

난류유동 및 대류열전달에 대한 비선형 난류모형의 개발

박태선* · 성형진*

(2001년 3월 2일 접수, 2001년 8월 14일 심사완료)

Development of a Nonlinear Near-Wall Model for Turbulent Flow and Heat Transfer

Tae Seon Park and Hyung Jin Sung

Key Words: Turbulence Model(난류모형), Nonlinear Stress-Strain Relation(비선형 응력-변형률 관계), Explicit Heat Flux Model(외재적인 열유속모형)

Abstract

A new nonlinear near-wall turbulence model is developed to predict turbulent flow and heat transfer in strongly nonequilibrium flows. The $k-\varepsilon-f_\mu$ model of Park and Sung⁽¹⁾ is extended to a nonlinear formulation. The stress-strain relationship is the third-order in the mean velocity gradients. The strain dependent coefficients are obtained from the realizability constraints and the singular behavior at large strains. An improved explicit heat flux model is proposed with the aid of Cayley-Hamilton theorem. This new model includes the quadratic effects of flow deformations. The near-wall asymptotic behavior is incorporated by modifying the f_λ function. The model performance is shown to be satisfactory.

기호설명			
b_{ij}	: 비등방텐서, $\overline{u_i u_j} / 2k - \delta_{ij} / 3$	Pr_t	: 난류프란틀수
C_f	: 벽면마찰계수, $\nu \frac{\partial U}{\partial y} / (0.5U_o^2)$	q_{wall}	: 벽면열유속
$C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$: 모형상수	Re_H	: 레이놀즈수, $U_o H / \nu$
D	: 세트직경	Re_D	: 레이놀즈수, $U_o D / \nu$
f_μ, f_2, f_λ	: 모형함수	Re_τ	: 레이놀즈수, $u_\tau \delta / \nu$
H	: 후향계단의 높이	St	: 열전달계수, $q_{wall} / (\rho C_p U_o) / (T_{wall} - T_{ref})$
k_f	: 열전도계수	T	: 평균온도
Nu	: 누셀트수, hD / k_f	T^+	: 무차원온도, $(T_{wall} - T) / q_{wall} / (\rho C_p u_\tau)$
Pr	: 프란틀수	T_{ref}	: 기준점의 평균온도
		u_τ	: 벽면마찰속도
		U_b	: 세트의 평균속도
		U_o	: 기준점의 평균속도
		x	: 주유동 방향의 좌표

* 회원, 한국항공우주연구원, 로켓엔진그룹
 † 책임저자, 회원, 한국과학기술원, 기계공학과
 E-mail: hjsung@cais.kaist.ac.kr
 TEL : (042)869-3027 FAX : (042)869-5029

- a_i : 난류열확산계수
- δ : 채널의 높이
- ε : 운동에너지 k 의 소산율
- $\sigma_k, \sigma_\varepsilon$: $k-\varepsilon$ 방정식의 난류프란틀수
- ν : 동점성계수
- ν_t : 와점성계수
- θ : 섭동온도

그렇지만 그들의 모형은 유동장의 변형률이 클 경우 좋지 않은 거동을 보이는 단점이 있다. 이런 형태의 모형은 유동장의 변형률이 열유속의 비선형성을 지배하지만 강제대류의 문제에서는 온도장이 유동장에 수동적인 물리량이기 때문에 많은 장점을 가지고 있다. 또한 온도장의 난류척도에 대한 추가적인 방정식을 요구하지 않으므로 안정적인 수치해석을 수행할 수 있다. 본 연구에서는 유동변형률이 큰 경우에도 적용할 수 있는 비선형 열유속모형을 제안하고자 한다.

1. 서 론

벽면 유동 및 온도 분포는 운동량 손실 및 열전달 예측에 있어서 매우 중요하다. 벽면에 수직 한 난류성분에 대해서 벽면이 강한 감쇄효과를 가지기 때문에 레이놀즈응력은 강한 비등방성을 나타낸다. 일반적으로 많이 사용되고 있는 표준 $k-\varepsilon$ 모형의 경우 응력-변형률의 관계가 선형적이어서 이런 비등방성을 적절히 예측할 수 없는 단점이 있다. 이러한 선형관계로부터 레이놀즈응력을 구하면 유동장에 강한 변형률이 존재하는 경우 모형의 현실성을 위반하게 된다.

난류모형에 비등방성 효과를 부여하기 위하여 비선형 응력-변형률 관계식에 많은 연구가 진행되어 왔다.⁽²⁻⁵⁾ 그렇지만 이러한 연구들은 벽면 경계조건이 없는 단순전단유동에 대한 연구가 주로 이루어졌고 벽면효과를 고려한 연구는 거의 없는 실정이다. 본 연구에서는 벽면효과가 없는 자유유동에서의 비등방성을 유지하면서 벽면근처의 비등방성을 고려하는 비선형 $k-\varepsilon$ 모형을 개발하고자 한다. 기본적인 비선형관계는 변형률과 와도텐서의 함수로서 Cayley-Hamilton 원리로부터 얻어진다.⁽¹¹⁾

난류 열전달의 예측은 일반적으로 Boussinesq 가정에 근거한 난류 열유속 모형이 많이 사용되어 왔다. 이 모형은 가정된 난류프란틀수 (Pr_t)에 의해서 난류 열유속 ($-\overline{\theta u_i} = (\nu_t/Pr_t) T_{,i}$)을 계산한다. 이러한 단순구배 형태의 열유속모형은 Pope의 선형원리를 만족하지만 박리 및 재부착 유동과 같은 유동장이 복잡한 경우 그 예측성이 떨어진다. 최근에 Rhee and Sung⁽⁶⁾은 비선형 열유속 모형을 제안하여 좋은 결과를 보여주었다.

