

# 명시적인 동적 시간이력해석을 위한 사절점 가변형도 평판요소

## A Four-Node Assumed Strain Plate Element for Explicit Dynamic Transient Analysis

이 상 진\*

Lee, Sang-Jin

(논문접수일 : 2001년 4월 19일 ; 심사종료일 : 2001년 9월 14일)

### 요 지

본 논문은 평판구조물의 동적 시간이력해석을 수행하기 위하여 개발된 사절점 판요소에 대하여 기술하였다. 이 요소는 두꺼운 판에서 발생하는 횡전단 변형효과를 고려하기 위하여 Reissner-Mindlin(RM)가정을 도입하였다. 알려진 바와 같이 RM가정을 바탕으로 개발된 판요소가 얇은 판에 적용되면 전단강성 과대현상(Shear Locking Phenomenon)을 일으키는데 이를 개선하기 위하여 본 연구에서는 가변형도법을 이용한 대체변형도를 자연좌표계에 준하여 명시적으로 유도하였다. 개발된 저차 판요소는 중앙 차분법을 이용한 명시적인 동적 해석 알고리즘에 적용되었으며 이때 판의 대각질량행렬은 특별집중질량법을 사용하여 형성하였다. 개발된 판의 성능은 수치예제를 통하여 평가하고 검증하였다.

**핵심용어** : 사절점 평판요소, 전단강성 과대현상, 가변형도법, 명시적 동적 시간이력해석

### Abstract

An enhanced four-node plate element, which has been developed for explicit dynamic analysis of plate, is described in this paper. Reissner-Mindlin(RM) assumptions are adopted to consider transverse shear deformation effects in the present plate element. RM plate element produces a shear locking phenomena in thin plate so that the substitute natural strains based on assumed strain method are explicitly derived. The present plate element is applied into the explicit transient algorithm and the mass matrix of plate is formulated by using special lumping method proposed by Hinton et al. The performance of the element is verified with numerical examples.

**Keywords** : plate bending element, shear locking phenomenon, assumed strain method, explicit dynamic transient analysis

### 1. 서 론

사절점 판요소와 같은 저차요소는 유한요소 해석시 정밀해에 근접한 해를 도출하기 위하여 고차 판요소에 비해 상대적으로 많은 수의 요소를 필요로 한다. 그리

나 일정한 범위 내의 정밀도를 요구하는 구조해석에서는 저차요소가 계산시간을 줄이는 동시에 고차요소와 유사한 결과를 얻을 수 있어 매우 효과적이다. 따라서 사절점 판요소는 실용적인 구조해석이나 많은 계산시간이 요구되는 동적 시간이력해석 분야에서 많은 관심

\* 정회원 · 한국원자력연구소, 선임연구원

• 이 논문에 대한 토론을 2001년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2002년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

의 대상이 되어왔다.

판 유한요소의 개발은 고전적인 판이론<sup>1)</sup>을 바탕으로 시작되었다. 그러나 고전적인 판이론을 바탕으로 개발된 얇은 판요소는 횡진단 변형의 효과가 고려되지 않아 두꺼운 판에 적용되면 부정확한 해를 도출하였다. 이러한 문제를 개선하기 위하여 Reissner-Mindlin (RM)가정<sup>2)</sup>을 바탕으로 한 두꺼운 판 유한요소가 개발되었다. RM 판요소는 횡진단의 효과를 고려하므로 두꺼운 판 구조물에서도 해의 정확성이 보장되며 도입된 가정의 특성상 단지  $C^0$  연속성만을 요구하므로 개발이 매우 용이하다. 이러한 장점을 바탕으로 개발된 RM 판요소는 판을 해석하는데 있어 가장 많이 쓰이는 표준적인 요소로 자리 잡게 되었다. 그러나 RM 판요소는 중형비가 적은 판에 적용되면 전단강성 과대현상<sup>3)</sup>이 일어나며 이로 인해 해의 정확도가 급속히 떨어지게 된다. 전단강성 과대현상을 개선하기 위하여 초기에는 감차적분<sup>4)</sup>을 도입하였고 비적합 모드<sup>5)</sup> 그리고 가변형도를 이용한 대체변형도<sup>6)</sup>가 뒤이어 개발되었다. 이러한 기법들 중 가변형도법은 현재까지 강성 과대현상을 개선할 수 있는 가장 효과적인 방법으로 인식되고 있다.

이러한 맥락에서 본 연구는 전단강성 과대현상과 같은 요소의 결점을 없애기 위하여 사절점 판요소에 대한 가변형도를 자연좌표계에 준하여 명시적으로 유도하였고 이를 바탕으로 하여 동적 시간이력해석을 위한 저차 판요소를 개발하였다. 개발된 판요소는 벤치마크 검사를 통하여 그 성능을 검증하였다.

## 2. Reissner-Mindlin 판 이론

판의 전체영역( $\Omega$ )은 중앙면을 기준으로 한 영역과 두께방향의 영역으로 이루어져 있으며 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid (x_1, x_2) \in \Omega_0, x_3 \in \left[ -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \right\} \quad (1)$$

여기서  $\Omega_0$ 는 중앙면( $x_1 \otimes x_2$ )을 나타내고  $h$ 는 판의 두께를 나타낸다.

본 연구에서는 영역  $\Omega$ 로 정의된 판에 작용하는 횡진단변형의 효과를 고려하기 위해서 RM가정을 도입하

였으며 이를 정리하면 다음과 같다.

- 1) 중앙면에 수직인 법선은 변형 후에도 직선을 유지한다. 그러나 변형 후 중앙면에 반드시 수직일 필요는 없다.
- 2) 중앙면에 수직인 법선 방향의 응력은 0이라고 가정한다.
- 3) 처짐 값은 판의 두께에 비해서 작다

첫 번째 가정은 판이  $C^0$  연속성을 가지게 하는데 이를 도시하면 그림 1과 같다.

