79.25
	Elliptic	17.82	39.91	54.17	78.50
Clamped - clamped	Circular	21.62	47.71	53.95	88.60
	Parabolic	22.07	48.25	54.38	89.61
	Sinusoidal	22.23	48.40	54.55	89.90
	Elliptic	21.86	48.03	54.18	89.18

\*  $f=0.2, s=50, \lambda=100, g=1, b=0.02$

지 않으나 원호형 부재가 다른 부재에 비하여 작은 값을 보이고 있다.

Fig. 7~11은 곡선부재의 변수연구를 시행하고 이를 그림에 나타낸 것이다. 이 그림들에서 수치해석에 사용한 선형, 단부조건 및 변수 값들을 그림 상단에 표시하였다. Fig. 7은  $c_i$ 와  $f$ 의 관계를 나타낸 것으로  $f$  값이 증가함에 따라  $c_i$  값은 감소함을 알 수 있다.  $f$  값이 0이면 직선 보이므로  $\square(f=0.005)$ 로 표시된  $c_i$  값들은 거의 직선 보의  $c_i$  값들로 수렴된 값들임을 알 수 있다. 이 그림에서  $\circ$ 로 표시된 곡선은 비틀림모드이며 나머지 3개의 곡선은 휨모드이다. 따라서 이 논문에서 비틀림모드를 고려하지 않으면 즉 상미분방정식인 식(29)에서  $c_i$ 의 계수  $a_{12}=0$ 이면 비틀림모드는 나타나지 않는다. 이 그림에서 제3, 4모드가 서로 만나는  $\triangle$ 로 표시된  $(f, c_i)$  점에서  $c_i$  값은 중복근을 갖게 되어 두 개의 서로 다른 진동형 즉 휨모드와 비틀림모드가 존재한다.

Fig. 8은  $c_i$ 와  $s$ 의 관계를 나타낸 것이며  $s$  값이 증가함에 따라서  $c_i$  값도 증가함을 알 수 있다. 특히  $s$  값이 증가함에 따라  $c_i$  값은 수평선에 수렴하며, 제1, 2모드는  $s$  값이 약 30이상에서, 제2모드는 약 80이상에서, 제4모드는 약 130이상에서  $c_i$  값에 미치는 영향이 매우 작다.

Fig. 9는  $c_i$ 와  $\lambda$ 사이의 관계를 그린 것이다. 실제의 지반에서  $\lambda$  값은 1~10000사이의 값을 갖는다.  $\lambda$