2. 유동장 모형

2.1 $k-\varepsilon-f_\mu$ 지배방정식

정상상태의 난류유동에 대한 지배방정식은 Park and Sung⁽¹¹⁾이 제안한 선형 $k-\varepsilon-f_\mu$ 모형에 근거한다.

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1}$$

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\rho \partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right] \tag{2}$$

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} + F_{ij} \tag{3}$$

$$U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t / \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \varepsilon \tag{4}$$

$$U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t / \sigma_\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} f_2 \varepsilon) / T_s + C_P (1 - f_u) \nu_t \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \partial x_k} \right)^2 \tag{5}$$

여기서 F_{ij} 는 레이놀즈응력의 비선형항을 표시하고 다음절이 자세히 설명되어진다. 난류에너지의 생성항은 $P_k = -\overline{u_i u_j} \partial U_i / \partial x_j$ 로 표현되고 난류 레이놀즈수는 $R_t = k^2 / \nu \varepsilon$ 로 정의된다. 벽면의 효과가 없는 자유유동에서 난류에너지의 감소효과를 고려하기 위하여 모형함수 $f_2 = 1 - (2/9) \exp(-0.33 R_t^{1/2})$ 가 도입되었다. 난류시간척도(T_s)는 특이점을 없애기 위하여 Kolmogorov 시간척도를 최소값으로 이용하여 $T_s = \sqrt{(k/\varepsilon)^2 + 36(\nu/\varepsilon)}$ 으로 정의되었다. 모형상수들은 $\sigma_k = 1.1$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $C_{\varepsilon 2} = 1.9$ 와 $C_P = 0.8$ 로 이용되었다.

2.2 벽면감쇄함수

벽면감쇄함수 f_μ 는 벽면근접효과와 유동장의 비평형효과에 의한 와점성계수의 변화를 고려하기 위하여 두부분으로 나누어진다 ($f_\mu = f_{\mu 1} f_{\mu 2}$).⁽⁵⁾ $f_{\mu 1}$ 은 벽면근처에서의 감쇄효과를 고려하는 함수로서 기하학적 형상에 난류모형의 제한성이 제거된 형태이다. 기하학적 형상에 따른 어려움을 3차원 문제나 움직이는 경계를 가진 문제를 기존의 감쇄함수로 다루고자 할 경우 심각해진다.⁽¹⁾ 본 연구에서는 Helmholtz형태의 타원형방정식을 이용하여 이러한 어려운 점이 제거되었다.

$$\nu_i = C_\mu f_{\mu 1} f_{\mu 2} \frac{k^2}{\epsilon} \quad (6)$$

$$f_{\mu 1} = f_w^2 (1 + 20 \exp(-(R_f/120)^2) R_f^{-3/4}) \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 f_w}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{R_f}{A^2 L^2} (f_w - 1) \quad (8)$$

여기서 $C_\mu = 0.09$ 와 $A = 2.4$ 가 이용되었고 L 은 난류길이척도, $L = k^{1.5}/\epsilon$ 이다. 벽면에 접근함에 따라서 L 은 0으로 접근한다. 이러한 거동을 없애기 위하여 Kolmogorov 길이척도가 최소값으로 도입되었다, $L^2 = k^3/\epsilon^2 + 70^2 \sqrt{\nu^3/\epsilon}$.⁽⁷⁾ 모형에 대한 자세한 설명은 Park and Sung⁽¹⁾의 연구에 잘 나타나있다.

와점성계수에 변형률 함수를 부여하기 위하여 본 연구에서는 $f_{\mu 2}$ 가 도입되었다. 최근에 Park and Sung⁽⁸⁾은 다양한 변형률에 대한 체계적인 분석을 통하여 충돌제트유동에서 예측성능이 우수한 모형을 제안하였다.

$$f_{\mu 2} = \frac{C_{\mu 1} + C_{\mu 2} \xi + g^* (C_{\mu 3} g + C_{\mu 4} \xi^2)}{C_{\mu 5} g^4 + C_{\mu 6} (g\eta)^2 + C_{\mu 7} \xi^2 (g^* + C_{\mu 8} \eta^3)} \quad (9)$$

윗식에서 사용된 유동변형률에 관계된 변수들은 $\eta = C_\mu f_w S^*$, $\xi = C_\mu f_w W^*$, $g = 1 + 0.2\eta$ 그리고 $g^* = g^2 + \eta^2$ 로 각각 정의된다. $C_{\mu i}$, $i=1,5$ 모형상수를 나타내고 속도변형률과 와도텐서는

$$S_{ij}^* = 0.5 (U_{i,j} + U_{j,i}) k/\epsilon, \quad W_{ij}^* = 0.5 (U_{i,j} - U_{j,i}) k/\epsilon, \quad S^* = \sqrt{2 S_{ij}^* S_{ij}^*} \quad \text{그리고} \quad W^* = \sqrt{2 W_{ij}^* W_{ij}^*} \quad \text{등으로 표현된다.}$$

벽면근처에서는 난류량의 감소효과가 와점성계수에 미치는 영향이 상대적으로 크기 때문에 유동변형률 효과를 감소시키기 위해서 f_w 함수가

도입되었다.