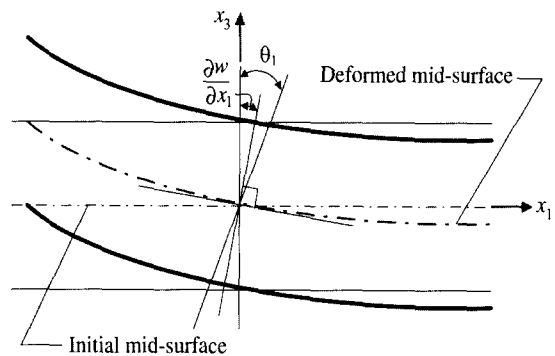


그림 1 Reissner-Mindlin 가정

그리고 판의 변위장은 그림 1의 가정에 의해 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= x_3 \theta_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= x_3 \theta_2(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= u(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $u_1, u_2, u_3$ 는  $x_1, x_2, x_3$ 방향에 대한 변위이고,  $\theta_1$ 와  $\theta_2$ 는 각각  $x_1-x_3$ 면과  $x_2-x_3$ 면내의 회전을 나타낸다.

판에 작용하는 변형도는 식(2)에서 정의한 변위장의 미분값을 사용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

식(3)에 정의된 변형도는 판의 경우 다음과 같이 다섯 가지 성분을 가진다.

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= x_3 \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} = x_3 \kappa_1 \\ \epsilon_2 &= x_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} = x_3 \kappa_2 \\ \epsilon_{12} &= x_3 \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} \right) = x_3 \kappa_{12} \\ \epsilon_{13} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \theta_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ \epsilon_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \theta_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (4)$$

위에서 정의된 변형도 성분은 면내방향의 변형도벡터  $\epsilon_p = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_{12}\}$ 와 면외방향의 변형도벡터  $\epsilon_s = \{\epsilon_{13}, \epsilon_{23}\}$ 로 나누어 정리할 수 있으며,  $x$ 는 모멘트에 대한 변형(곡률)을 나타낸다.

판이 등방성 물질로 이루어져 있을 경우 판의 응력-변형도 관계는 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_p & 0 \\ 0 & D_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_p \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} \quad (5)$$

여기서  $\sigma_p = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}\}$ 과  $\sigma_s = \{\sigma_{13}, \sigma_{23}\}$ 는 각각 면내 방향의 응력벡터와 면외방향의 응력벡터를 나타내며 이들에 관련된 강도행렬  $D_p$ 와  $D_s$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D_p &= \begin{bmatrix} \bar{\lambda} + 2\mu & \bar{\lambda} & 0 \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda} + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \\ D_s &= \begin{bmatrix} k_s \mu & 0 \\ 0 & k_s \mu \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $\bar{\lambda}$ 는 일반 평면응력 상태에 있는 물질의 Lamé 상수이고,  $\mu$ 는 전단강성계수 그리고  $k_s$ 는 전단수정계수이다.

식(5)에서 정의한 응력은 두께방향으로 적분하면 힘의 향으로 나타나며 다음과 같이 정리 할 수 있다.

$$\begin{aligned} M &= \{M_1, M_2, M_{12}\}^T = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}\}^T dx_3 \\ Q &= \{Q_{13}, Q_{23}\}^T = k_s \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{13}, \sigma_{23}\}^T dx_3 \end{aligned} \quad (7)$$

식(7)을 행렬식으로 정리하면 다음과 같다.

$$M = \hat{D}x, \quad Q = G\epsilon_s \quad (8)$$

여기서 휨강도행렬  $\hat{D}$ 와 횡전단강도행렬  $G$ 의 성분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{D} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \\ G &= \frac{k_s Eh}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $E$ 는 탄성계수,  $h$ 는 판의 두께 그리고  $\nu$ 는 프와송비를 나타낸다. 본 연구에서는 전단수정계수  $k_s$ 의 값으로 5/6을 사용하였다. 그리고 위에서 정의한 힘의 성분에 대한 부호규약은 그림 2에 도시하였다.

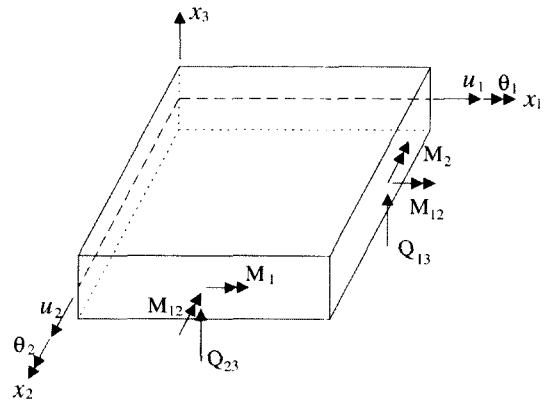


그림 2 판의 부호 규약

식(8)에서 정의한 강도행렬은 자연좌표계에 준하는 형태로 나타낼 수 있으며 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \tilde{Q}_{13} \\ \tilde{Q}_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{12} \\ \tilde{G}_{21} & \tilde{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\epsilon}_{13} \\ \tilde{\epsilon}_{23} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

여기서 강도행렬의 성분  $\tilde{G}_{ij}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{11} &= \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i} \frac{k_s Eh}{2(1+\nu)} \\ \tilde{G}_{12} &= \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_i} \frac{k_s Eh}{2(1+\nu)} \\ \tilde{G}_{22} &= \frac{\partial \xi_2}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_i} \frac{k_s Eh}{2(1+\nu)} \\ \tilde{G}_{21} &= \tilde{G}_{12}, \quad k_s = \text{전단 수정계수} \end{aligned}$$

본 연구에서는 전단과대현상을 개선하기 위하여 자연좌표계에 준하는 가변형도를 사용한다. 따라서 자연좌표계에 준하는 횡전단 가변형도를 수정없이 사용하기 위하여 등방성재료에 대한 전단강도행렬을 식(10)과 같이 자연좌표계에 준하여 표현하였다.

### 3. 가변형도

이산화된 영역에서 사절점 RM 판요소의 회전변위장과 처짐변위장은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \theta_i &= \sum_{a=1}^4 N_a(\xi_1, \xi_2) \theta_i^a \quad (i=1,2) \\ w &= \sum_{a=1}^4 N_a(\xi_1, \xi_2) w^a \end{aligned} \quad (11)$$

여기서  $\theta_1^a$ ,  $\theta_2^a$ 와  $w^a$ 는 절점  $a$ 에서의 변위를 나타내고,  $N_a(\xi_1, \xi_2)$ 는 절점  $a$ 와 연관된 형상함수이다.