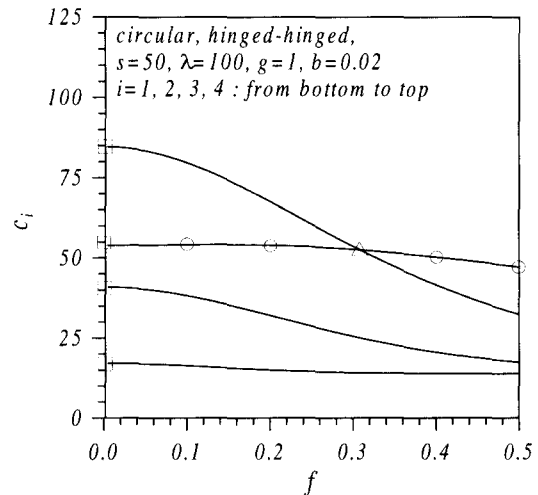


Fig. 7  $c_i$  versus  $f$  curves

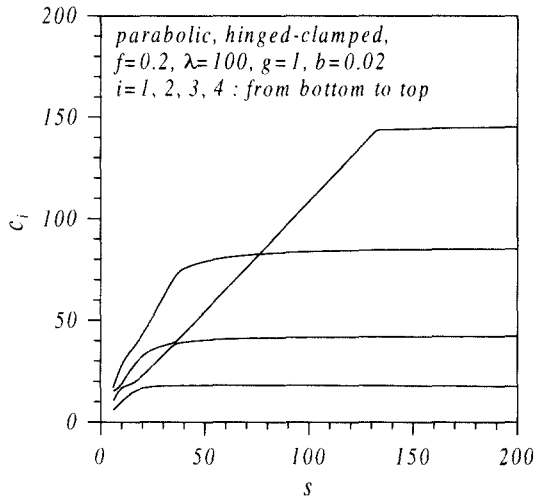


Fig. 8  $c_i$  versus  $s$  curves

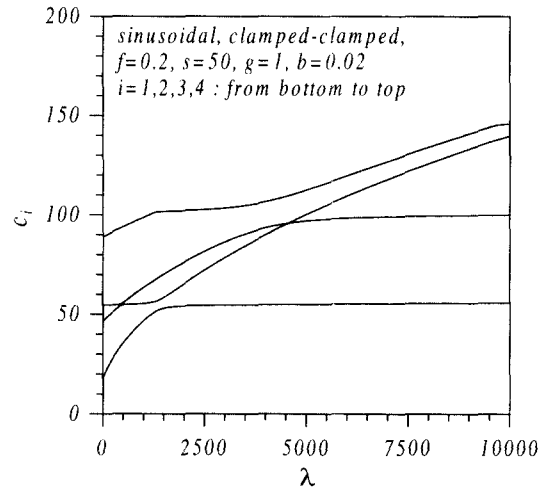


Fig. 9  $c_i$  versus  $\lambda$  curves

값의 범위가  $\lambda \leq 0.01$ 이면 강성보,  $0.01 \leq \lambda \leq 10$ 이면 반강성보,  $\lambda \geq 10$ 이면 연성보이다.<sup>15)</sup> 그림에서 보인 바와 같이  $\lambda$  값이 증가함에 따라  $c_i$  값은 증가한다. 제1모드는  $\lambda$  값이 1500 이상에서는 수평축에 수렴하여 영향력이 매우 적다. 그러나 제3, 4모드는  $\lambda$  값이 5000 이상에서도 계속 크게 증가한다.

Table 3은  $c_i$ 와  $g$ 사이의 관계를 나타낸 것이다. 실제 지반에서  $g$  값은 0~2.5 사이의 값을 갖는다.<sup>15)</sup> 이 표에서 보인 바와 같이  $g$  값이 증가함에 따라서  $c_i$  값은 증가하지만  $\lambda$  값이 커질수록 그 영향력은 작아지며, 예로서  $\lambda = 10^4$ 인 경우에는  $g$  값이  $c_i$  값에 미치는 영향은 없다.

Fig. 10은  $c_i$ 와  $b$ 사이의 관계를 그린 것이며,  $b$  값이 증가함에 따라  $c_i$  값은 증가한다. 이 그림에서 제3

모드는 비틀림 모드이며 접촉비  $b$ 가 증가함에 따라 비틀림 반력이 커지므로 제1, 2, 4모드인 휨 모드에 비하여  $c_i$  값이 상대적으로 크게 증가하는 것을 알 수 있다.

Fig. 11은 자유진동하는 곡선부재의 제2, 3모드의 진동형을 보여주고 있다. 여기서 제2모드는 휨모드, 제3모드는 비틀림모드이며 두 모드 사이에는 매우 큰 차이가 있다. 이 그림을 통하여 각 모드별로 상대진폭의 크기, 최대진폭의 위치 및 무변위 위치(nodal point) 등을 알 수 있다.