본 연구에서는 식 (9)에 대한 실현성을 부여하기 위하여 수정된 형태를 제안하고자 한다. 일반적으로 레이놀즈응력은 음의 수직응력을 가지지 않고 Schwarz's 부등식을 만족해야만 한다. 비회전유동에서 어떤 난류모형이 실현가능해지기 위해서는 무한의 변형률이 존재하는 방향으로 모든 에너지가 제거되는 현상을 예측할 수 있어야 한다. 예를들면, 이완하는 형태의 변형률 S_{11} 이 있을 경우 $\overline{u_1 u_1}$ 은 음의 값을 가지지 않으면서 감소해야만 한다. 이러한 조건은 비등방텐서 b_{ij} ($b_{ij} = \overline{u_i u_j} / 2k - \delta_{ij}/3$)가 $-1/3 \leq b_{ij} \leq 2/3$ 에 존재해야함을 나타낸다. 이 결과를 만족하는 $f_{\mu 2}$ 는 $0 \leq f_{\mu 2} \leq 2/(3C_\mu S^*)$ 이 되고 유동변형률이 큰 경우 2개의 임계값을 가져야 한다. 즉 $S^* \rightarrow \infty$ 에서 $f_{\mu 2} \rightarrow 2/3$ 혹은 $f_{\mu 2} \rightarrow 0$ 이다. 여기서 첫 번째 경우는 레이놀즈응력의 비선형항이 $2k/3$ 와 같아지는 경우이고 두 번째는 난류에너지가 소멸되어 레이놀즈응력이 제거되는 경우이다. 이것으로부터 새로운 $f_{\mu 2}$ 가 다음과 같이 얻어진다.

$$f_{\mu 2} = \frac{4 + \xi + 4\xi^2(1 + \eta^2)}{3 + 6\xi^2(1 + 5\eta^3) + 8\eta^2} \quad (10)$$

모형상수 C_{e1}^* 는 대부분의 모형에서 순수한 상수를 이용하는데 최근 몇몇의 연구에서 이 상수의 변화는 박리 및 재부착유동에서 커다란 영향이 있고 제트유동의 퍼짐률에 민감한 변화가 있음을 보였다.^(1,5) 이러한 변화는 소산률의 생성항이 난류에너지 생성에 1차로 비례하지 않음을 나타내는 것이다. 본 연구에서는 단순 전달유동의 평형관계 $C_{e1}^* = 1 + (C_{e2} - 1)/(P_k/\epsilon)_\infty$ 를 이용한다.⁽⁹⁾ 여기서 $(P_k/\epsilon)_\infty \sim f_{\mu 2} \eta^2$ 을 이용하여 간단하게 $C_{e1}^* = 1.42 + C_\mu/(1 + f_{\mu 2} \eta^2)$ 로 모형화 하였다.

2.3 레이놀즈응력과 변형률의 비선형 관계

레이놀즈응력의 비선형 관계는 일반적으로 균일전단조건이 주어진 유동에 대한 레이놀즈응력 전달방정식의 평형조건에서 다양한 수학적 방법을 이용하여 유도된다.⁽⁸⁻¹¹⁾ 이러한 형태의 모형은 물리적으로 레이놀즈응력 전달방정식 모형의

정확도를 따라가면서 선형모형의 수치적인 안정성을 가지는 잇점이 있다. 기본적인 모형의 형태는 평형가정에서 출발하였기 때문에 일반적인 유동조건에 대하여 예측성이 떨어질 수 있지만 기본형태에서 유동조건에 영향을 포함한 계수를 도입함으로써 비평형 유동조건에도 좋은 예측성을 보여왔다.^(2,3) Park⁽¹¹⁾과 Park and Sung⁽⁸⁾의 연구 결과를 이용하여 Cayley-Hamilton 정리를 고차항까지 적용하면 3차 항을 가지는 비선형 τ_{ij} 는 다음과 같이 표현된다. 이 결과는 기존의 연구⁽²⁻³⁾와 같은 형태를 가진다.