전체좌표계에서의 횡전단변형도  $\epsilon_{3i}$  성분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon_{3i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_i} \quad (i=1,2) \quad (12)$$

식(2)를 식(12)에 대입하면 다음과 같다.

$$\epsilon_{3i} = \theta_i + \frac{\partial w}{\partial x_i} \quad (i=1,2) \quad (13)$$

식(13)은 다음과 같이 요소좌표계에 준하는 자연변형도(natural strain)로 나타낼 수 있다.

$$\tilde{\epsilon}_{3\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_\alpha} \epsilon_{3i} \quad (i=\alpha=1,2) \quad (14)$$

그리고 식(13)을 식(14)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{3\alpha} &= \frac{\partial x_i}{\partial \xi_\alpha} \theta_i + \frac{\partial w}{\partial \xi_\alpha} \quad (i=\alpha=1,2) \\ &= \vartheta_\alpha + \frac{\partial w}{\partial \xi_\alpha} \quad (\alpha=1,2) \end{aligned} \quad (15)$$

참고로 식(15)를 살펴보면 평판의 경우 처짐을 측정하는 전체좌표계와 자연좌표계의 방향이 일치함을 알 수 있다.

또한 전체좌표계에 준하는 실제변형도 성분  $\epsilon_{3i}$ 는 식(15)를 변환하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\epsilon_{3i} = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_i} \tilde{\epsilon}_{3\alpha} \quad (i=\alpha=1,2) \quad (16)$$

이상과 같이 자연좌표계에 준하는 변형도는 전체좌표계에 준하는 실제변형도와 상호 변환할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 횡전단과대현상을 규명하고 표본점을 계산하기 위하여 자연좌표계에 준하는 전단변형도의 정의를 사용한다.

판의 길이에 대한 두께의 비가 커질 경우 RM판요소의 횡전단변형도는 0에 근접한다.

$$\tilde{\epsilon}_{3\alpha} = 0 \quad (\alpha=1,2) \quad (17)$$

$$\vartheta_\alpha = -\frac{\partial w}{\partial \xi_\alpha} \quad (\alpha=1,2) \quad (18)$$

이때 회전변위  $\vartheta_\alpha$ 와 처짐변위  $w$ 가 동일한 형상함수를 가지면 식(18)의 양변 차수가 달라지게 됨을 알 수 있다. 이는  $\nu$ 와  $Ma^7$ 가 살펴본 바와 같이 전단과 대현상을 일으키는 직접적인 이유가 된다. 이러한 차수의 부등가를 보정하기 위하여 다음의 두 가지 방법이 고려될 수 있다.

- 1) 식(18) 좌변의 항 중 우변보다 고차인 항의 계수를 0으로 만든다.
- 2) 식(18) 우변보다 고차인 좌변의 항을 우변에 첨가한다.

본 연구에서는 두 번째 방법을 택하여 식(18)의 우변에 좌변의 모든 항을 포함하는 다항식을 도입하였다. 이렇게 새로운 변위장을 도입함으로써 식(18)의 양변 사이에서 나타나는 차수의 부등가(inequality), 즉 전단강성 과대현상을 일으키는 원인이 없어지게 된다.

사절점 판요소에 대한 회전변위장과 처짐변위장은 식(11)에서 형상함수를 이용하여 정의하였는데 이때 사용된 절점  $a$ 에서의 형상함수는 다음과 같다.

$$N_a(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1^a \xi_1)(1 + \xi_2^a \xi_2) \quad (19)$$

위의 형상함수를 사용하였을 경우 식(18)에서 나타나는 차수의 부동가를 없애기 위해서 다음과 같은 차수를 가지는 다항식이 치집변위장을 표현하기 위해 필요하다.

$$\begin{aligned} \hat{w} = & c_{00} + c_{10}\xi_1 + c_{01}\xi_2 + c_{20}\xi_1^2 + c_{11}\xi_1\xi_2 \\ & + c_{02}\xi_2^2 + c_{21}\xi_1^2\xi_2 + c_{12}\xi_1\xi_2^2 + c_{22}\xi_1^2\xi_2^2 \end{aligned} \quad (20)$$

정의된 변위함수  $\hat{w}$ 를 이용하면 이산화된 영역에서 사절점 요소가 가지는 변위는 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$w = \sum_{a=1}^4 N_a \hat{w}^a \quad (21)$$

여기서  $\hat{w}^a$ 는 식(20)을 이용하여 절점  $a$ 에서 구한 변위값이다.

식(19)와 (20)을 식(21)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} w = & (c_{00} + c_{20} + c_{02} + c_{22}) + (c_{10} + c_{12})\xi_1 \\ & + (c_{01} + c_{21})\xi_2 + c_{11}\xi_1\xi_2 \end{aligned} \quad (22)$$

식(20)과 식(21)을  $\xi_1$ 에 대해서 일계 미분하고 이들이 동일하다는 조건을 적용하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$2\xi_1(c_{20} + c_{21}\xi_2 + c_{22}\xi_2^2) + c_{12}(\xi_2^2 - 1) = 0 \quad (23)$$

계수  $c_{20}, c_{21}, c_{22}$  그리고  $c_{12}$ 의 임의의 값에 만족하는 식(23)의 해를 구하면 다음과 같다.

$$\xi_1 = 0, \xi_2 = 1 \text{ 과 } \xi_1 = 0, \xi_2 = -1 \quad (24)$$

따라서, 식(24)에서 구해진 두 값이 변형도  $\tilde{\epsilon}_{31}$ 가 횡전단강성 과대현상을 일으키지 않는 표본점의 위치를 나타낸다.

횡전단변형도  $\tilde{\epsilon}_{32}$ 의 표본점 또한 같은 방법으로 구할 수 있으며 다음과 같다.

$$\xi_1 = 1, \xi_2 = 0 \text{ 과 } \xi_1 = -1, \xi_2 = 0 \quad (25)$$

대체변형도는 유도한 표본점의 위치에서 계산한 횡전단값을 이용하여 형성하는데  $\tilde{\epsilon}_{31}$ 과  $\tilde{\epsilon}_{32}$ 에 대한 가변형도는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{31} = & \sum_{\delta=1}^2 P_{\delta}(\xi_1, \xi_2) \tilde{\epsilon}_{31}^{\delta} \\ \tilde{\epsilon}_{32} = & \sum_{\delta=1}^2 Q_{\delta}(\xi_1, \xi_2) \tilde{\epsilon}_{32}^{\delta} \end{aligned} \quad (26)$$