Table 3 Effects of  $g$  on  $c_1^*$  by  $\lambda$  values

$\lambda$	Foundation shear parameter, $g$						Ratio**
	0.	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	
1	6.53	6.61	6.68	6.74	6.81	6.88	1.054
10	7.74	7.80	7.86	7.92	7.98	8.04	1.039
102	15.24	15.27	15.30	15.33	15.36	15.39	1.010
103	43.74	43.74	43.75	43.76	43.77	43.78	1.001
104	55.22	55.22	55.22	55.22	55.22	55.22	1.000

\* elliptic, hinged-hinged,  $f=0.2$ ,  $s=50$ ,  $b=0.02$

\*\* Ratio of ( $c_i$  of  $g=2.5$ ) to ( $c_i$  of  $g=0.$ )

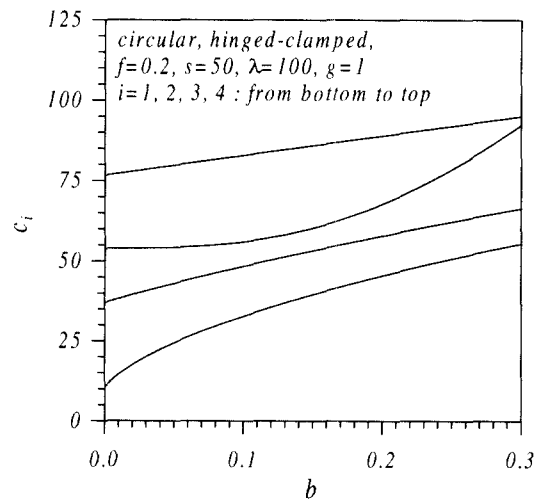


Fig. 10  $c_i$  versus  $b$  curves

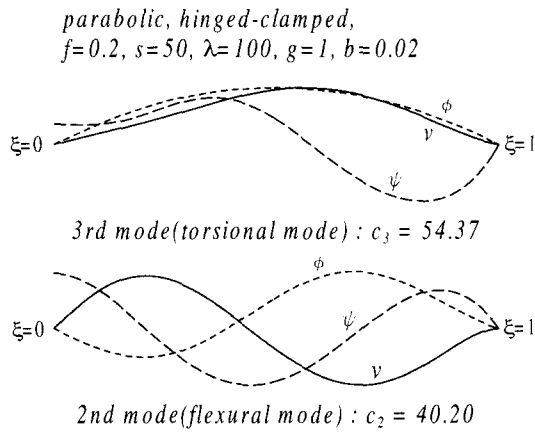


Fig. 11 Example of mode shapes

### 5. 결 론

이 논문은 연속성을 갖는 탄성지반 위에 놓인 곡선부재의 자유진동에 관한 연구이다. 연속성을 갖는 탄성지반을 Pasternak지반으로 모형화하여 곡선부재의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였다. 이 상미분방정식에는 회전관성과 전단변형효과를 고려하였다. 곡선부재의 선형으로는 원호형, 포물선형, 정현형, 타원형의 4가지 선형을 채택하였으며, 단부조건으로는 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정의 3가지 단부조건을 채택하였다. 이 상미분방정식을 수치해석하여 무차원 고유진동수를 산출하였다. 상미분방정식을 적분하기 위하여 Runge-Kutta 법을 이용하고, 무차원 고유진동수를 산출하기 위하여 행렬값 탐사법과 Regula-Falsi 법을 이용하였다. 실험실 규모의 모형실험을 실행하고, 본 연구의 고유진동수와 서로 비교하여 본 연구 결과의 타당성을 입증하였다. 실제의 수치해석 예에서는 최저차 4개의 무차원 고유진동수를 산출하고, 곡선부재의 변수와 무차원 고유진동수 사이의 관계 및 진동형을 그림에 나타내었다. 이 연구의 결과들은 동하중이 작용하는 구조공학 및 기초공학 분야에서 그 유용성을 기대할 수 있다.

### 감사의 글

이 연구는 1998년도 한국학술진흥재단의 자유공모 과제(2년 연속 과제 : 과제번호 : KRF-98-001-E01895)

연구비지원에 의하여 연구된 결과들 중의 일부이며, 동재단의 연구비 지원에 감사드립니다.