$$\begin{aligned} \tau_{ij} = & \frac{2}{3} k \delta_{ij} - 2k C_{\mu} f_{\mu} S_{ij}^* \\ & + k \beta_1 \left(S_{ik}^* S_{kj}^* - \frac{1}{3} S_{mn}^* S_{mn}^* \delta_{ij} \right) + k \beta_2 \left(W_{ik}^* S_{kj}^* - S_{ik}^* S_{kj}^* \right) \\ & + k \beta_3 \left(W_{ik}^* W_{kj}^* - \frac{1}{3} W_{mn}^* W_{mn}^* \delta_{ij} \right) \\ & + k \beta_4 \left(S_{ki}^* W_{ij}^* + S_{kj}^* W_{li}^* \right) S_{kl}^* \\ & + k \beta_5 \left(W_{ij}^* W_{lm}^* S_{mj}^* + S_{ij}^* W_{lm}^* W_{mj}^* \right) \\ & + k \beta_6 \left(S_{ij}^* W_{lm}^* W_{lm}^* - \frac{2}{3} S_{lm}^* W_{mn}^* W_{nl}^* \delta_{ij} \right) \\ & + k \beta_7 S_{ij}^* S_{mn}^* S_{mn}^* + k \beta_8 S_{ij}^* W_{mn}^* W_{mn}^* \end{aligned} \quad (11)$$

공학적인 응용성을 고려한 대부분의 비선형모형은 2차항까지 고려하고 있지만 최근의 Craft 등⁽³⁾의 연구는 유선곡률효과와 강한 회전률이 존재하는 유동에 대해서 3차항의 효과가 큼을 보였다. 본 연구에서는 3차항이 고려된 비선형 τ_{ij} 모형이 개발되고 재순환유동과 정체점이 있는 유동에 대한 2차항의 영향이 조사된다. 식 (11)은 7개의 결정되지 않은 계수를 가지고 있는데 이 계수들을 해석적으로 구하는 것은 매우 어렵다. 따라서 실현성조건으로부터 기본형태를 유도한 다음 실험결과와 DNS결과를 이용하여 최종적인 계수 β_i 형태를 결정하고자 한다.

2차원 유동 변형률이 존재하는 경우 평균속도구배는 다음과 같이 정의된다.

$$S_{ij}^* = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{plane strain} \quad (12)$$

$$S_{ij}^* = \begin{pmatrix} 0 & S & 0 \\ S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{homogeneous shear} \quad (13)$$

계수들의 일관성을 위하여 β_i 는 $\beta_i \geq 0$ 과 $\beta_i = f(f_{\mu 2}, f_w)$ 의 관계를 가진다고 가정한다. 계

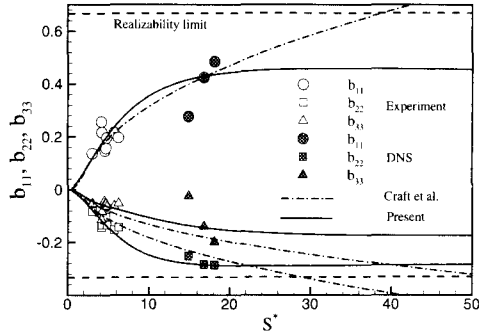


Fig. 1 Predicted stress anisotropy for a homogeneous shear flow

수를 구하는 과정은 실현성 구속조건을 이용하여 β_1 과 β_2 를 결정하고 3차항에 관련된 계수들은 β_1 과 β_2 의 함수로 생각하여 경험적으로 결정한다. 평면변형(plane strain)의 경우 레이놀즈응력의 수직항은 식 (14)로 표현된다.

$$\begin{cases} \overline{u_1^2} = 2k/3 - 2k C_{\mu} f_{\mu 2} \lambda + k \beta_1 \lambda^2 / 3 \\ \overline{u_2^2} = 2k/3 + 2k C_{\mu} f_{\mu 2} \lambda + k \beta_1 \lambda^2 / 3 \\ \overline{u_3^2} = 2k/3 - k \beta_1 \lambda^2 / 3 \end{cases} \quad (14)$$

여기서 $\beta_i \geq 0$ 이기 때문에 β_1 에 대한 $\overline{u_3^2}$ 의 조건이 가장 엄밀하다. 이것으로부터 $\beta_1 \leq 1/\lambda^2 = 4/S_*^2$ 이 얻어진다. 균일전단유동의 경우 와도텐서는 $W_{12}^* = -W_{21}^* = \omega$ 와 기타항=0의 값을 가지고 레이놀즈응력은 식 (15)으로 표현된다.

$$\begin{cases} \overline{u_1^2} = 2k/3 + k \beta_1 S^2 / 3 + k \beta_2 2S\omega \\ \overline{u_2^2} = 2k/3 + k \beta_1 S^2 / 3 - k \beta_2 2S\omega \\ \overline{u_1 u_2} = -2k C_{\mu} f_{\mu 2} S \end{cases} \quad (15)$$

Schwarz부등식으로부터 물리적으로 타당한 $\beta_2 2S\omega \leq \sqrt{(2/3 + \beta_1 S^2 / 3)^2 - (2C_{\mu} f_{\mu 2} S)^2}$ 의 관계가 얻어진다. $S^* = 2S$ 와 $W^* = 2\omega$ 에서

$\beta_2 S^* W^* / 2 \leq \sqrt{(2/3 + \beta_1 S^{*2} / 12)^2 - (C_{\mu} f_{\mu 2} S^*)^2}$ 으로 일반화된다. 여기서 β_1 이 최소값 0이고 $C_{\mu} f_{\mu 2} S^*$ 이 최대값 2/3일 때 $\beta_2 \leq 0$ 의 관계가 얻어지는데 이것은 초기 가정 $\beta_i \geq 0$ 에 모순된다. 따라서 $\beta_1 = 4/S^{*2}$ 으로 선택을 하고 다시 정리하면