여기서 가변형도를 형성하는 데 사용된 보간함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} P_1(\xi_1, \xi_2) = & \frac{1}{2}(1 + \xi_2) \\ P_2(\xi_1, \xi_2) = & \frac{1}{2}(1 - \xi_2) \\ Q_1(\xi_1, \xi_2) = & \frac{1}{2}(1 + \xi_1) \\ Q_2(\xi_1, \xi_2) = & \frac{1}{2}(1 - \xi_1) \end{aligned} \quad (27)$$

식(26)에 정의된 변형도를 명시적인 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{31} = & \frac{1}{4} \xi_1^a (1 + \xi_2^a \xi_2) w^a \\ & + \frac{1}{4} \{ \alpha_1(1 + \xi_2^a \xi_2) + \beta_1(\xi_2^a + \xi_2) \} \theta_1^a \\ & + \frac{1}{4} \{ \alpha_2(1 + \xi_2^a \xi_2) + \beta_2(\xi_2^a + \xi_2) \} \theta_2^a \\ \tilde{\epsilon}_{32} = & \frac{1}{4} \xi_2^a (1 + \xi_1^a \xi_1) w^a \\ & + \frac{1}{4} \{ \gamma_1(1 + \xi_1^a \xi_1) + \beta_1(\xi_1^a + \xi_1) \} \theta_1^a \\ & + \frac{1}{4} \{ \gamma_2(1 + \xi_1^a \xi_1) + \beta_2(\xi_1^a + \xi_1) \} \theta_2^a \end{aligned} \quad (28)$$

여기서 계수  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ 는 다음과 같다

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & \frac{1}{4}(-x_1^1 + x_1^2 + x_1^3 - x_1^4) \\ \beta_1 = & \frac{1}{4}(x_1^1 - x_1^2 + x_1^3 - x_1^4) \\ \gamma_1 = & \frac{1}{4}(-x_1^1 - x_1^2 + x_1^3 + x_1^4) \\ \alpha_2 = & \frac{1}{4}(-x_2^1 + x_2^2 + x_2^3 - x_2^4) \\ \beta_2 = & \frac{1}{4}(x_2^1 - x_2^2 + x_2^3 - x_2^4) \\ \gamma_2 = & \frac{1}{4}(-x_2^1 - x_2^2 + x_2^3 + x_2^4) \end{aligned} \quad (29)$$

여기서  $x_i^a$ 의 아래첨자  $i$ 는 전체좌표계의 성분을 나타내고 윗첨자  $a$ 는 절점번호를 나타낸다.

#### 4. 동적 평형방정식

가상일의 원리를 바탕으로한 동적 평형방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_{\Omega} [\delta \boldsymbol{\varepsilon}]^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} [\delta \mathbf{u}]^T \mathbf{t} d\Omega + \int_{\Omega} [\delta \mathbf{u}]^T (\mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}} - c \dot{\mathbf{u}}) d\Omega \quad (30)$$

여기서  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ 는 가상의 변형도벡터,  $\boldsymbol{\sigma}$ 는 응력벡터,  $\delta \mathbf{u}$ 는 가상의 변위벡터,  $\rho$ 는 재료의 밀도를 나타낸다. 그리고  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\rho \ddot{\mathbf{u}}$ ,  $c \dot{\mathbf{u}}$ 는 표면력, 물체력, 관성력 그리고 감쇠력을 나타내고  $\ddot{\mathbf{u}}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$ 는 가속도와 속도벡터를 나타낸다.

이산화된 유한요소의 전체영역에서 판의 변위, 속도 그리고 가속도와 그에 준하는 가상의 항들은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \sum_{a=1}^{np} \widehat{N}_a(\xi_1, \xi_2) \mathbf{u}^a, \quad \delta \mathbf{u} = \sum_{a=1}^{np} \widehat{N}_a \delta \mathbf{u}^a \\ \dot{\mathbf{u}} &= \sum_{a=1}^{np} \widehat{N}_a(\xi_1, \xi_2) \dot{\mathbf{u}}^a, \quad \delta \dot{\mathbf{u}} = \sum_{a=1}^{np} \widehat{N}_a \delta \dot{\mathbf{u}}^a \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \sum_{a=1}^{np} \widehat{N}_a(\xi_1, \xi_2) \ddot{\mathbf{u}}^a, \quad \delta \ddot{\mathbf{u}} = \sum_{a=1}^{np} \widehat{N}_a \delta \ddot{\mathbf{u}}^a \end{aligned} \quad (31)$$

여기서  $np$ 는 구조물을 이산화한 전체 절점수,  $\widehat{N}_a$ 는 요소내의 국부 보간함수  $N_a$ 를 이용하여 형성한 전체 보간함수 행렬을 나타낸다.

또한 변형도-변위관계와 가상의 변형도-변위관계는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{a=1}^{np} \widehat{B}^a \mathbf{u}^a, \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{a=1}^{np} \widehat{B}^a \delta \mathbf{u}^a \quad (32)$$

여기서  $\widehat{B}^a$ 는 전체변형도-전체변위관계를 나타내는 행렬이다.

식(31)과 (32)를 식(30)에 대입하면 다음과 같다.

$$\delta \mathbf{u}^T [\mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}] = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P} \quad (33)$$

가상의 변위  $\delta \mathbf{u}$ 는 임의의 값을 가질 수 있으므로 위식은 다음과 같이 정리 할 수 있다.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (34)$$

여기서  $\mathbf{M}$ 은 질량행렬이고,  $\mathbf{C}$ 는 감쇠행렬,  $\mathbf{K}$ 는 강성행렬,  $\mathbf{P}$ 는 외부하중벡터,  $\ddot{\mathbf{u}}$ 는 가속도벡터,  $\dot{\mathbf{u}}$ 는 속도벡터,  $\mathbf{u}$ 는 변위벡터를 나타낸다. 구조물의 강성행렬  $\mathbf{K}$ 와 질량행렬  $\mathbf{M}$ 은 다음과 같이 요소 강성행렬을 조합함으로써 구할 수 있다.