### 참 고 문 헌

- Volterra, E., 1953, "Deflection of Circular Beams resting on an Elastic Foundation obtained by the Method Harmonic Analysis," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 20, pp.227~237
- Wang, T. M. and Stephens, J. E., 1977, "Natural Frequencies of Timoshenko Beams on Pasternak Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 51, pp.149~155
- Panayotounakos, D.E. and Teocaris, P. S., 1980, "The Dynamically Loaded Circular Beam on an Elastic Foundation," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 47, pp.139~144
- Issa, M. S., 1988, "Natural Frequencies of Continuous Curved Beams on Winkler-Type Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 127, pp.291~301
- Kukla, S., 1991, "Free Vibration of a Beam Support on a Stepped Elastic Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 149, pp. 259~265
- Franciosi, C. and Masi, A., 1993, "Free Vibrations of Foundation Beams on Two-Parameter Elastic Soil," *Computer & Structures*, Vol. 47, pp.419~426
- 이병구, 1994, "전단층을 갖는 탄성지반 위에 놓인 보의 자유진동 해석," 한국강구조학회 논문집, 제6권 제3호, pp.107~115
- De Rosa, M.A., 1995, "Free Vibrations of Stepped Beams with Intermediate Elastic Foundation," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 19, pp.1~4
- 이병구, 오상진, 이재만, 1998, "탄성지반 위에 놓인 곡선형 Timoshenko 보의 자유진동," 한국전산구조공학회 논문집, 제 11권 제 2호, pp.273~280
- Laura, P. A. A. and Maurizi, M. J., 1987,



- "Recent Research on Vibrations of Arch-Type Structures." *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 19, pp.6~9
11. Winkler, E., 1867, *Die Lehre von der Elastizitat und Festigkeit*, Domonocus
  12. Selvaduari, A. P. S., 1979, *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*, Elsevier
  13. 모정만, 1997, 변화곡률을 갖는 수평 곡선보의 자유진동에 관한 연구, 박사학위 논문, 원광대학교 대학원
  14. Oh, Sang Jin, Lee, Byoung Koo and Lee, In Won, 2000, "Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-Uniform Cross-Section," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37 No. 6, pp.4871~4891
  15. Valsangkar, A. J. and Pradhanang R., 1988, "Vibrations of Beam-Columns on Two-Parameter Elastic Foundations," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 16, pp.217~225

## 부 록

본문에 기술되어 있는 상미분방정식 식(27)~(29)에 포함되어 있는 계수는 다음과 같다.

$$a_1 = \zeta^{-1} \zeta' \mu s^2 / (\mu s^2 + \pi^2 g b) \quad (A1)$$

$$a_2 = \pi^4 \lambda b \zeta^2 / (\mu s^2 + \pi^2 g b) \quad (A2)$$

$$a_3 = -\zeta^2 / (\mu s^2 + \pi^2 g b) \quad (A3)$$

$$a_4 = \zeta \mu s^2 / (\mu s^2 + \pi^2 g b) \quad (A4)$$

$$a_5 = \zeta^{-1} \zeta' \quad (A5)$$

$$a_6 = \zeta^2 \mu s^2 + \epsilon \quad (A6)$$

$$a_7 = -\zeta^2 s^{-2} \quad (A7)$$

$$a_8 = 1 + \epsilon \quad (A8)$$

$$a_9 = -\zeta \mu s^2 \quad (A9)$$

$$a_{10} = 12 \zeta^{-1} \zeta' \epsilon / (12 \epsilon + \pi^2 g b^3) \quad (A10)$$

$$a_{11} = (12 + \pi^4 \zeta^2 \lambda b^3) / (12 \epsilon + \pi^2 g b^3) \quad (A11)$$

$$a_{12} = -12 \zeta^2 s_p^{-2} / (12 \epsilon + \pi^2 g b^3) \quad (A12)$$

$$a_{13} = -12(1 + \epsilon) / (12 \epsilon + \pi^2 g b^3) \quad (A13)$$