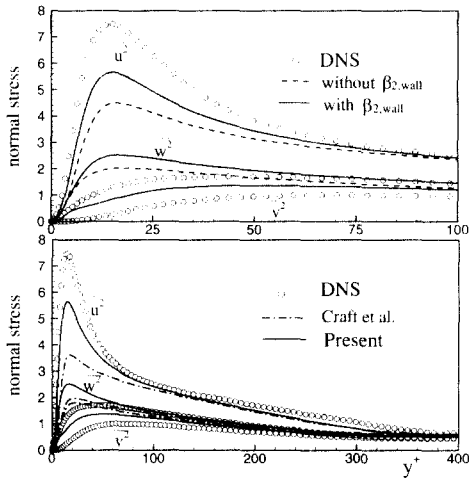


Fig. 2 Comparison of predicted normal stresses

$\beta_2 \leq \sqrt{1 - (C_\mu f_{s1} f_w^2 S^*)^2 / (S^* W^* / 2)}$ 이 된다. 이 관계식들은 물리적으로 타당한 계수모형을 구하는 기본조건식을 구성한다. 나머지 β_i $i=3,7$ 은 다양한 수치계산을 통하여 경험적으로 최적화되고 최종적인 계수의 형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \beta_1 &= C_\mu f_{s1} f_w^2, & \beta_2 &= C_\mu f_{s1} f_w^2 + \beta_{2,wall}, \\ \beta_3 &= 0, & \beta_4 &= C_\mu f_{s1} (f_w f_w)^2, \\ \beta_5 &= -C_\mu f_{s1} (f_w f_w)^2, & \beta_6 &= 1.1 C_\mu f_{s1} (f_w f_w)^2, \\ & & \beta_7 &= -C_\mu f_{s1} (f_w f_w)^2. \end{aligned} \quad (16)$$

여기서

$$f_{s1} = \frac{1 + \xi^2(1 + \eta)}{1 + \xi^2(1 + \eta + 6\eta^2) + 40\eta^3}, \quad f_w = \frac{(1 + \eta_s)\sqrt{1 - (\eta f_w)^2}}{1 + 4\eta_s(1 + \eta_s + 2\eta_s^2)}$$

$\eta_s = \max(\eta, 0.5\xi)$ 등이 이용되었고 $\beta_{2,wall}$ 은 벽면근처에서의 비등방성을 표현하기 위한 항이다. 벽면효과가 없는 ($f_w = 1$) 균일전단유동에 대한 모형의 예측결과를 Craft 등⁽³⁾의 모형과 Fig. 1에 비교해서 나타내었다. 두 모형은 실험결과와 DNS 데이터에 잘 일치하고 있지만 Craft 등⁽³⁾의 모형은 변형률이 매우 큰 경우 ($S^* \geq 30$) 실현성 구속조건을 벗어나고 있다. 이것은 변형률이 큰 유동조건에서 이 모형은 비물리적인 예측을 줄 수 있는 가능성이 존재함을 보이는 것이다. 이러한 거동은 비선형 모형의 2차항이 $\sqrt{S^*}$ 이 비례해서 증가하기 때문에 나타난 현상이다.

벽면근처영역에서 비선형모형이 비등방성을 잘

표현하기 위해서는 선형모형의 레이놀즈수 모형의 수정방법을 도입하여야 한다.⁽¹⁹⁾ 또한 $\overline{u_i u_j}$ 의 비선형항이 $2k/3$ 과 균형을 이루는 것이 타당하다. 본 연구에서는 벽면근처의 비등방성을 제어하는 변수를 β_2 로 선택하였고 f_w 를 이용하여 벽면효과가 자연스럽게 소멸되도록 하였다. 벽면근처에서의 변형률 $(k/\epsilon)\sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ 은 $\sqrt{R_t}/(1 + \nu_t/\nu)$ 로 표현할 수 있다.⁽⁵⁾ 이러한 표현은 벽면근처의 유동은 박리 및 재부착 유동이나 정체점을 제외한 경우 벽면에 평행유동으로 생각할 수 있기 때문에 가능하다. 이 변수를 이용하여 β_2 의 벽면 수정항은 $\beta_{2,wall} = (1 - f_w)/(S^* W^* + S_w^2)$ 로 모형화하였고 $S_w = \sqrt{R_t}/(1 + \nu_t/\nu)$ 로 정의된다. 이 모형은 벽면에서 떨어진 부분에 대한 단순전단 유동의 비등방성을 유지하면서 벽면근처의 비등방성을 개선한다. Fig. 2에 $\beta_{2,wall}$ 의 영향을 나타내었다. 여기서 수직응력은 벽면마찰속도(u_τ)에 의해서 무차원화되었다. 벽면근처의 레이놀즈응력 분포가 $\beta_{2,wall}$ 에 의해서 커다랗게 개선됨을 볼 수 있고 $y^+ = u_\tau y/\nu \geq 100$ 에서 그 영향이 사라짐을 알 수 있다.