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}_{e=1}^{nel} (\mathbf{K}^{(e)}), \quad \mathbf{M} = \mathbf{A}_{e=1}^{nel} (\mathbf{M}^{(e)}) \quad (35)$$

여기서  $\mathbf{A}$ 는 유한요소 조합연산자<sup>8)</sup>이고,  $nel$ 은 구조물을 이산화한 전체 요소의 수를 나타낸다. 그리고 요소 강성행렬과 요소 질량행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{K}^{ab(e)} = \int_{V^{(e)}} [\mathbf{B}^a]^T \mathbf{D} \mathbf{B}^b dV \quad (36)$$

$$\mathbf{M}^{ab(e)} = \int_{V^{(e)}} [\mathbf{N}_a]^T \rho \mathbf{N}^b dV \quad (37)$$

휨해석을 위한 RM판의 변형에너지는 휨과 횡전단에 연관된 항으로 구성되어져 있다. 따라서 식(36)의 요소강성행렬은 다음과 같이 두가지로 나누어 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{ab(e)} &= \mathbf{K}_B^{ab(e)} + \mathbf{K}_S^{ab(e)} \\ &= \int_A [\mathbf{B}_p^a]^T [\widehat{\mathbf{D}}] [\mathbf{B}_p^b] dA \\ &\quad + \int_A [\widehat{\mathbf{B}}_s^a]^T [\widehat{\mathbf{G}}] [\widehat{\mathbf{B}}_s^b] dA \end{aligned} \quad (38)$$

특히 횡전단 강성행렬  $\mathbf{K}_S^{ab(e)}$ 는 식(10)의 강도행렬을 사용하여 자연좌표계에 준하여 형성하였다.

그리고 판이 초기응력  $\boldsymbol{\sigma}^o$ 를 가질 경우 이에 대한 변형에너지는 다음과 같이 고려할 수 있다.

$$U_G = \int_V (\boldsymbol{\sigma}^o)^T \boldsymbol{\varepsilon}^L dV \quad (39)$$

여기서 초기 응력벡터는  $\boldsymbol{\sigma}^o = \{\sigma_1^o, \sigma_2^o, \tau_{12}^o\}$ 의 성분을 가

지며, 변형도의 고차항  $\epsilon^L = \{\epsilon_1^L, \epsilon_2^L, \epsilon_{12}^L\}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_1^L &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right) \\ \epsilon_2^L &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \right) \\ \epsilon_{12}^L &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (40)$$

식(2)에서 정의된 변위를 식(40)에 대입하면 변형도의 고차항은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_1^L &= \frac{x_3^2}{2} \left[ \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \\ \epsilon_2^L &= \frac{x_3^2}{2} \left[ \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 \\ \epsilon_{12}^L &= \frac{x_3^2}{2} \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (41)$$

따라서 식(39)에 두께방향의 적분을 취하면 각 요소에 대한 변형에너지는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} U_G &= h \int_A \left[ \frac{\partial w}{\partial x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] \begin{bmatrix} \sigma_1^o & \sigma_{12}^o \\ \sigma_{12}^o & \sigma_2^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ \frac{\partial w}{\partial x_2} \end{bmatrix} dA \\ &+ \frac{h^3}{12} \int_A \left[ \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} \right] \begin{bmatrix} \sigma_1^o & \sigma_{12}^o \\ \sigma_{12}^o & \sigma_2^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} dA \\ &+ \frac{h^3}{12} \int_A \left[ \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1}, \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \right] \begin{bmatrix} \sigma_1^o & \sigma_{12}^o \\ \sigma_{12}^o & \sigma_2^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} dA \end{aligned} \quad (42)$$

따라서 초기응력에 대한 요소강성행렬은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$K_G^{ab(e)} = \int_A [ \bar{B}^a ]^T [ \hat{\sigma}^o ] [ \bar{B}^b ] dA \quad (43)$$

여기서 변형도-변위관계 행렬  $\bar{B}$ 는 식(41)을 이용하여 구하였다.

### 5. 요소의 질량행렬

절점  $a, b$ 에 연관된 요소질량행렬<sup>9)</sup>은 일반적으로 다음과 같다.

$$M^{ab(e)} = \int_{\Omega} N_a \rho N_b d\Omega \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & h^3/12 & 0 \\ 0 & 0 & h^3/12 \end{bmatrix} \quad (43)$$

식(43)에 정의된 질량행렬은 여러 기법을 통하여 대각행렬로 형성될 수 있는데 본 연구에서는 Hinton 등이 제안한 특별집중질량법<sup>10)</sup>을 사용하여 대각 질량행렬을 구하였다. 따라서 절점  $a$ 에 대한 질량행렬은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$M^{aa(e)} = \begin{bmatrix} m_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & I_{aa1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{aa2} \end{bmatrix} \quad (44)$$

여기서 질량행렬의 각 성분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m_{aa} &= \omega_a \int_{\Omega} \rho d\Omega \\ I_{aa1} &= I_{aa2} = \omega_a \int_{\Omega} \rho x_3^2 d\Omega \\ \omega_a &= \frac{\int_{\Omega} \rho N_a d\Omega}{\sum_{k=1}^4 \int_{\Omega} \rho N_k d\Omega} \end{aligned} \quad (45)$$

위식에서  $\rho$ 는 판의 재료밀도이고,  $N_a$ 는 절점  $a$ 에 연관된 형상함수이다.

### 6. 명시적 시간이력해석 알고리즘

식(34)에서 정의한 동적 평형방정식은 판에 초기응력이 작용하면 기하학적인 강성행렬  $K_G$ 를 추가하여 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + (K + K_G) u = P \quad (46)$$

중양차분법을 이용하면 위의 동적 평형방정식은 시간 간격  $\Delta t$ 에서만 만족을 한다. 따라서 특정시간  $t$ 에서 동적 평형방정식은 다음과 같다.

$$M\ddot{\mathbf{u}}_t + C\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{q}_t = \mathbf{P}_t \quad (47)$$

여기서  $\mathbf{q}_t = (\mathbf{K} + \mathbf{K}_C)\mathbf{u}_t$ 는 내력벡터를 나타낸다.