3. 난류열유속 모형

열전달 해석을 위한 온도방정식은 다음과 같다.

$$U_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\nu}{Pr} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} - \overline{\theta u_j} \right] \quad (17)$$

식 (17)에서 열유속 ($-\overline{\theta u_j}$)을 구하기 위한 비선형 난류열유속 모형은 유동장 모형과 비슷한 방법으로 유도된다. 열응력텐서로부터 얻어지는 대수열유속 모형은 무차원 변수를 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$b_{\theta i} = - \left(\frac{2}{3} \delta_{ij} + 2b_{ij} \right) T_{,j}^* - (S_{ij}^\theta + W_{ij}^\theta) b_{\theta j} \quad (18)$$

여기서 $b_{\theta i} = \overline{\theta u_i} / \sqrt{k T_{ref}}$, $S_{ij}^\theta = C_{T2} S_{ij} (k/\epsilon)$, $W_{ij}^\theta = C_{T3} W_{ij} (k/\epsilon)$ 와 $T_{,j}^* = C_{T1} T_{,j} (k^{1.5}/\epsilon T_{ref})$ 로 정의되고 C_{Ti} , $i=1,3$ 은 열유속 전달방정식의 모형상수들($C_{\theta i}$)에 다음과 같은 관계를 가진다.

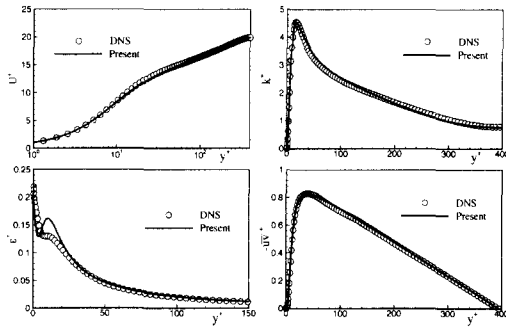


Fig. 3 Comparison of predicted U^+ , k^+ , ϵ^+ and $-\overline{uv}^+$

$$C_{T1} = 1/C_{\theta1}, \quad C_{T2} = (1 - C_{\theta2} - C_{\theta3})/C_{\theta1}$$

$$C_{T3} = (1 - C_{\theta2} + C_{\theta3})/C_{\theta1}$$

식 (18)은 $b_{\theta i}$ 가 내재적으로 표현된 형태로서 수치적인 효율성이 떨어진다. 최근에 몇몇 연구자들은 이러한 문제를 해결하기 위하여 외재적인 즉 S_{ij}^{θ} 와 W_{ij}^{θ} 에 대수적인 관계를 가지는 모형을 개발하였다.^(6,12~14) 이들의 모형은 상당히 긍정적인 결과를 보여주고 있지만 강한 유동변형이 존재하는 경우 예측성이 떨어지는 단점이 있다. 따라서 본 연구에서는 다양한 유동변형이 존재하는 경우 열전달 예측성이 우수한 모형을 개발하고자 한다.

우선 $\overline{\theta u_i} = f(u_i, S_{ij}, W_{ij}, T_i, k, \epsilon)$ 로 생각하면 난류열유속에 대한 비선형대수식은 S_{ij}^{θ} 와 W_{ij}^{θ} 를 이용하여 행렬식으로 표현된다.

$$b^* = \left[\gamma_1 \left(\frac{2}{3} I + 2b \right) + \gamma_2 (S + W) \right] T$$

$$+ \left[\gamma_3 (S^2 + W^2) + \gamma_4 (SW + WS) \right] T \quad (19)$$

여기서 식 (18)과 Cayley-Hamilton정리의 관계식:

$$S^3 = (1/3) \{S^3\} I + (1/2) \{S^2\} IS,$$

$$SW^2 + WS^2 = (1/2) \{W^2\} IS + (1/2) \{S^2\} IW,$$

$$W^3 = (1/3) \{W^3\} I + (1/2) \{W^2\} IW,$$

$$S^2 W + SWS + WSW + W^2 S = 0$$

를 이용하면 다음과 같은 계수들의 관계가 얻어진다.

$$\gamma_1 = -1$$

$$\gamma_3 = \gamma_4 = -\gamma_2$$

$$\gamma_2 I = (2I/3 + 2b)/(I - 0.5(\{S^2\} + \{W^2\}))I$$

괄호(.)는 행렬의 trace를 표현한다. 계수 γ_1 을 제외한 나머지 계수는 γ_2 에 관계되고 이 계수가 비선형항들의 비물리적인 증가/감소를 제어하게 된다. 이 계수는 유동변형을 변수를 이용하여 다시 쓰면 $\gamma_2^* = 1/(1 + 0.5\eta_i)$, $\eta_i^* = W_{ij}^{\theta}W_{ij}^{\theta} - S_{ij}^{\theta}S_{ij}^{\theta}$ 로 표현되어진다. 그런데 $\eta_i^* = -2$ 일 경우 분모가 0으로 되어서 수정이 필요함을 알 수 있다. 수정을 위해서 계수의 기본적인 거동을 살펴보면 S_{ij}^{θ} 와 $W_{ij}^{\theta} \rightarrow 0$ 이면 $\gamma_2^* \rightarrow 1$ 이고 S_{ij}^{θ} 와 $W_{ij}^{\theta} \rightarrow \infty$ 이면 $\gamma_2^* \rightarrow 0$ 으로 접근한다. 이러한 접근거동을 바탕으로 Pade 근사법을 이용하여 γ_2^* 는 $\gamma_2^* \sim (3 + \eta_i^2)/(2 + \eta_i^4 + \xi_i^2(1 + \eta_i^2))$ 형태로 특이점이 제거되었다. 여기서 $\eta_i = \sqrt{S_{ij}^{\theta}S_{ij}^{\theta}}$ 고 $\xi_i = \sqrt{W_{ij}^{\theta}W_{ij}^{\theta}}$ 이다. 일반적으로 강제회전에 의한 응력의 비등방성은 생성되지 않는다는 RDT (rapid distortion theory)의 결과는 비선형 레이놀즈응력의 기본적인 구속조건이 된다.⁽¹⁵⁾ 열유속 모형에 같은 개념을 적용하여 순수한 회전항은 제거된다. 최종적인 열유속 모형은 벽면효과가 고려되어 다음과 같이 정리된다.

$$\overline{\theta u_i} = -\alpha_i \left(\frac{2}{3} \delta_{ij} + 2f_w b_{ij} \right)$$

$$+ \alpha_{ik} (S_{km}^{\theta} + W_{km}^{\theta}) T_{,m}$$

$$- 2\alpha_{ik} (S_{kt}^{\theta} S_{tm}^{\theta} + S_{kl}^{\theta} W_{lm}^{\theta} + W_{kt}^{\theta} S_{lm}^{\theta}) T_{,m} \quad (20)$$

$$\gamma_2^* = \frac{(3 + \eta_i^2) f_w}{(2 + \eta_i^4 + \xi_i^2(1 + \eta_i^2))} \quad (21)$$

여기서 $\alpha_{ik} = \alpha_i \gamma_2^* (\overline{u_i u_k} / k)$ 로 정의된다. 벽면효과는 f_{λ} 에 의해서 고려된다. 일반적인 벽면임계 거동 $-\overline{v\theta} \sim y^3$ 와 $\partial T / \partial y \sim y^0$ 을 만족하도록 모형화하였다.

$$\alpha_i = C_{\lambda} f_{\lambda} \nu_i \quad (22)$$

$$f_{\lambda} = [1 - \exp(-8f_w)]^3 \quad (23)$$

$$C_{\lambda} = \frac{1}{1.6} \left(1 + \frac{12.5}{R_i^{0.5}} \right)^2 \left(1 + \frac{130}{R_i Pr} \right)^{-0.25} \quad (24)$$

Tavoularis와 Corrsin⁽¹⁶⁾의 실험결과를 이용하여

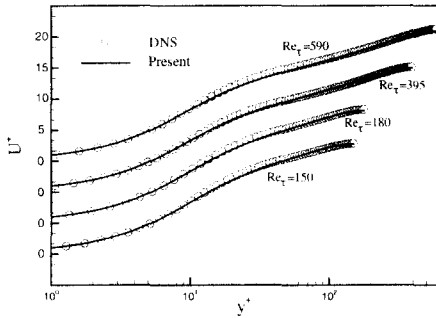


Fig. 4 Reynolds number dependence

모형상수들은 $C_{T2}=0.2$, $C_{T3}=0.22$ 로 결정되었다. 위 모형은 다음의 열유속비 관계를 유지한다.

$$\begin{aligned} T, 1 \neq 0 \text{ 일 때 } \quad \overline{u\theta} / \nu\theta &= -6.55 \\ T, 2 \neq 0 \text{ 일 때 } \quad \overline{u\theta} / \nu\theta &= -1.45 \end{aligned}$$

4. 결과 및 토의

새로운 난류모형은 다양한 방법에 의해서 검증 단계를 거쳐야 그 모형의 일반성을 가진다. 일반적으로 단순한 채널유동에서 박리 및 재부착이 존재하는 재순환유동 그리고 기하학적으로 복잡하거나 경계조건이 복잡한 경우로 검증을 수행한다. 각각의 단계에서 모형에 도입된 항들과 함수들의 기본적인 거동을 확인할 수 있고 또한 단순 속도구배에서 일반화한 항들의 특징이 나타나게 된다.