시간  $t$ 에서의 가속도  $\ddot{\mathbf{u}}_t$ 와 속도  $\dot{\mathbf{u}}_t$ 는 중앙차분법을 사용하면 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_t &= \frac{\mathbf{u}_{t+\Delta t} - 2\mathbf{u}_t + \mathbf{u}_{t-\Delta t}}{\Delta t^2} \\ \dot{\mathbf{u}}_t &= \frac{\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_{t-\Delta t}}{2\Delta t} \end{aligned} \quad (48)$$

식(48)을 식(47)에 대입하면 변위  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{t+\Delta t} &= \left( \mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \right)^{-1} [(\Delta t)^2 (-\mathbf{q}_t + \mathbf{P}_t) \\ &\quad + 2\mathbf{M}\mathbf{u}_t - \left( \mathbf{M} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} \right) \mathbf{u}_{t-\Delta t}] \end{aligned} \quad (49)$$

위에서 구해진 변위  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ 는 시간  $t$ 와  $t-\Delta t$ 에서의 변위값  $\mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{t-\Delta t}$ 를 이용하여 나타내었다. 또한 질량행렬  $\mathbf{M}$ 과 감쇠행렬  $\mathbf{C}$ 가 대각행렬이면 식(49)의 해는 자명하며 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} u_{t+\Delta t}^a &= \left( m_{aa} + \frac{\Delta t}{2} c_{aa} \right)^{-1} [(\Delta t)^2 (-q_t^a + p_t^a) \\ &\quad + 2m_{aa}u_t^a - \left( m_{aa} - \frac{\Delta t}{2} c_{aa} \right) u_{t-\Delta t}^a] \end{aligned} \quad (50)$$

여기서 윗첨자  $a$ 는 질량행렬과 감쇠행렬의  $a$ 번째 성분을 나타낸다.

시간  $t+\Delta t$ 에서의 평형방정식은 전 단계인 시간  $t-\Delta t$ 와  $t$ 에서의 정보를 필요로 함을 알 수 있다. 따라서 동적해석을 위해서 시작 변위벡터가 필요하며 이는 식(48)을 사용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{u}_o^a &= \frac{u_{o+\Delta t}^a - u_{o-\Delta t}^a}{2\Delta t} \\ \text{또는, } u_{o-\Delta t}^a &= -2\Delta t \dot{u}_o^a + u_{o+\Delta t}^a \end{aligned} \quad (51)$$

식(51)을 식(50)에 대입하면 다음 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_{o+\Delta t}^a &= \frac{(\Delta t)^2}{2m_{aa}} (-q_o^a + p_o^a) + u_o^a \\ &\quad + \Delta t \left( 1 - \frac{c_{aa}\Delta t}{2m_{aa}} \right) \dot{u}_o^a \end{aligned} \quad (52)$$

본 연구에서는 판의 감쇠력이 0인 것으로 가정하였다. 따라서 평형방정식은 매우 간단하게 된다.

도입한 명시적 시간이력 알고리즘은 중앙차분법을 사용하므로 주어지는 조건에 대해서만 해의 안정성을 유지한다. 따라서 본 연구에서는 해의 안정성을 보장하기 위하여 다음의 임계시간 간격<sup>11)</sup>을 이용하였다.

$$\Delta t = \gamma L_s \left[ \frac{\rho(1-\nu^2)/E}{2+0.83(1-\nu)[1+1.5(L_s/h)2]} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (53)$$

여기서  $\gamma \leq 1$ 는 수정계수를 나타내며,  $L_s$ 는 각 요소 내에서 가장 가까이 인접한 절점 사이의 거리를 나타낸다.

## 8. 수치예제

### 8.1 고정지지원 원판

본 예제에서는 개발된 판요소를 이용하여 고정 지지된 원판<sup>12)</sup>의 거동을 조사하였다. 판의 반지름은  $r=100.0\text{ in}$ 이고 두께는  $h=20.0\text{ in}$ 이다. 판의 탄성계수는  $E=100.0\text{ lb/in}^2$ , 프와송비는  $\nu=0.3$ , 재료의 밀도는  $\rho=10.0\text{ lb sec}^2/\text{in}^4$ 이다. 판은 크기가  $q_o=0.1\text{ lb/in}^2$ 인 등분포하중을 받고 있으며 이는 Heaviside 단위스텝함수  $H(t)$ 를 이용하여 시간 의존적인 형태  $Q(x_1, x_2, t) = q_o H(t)$ 로 정의하였다. 즉, 도입된 단위스텝함수  $H(t)$ 는 시간  $t < 0$ 에서는  $H(t)=0$  값을 가지고 시간  $t > 0$ 에서는  $H(t)=1$  값을 가지게 된다. 유한요소해석시에는 그림 3에 도시된 바와 같이 판의 1/4을 48개의 사절점 유한요소로 이산화 하였다.

동적 시간이력해석을 위해 명시적 알고리즘을 사용하면 구해지는 해가 조건적으로 수렴하므로 해석에는 식(53)에 정의된 임계시간 간격 이하의 값을 사용하였다. 본 연구를 통하여 구한 판 중앙에서의 처짐을 시간에 따라 그림 3에 도시하였다. 개발된 판요소를 이용하여 구한 해석결과는 가변형도를 사용한 구절점 라그랑지 요소<sup>13)</sup>를 사용하여 구한 결과와 비교하였다. 그림 3에 도시된 바와 같이 개발된 사절점 판 요소를 이용하여 구한 처짐값은 다른 해와 잘 일치 하였다. 그림 3에 도시된 결과는 판의 처짐은  $w/(p/Eh)$  식을 사용하여 시간은  $T/a\sqrt{(\rho/E)}$  식을 사용하여 정규화 하였다.



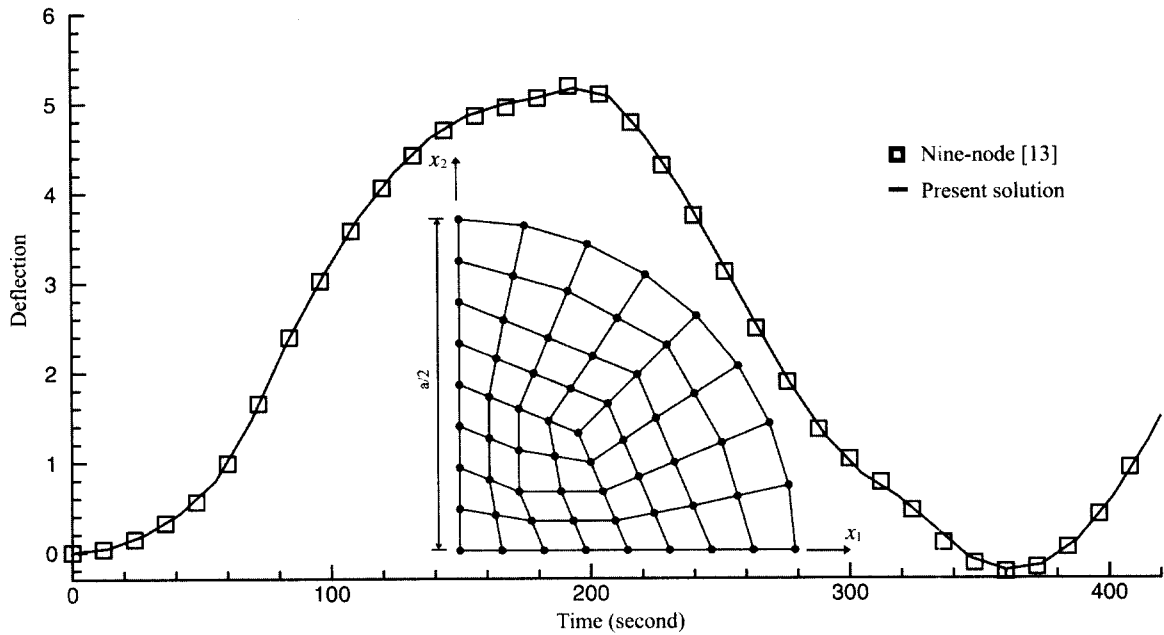


그림 3 원판의 형상과 시간에 따른 판 중앙에서의 처짐

### 8.2 초기응력을 가진 단순 지지된 사각판

본 예제에서는 개발된 판요소를 사용하여 초기응력이 판의 동적 거동에 미치는 영향<sup>14)</sup>에 대하여 분석하였다. 판의 크기는  $a = \sqrt{2} \text{ in}$ ,  $b = 1 \text{ in}$ 이며 판의 길이/두께비 ( $h/b$ )는 0.1이다. 판의 탄성계수는  $E = 1.0 \text{ lb/in}^2$ , 프와송비는  $\nu = 0.3$ 이다. 판에는 그림 4에 도시된 바와 같이 중앙부분에 등분포 하중이 작용하며 이를 전질에서 정의한 Heaviside 단위스텝함수  $H(t)$ 를 이용하여 시간 의존적인 형태  $Q(x_1, x_2, t) = q_0 H(t)$ 로 정의하였다. 등분포 하중이 작용하는 면적의 치수는  $a = \beta = 0.2 \text{ in}$ 이다(그림 4 참조). 판은 형상이 대칭이므로 유한요소 해석시에는 판의 1/4만을 사용하였으며 48개의 요소를 사용하여 이산화 하였다. 판에 가해진 초기응력은 참고문헌<sup>14)</sup>에서와 같이  $x_1$  방향으로  $N_{xx}$ 만큼 가하였다. 초기응력  $N_{xx}$ 는 인장과 압축의 형태로 가하였고 응력의 크기는 임계좌굴응력 ( $\sigma_{xx}^c$ )을 사용하여 계산하였다. 판에 가해진 초기 인장응력의 크기는  $N_{xx} = 0.5\sigma_{xx}^c/E$ 이고 초기 압축응력의 크기는  $N_{xx} = -\sigma_{xx}^c/E$ 이다. 이러한 크기의 초기응력이 가해진 판의 해석결과는 초기응력이 가해지지 않은 판의 거동과 비교하여 그림 5에 도시하였다. 또한 참고로 정적해석을 통하여 구한 해도 함께 도시하였다. 참고문헌<sup>14)</sup>을 살펴보면 초기

압축응력이 가해진 판은 초기응력이 가해지지 않은 판에 비해 판의 저 주파수 값이 상대적으로 증가하며 초기 인장응력이 가해지면 판의 저 주파수 값이 다소 감소하는 하는 것으로 나타났다. 본 연구에서도 판에 초기 압축응력이 가해지면 초기 인장응력이 가해졌을 때보다 시간에 따른 변형에너지가 증가하였으며 이는 초기 인장응력이 가해졌을 때 판의 강성이 전체적으로 증가했음을 알 수 있었다. 그림 5에 도시된 바와 같이 본 연구를 통하여 구해진 값들은 가변형도를 채용한 구절점 평판요소<sup>13)</sup>를 이용하여 구한 해와 잘 일치하였고 이론해<sup>15)</sup>와도 비슷한 결과를 도출하였다. 그림 5에 도시된 결과는 전 질에서와 같은 방법으로 정규화 하였다. 참고로 가변형도를 채용한 구절점 평판요소를 이용하여 구한 해는 직접 유한요소해석을 통하여 구하였으나 이론해는 참고문헌<sup>15)</sup>의 그래프값을 인용하였다.

### 9. 결 론

본 연구를 통하여 평판의 동적 시간이력해석을 위한 저차 판요소를 개발하였다. 두꺼운 판에서 발생하는 횡전단 변형을 고려하기 위하여 RM가정을 도입하였으며 개발된 판요소가 전단과대현상 없이 얇은 판에 적용될

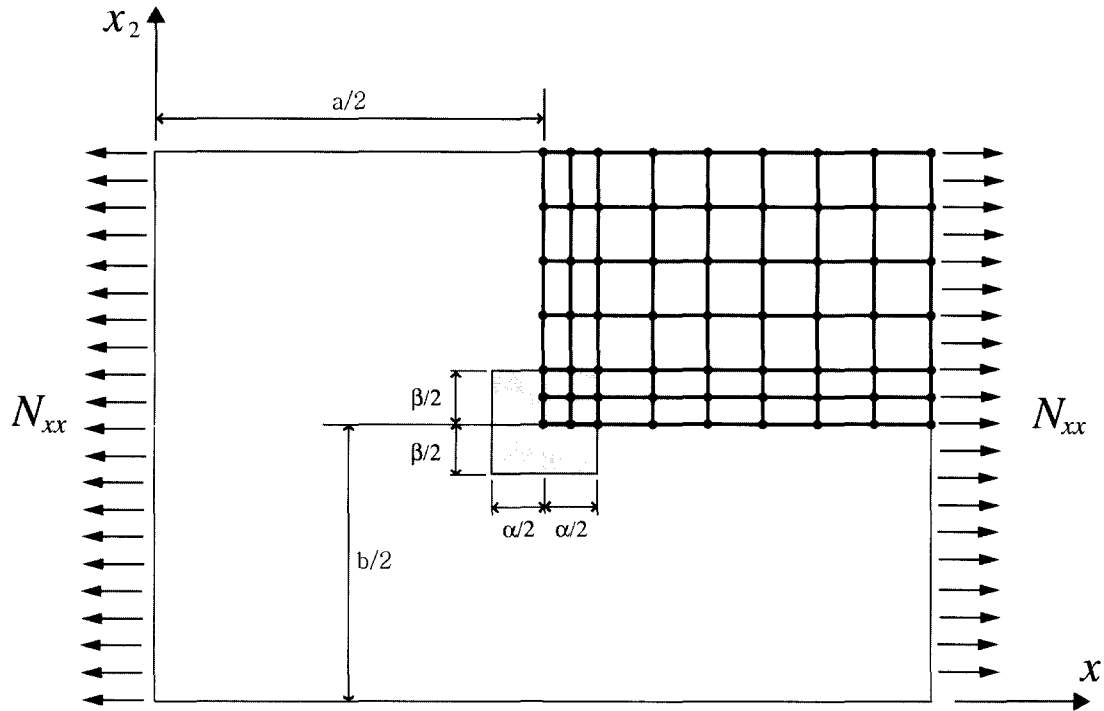


그림 4 단순지지된 사각판의 형상

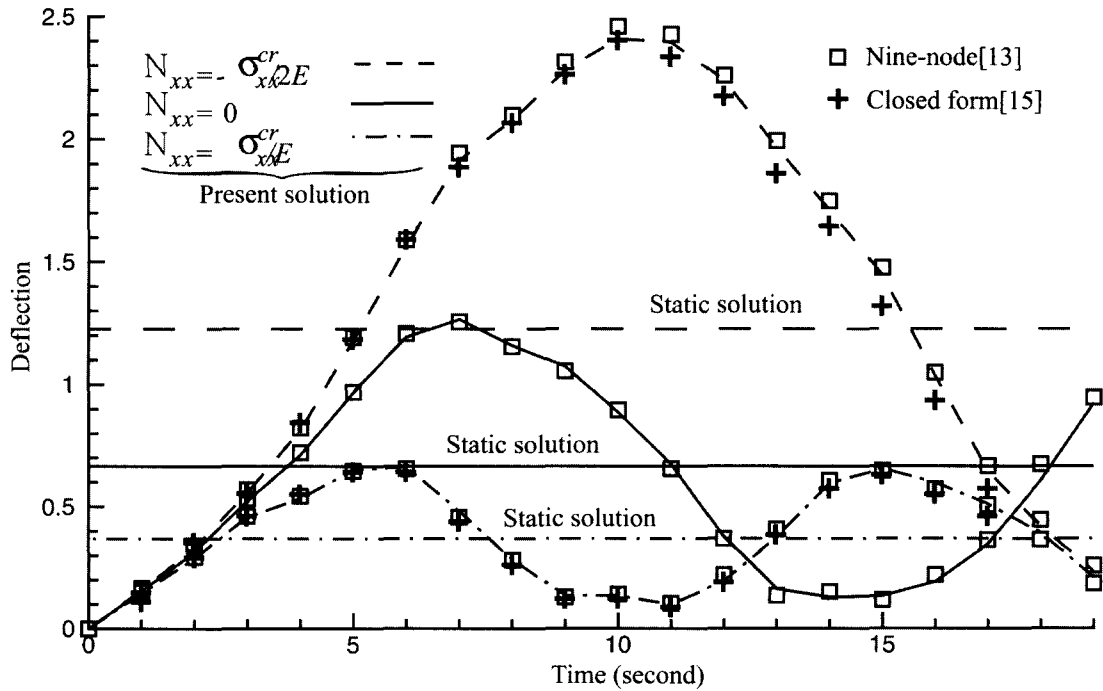


그림 5 시간에 따른 판의 중앙처짐

수 있도록 사절점 판요소에 대한 가변형도를 자연자표계에 준하여 명시적으로 유도하였다. 수치해석결과로부터 개발된 판요소는 정해와 근접한 결과를 도출함을 알 수 있었고 가형도법을 채용한 고차 판요소와도 유사하게 거동하였다. 따라서 개발된 판요소는 동적 시간이력해석에 매우 유용하게 쓰일 것으로 사료된다.

### 감사의 글

본 연구는 한국과학기술부의 원자력 중장기연구개발사업의 일환으로 수행되었음.

### 참 고 문 헌

1. Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S. *Theory of plates and shells*, 2nd edition, McGraw-Hill, New York, 1961
2. Reissner, E., "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plate," *ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 12, 1945, pp.69~76
3. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. and Too, J. M., "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 3, 1971, pp.275~290
4. Hughes, T. J. R., Taylor, R. L. and Kanok-Nuchulchai, W., "A simple and efficient finite element for plate bending," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 11, 1977, pp.1529~1543
5. Wilson, E. L., Taylor, R. L., Doherty, W. P. and Ghabousi, J., "Incompatible displacement models," *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, ed. S.J. Fenves et al., Academic Press, New York, pp.43~57, 1973
6. Bathe, K. J. and Dvorkin, E. N., "A continuum mechanics based on four-node shell element for general nonlinear analysis," *Engineering Mechanics*, Vol. 1, 1984, pp.77~88
7. 이상진, Ma, H., 전단과대현상의 해석적 고찰, 한국전산구조공학회 춘계학술발표회, 1993, pp.11~18
8. Hughes, T. J. R., *The finite element method-Linear static and dynamic finite element analysis*, Prentice Hall, New Jersey, 1987
9. Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., *The finite element method*, 4th edn., McGraw Hill, London, 1989
10. Hinton, E., Rock, T. A. and Zienkiewicz, O. C., "A note on mass lumping and related processes in finite element method," *Int. J. Earthquake Eng. Struc. Dyn.*, Vol. 4, 1976, pp.245~249
11. Hinton, E., Owen, D. R. J. and Shantaram, D., "Dynamic transient linear and nonlinear behaviour of thick and thin plates", in *The mathematics of finite element and application II(MAFELAP 1975)*, Academic Press, New York and London, 1976
12. Hinton, E., "The dynamic transient analysis of axisymmetric circular plate by the finite element method," *J. Sound and Vibration*, Vol. 46, 1976, pp.465~472
13. Huang, H.C. and Hinton, E., "A nine node Lagrangian Mindlin plate element with enhanced shear interpolation," *Engng. Comp.* Vol. 1, 1984, pp.369~379
14. Reismann, H. and Lee, Y. C., "Forced motions of rectangular plates," in *Proc. 4th Biennial Southeastern Conf. Theoretical and Applied Mechanics*, Tulane University, New Orleans, Pergamon Press, New York, 1968
15. Hinton, E. and Vuksanovic, Dj., "Closed form solutions for dynamic analysis of simply supported Mindlin plates," in *Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells*, Pineridge Press, Swansea, 1987