4.1 수치해석 방법

우선 2차원 유동의 해석을 위한 수치해석 방법은 다양하게 존재하지만 기본적인 방법은 유한체적법에 근거한 Park⁽¹¹⁾의 다중격자법을 이용하였다. 대류항은 HPLA (hybrid linear and parabolic approximation) 기법을 이용하였고, 비엇갈림 격자계를 도입하였다. 압력과 속도의 연계성 결여로 생기는 해의 진동을 방지하기 위하여 운동량 보간법을 이용하였다. 압력과 속도의 연결은 SIMPLEC 알고리즘을 이용하였고, 모든 방정식의 잔류량이 10^{-4} 보다 작을 때 수렴한 것으로

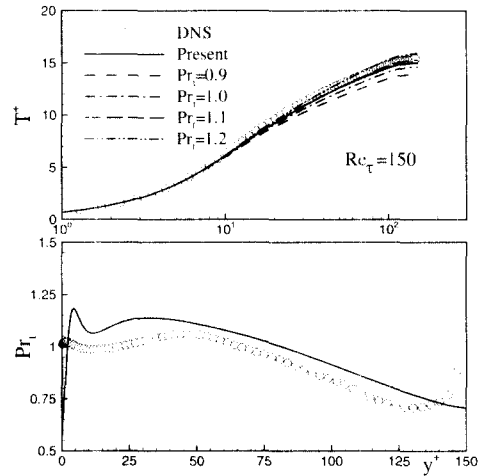


Fig. 5 Comparison of predicted T^+ and Pr_t

판정하였다. 출구면의 조건은 Neumann 조건을 사용하고 벽면에 대해서는 $U=V=0$, $k=f_w=0$, $\epsilon_w=2\nu k/n_b^2$ 그리고 $\partial p/\partial n=0$ 이 사용되었다. 여기서 n 은 벽면의 수직방향을 나타내고 n_b 는 벽면에서 떨어진 첫 번째 격자점의 수직거리를 표시한다.

후향계단의 경우 계산에 사용된 격자계는 다양한 해석을 통하여 격자의 의존성이 없는 233×141 이 선택되었다. Park⁽¹¹⁾의 연구를 기본으로 계산영역은 입구는 박리점으로부터 5H로 선택하고 출구는 유동이 충분히 발달하기 위하여 30H로 선택하였다. 충돌제트에 대한 수치해석 방법은 Park and Sung⁽⁸⁾에 잘 나타나있다.

4.2 완전히 발달된 채널유동

완전히 발달된 채널에서 벽면에 수직한 방향의 속도구배만 존재한다. 따라서 도입된 함수들의 벽면근접거동의 정확성을 검증할 수 있다. 수치해석은 2차 중심차분법을 이용하여 201개의 비균일 격자를 이용하였다. 이런 조건에서 점성저층에서 log-layer로의 유동전이 특징을 살펴볼 수 있다. 난류모형에서 주로 감쇄함수가 이러한 역할을 하게된다. 여기서 모든결과는 벽면마찰속도 (u_τ)에 의해서 무차원화되었고 DNS⁽¹⁷⁾결과와 비

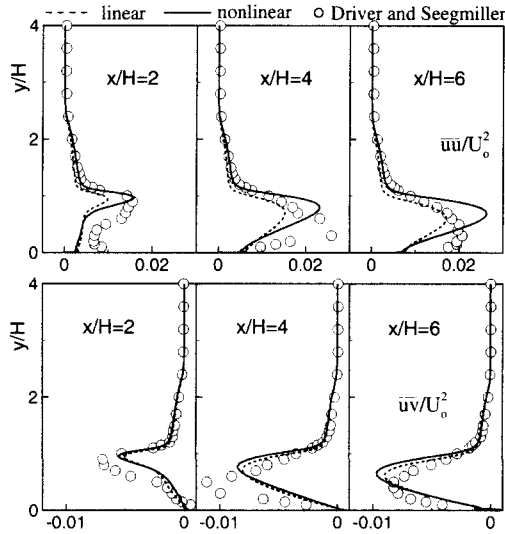


Fig. 6 Predicted Reynolds stresses

교하기 위하여 $Re_\tau = 395$ 를 선택하였다. Fig. 3에서 볼 수 있듯이 현재 모형은 벽면난류의 특징을 잘 예측하고 있다. 난류에너지 소산율은 본 연구의 주된 관심사항이 아니지만 현재모형의 예측은 우수하게 나타나고 있다. 더욱 복잡한 항들이 도입되면 DNS⁽¹⁷⁾결과와 잘 일치하는 것으로 지금까지 연구되어 있다.

레이놀즈수 의존도는 모형의 일반성을 확보하는데 매우 중요한 척도로서 현재모형은 Fig. 4에서 보듯이 매우 잘 예측하고 있다. 이러한 결과는 단순속도구배에서 예측성을 보여주는 것으로 2차원과 3차원 같은 유동변형이 존재할 경우 검증되어야 한다.

개발된 비선형 난류열유속 모형이 채널유동에서 검증되었다. DNS⁽¹⁸⁾결과를 보면 채널에서 난류프란틀수 (Pr_t)는 0.7~1.1의 분포를 가진다. Fig. 5는 비선형 모형과 $Pr_t = constant$ 모형을 비교하였다. 현재의 유동모형에 $1.1 \leq Pr_t \leq 1.2$ 에서 가장 좋은 예측을 보이고 있는데 개발된 비선형 열유속 모형에 의한 Pr_t 의 분포에서 보면 같은 경향을 보이고 있다. 결과적으로 난류프란틀수는 DNS⁽¹⁸⁾결과와 비교할 때 1근처의 값이 타당함을 알 수 있다. 이 결과는 단순 채널유동에서의 나타난 특징이지만 복잡한 2차원 유동에

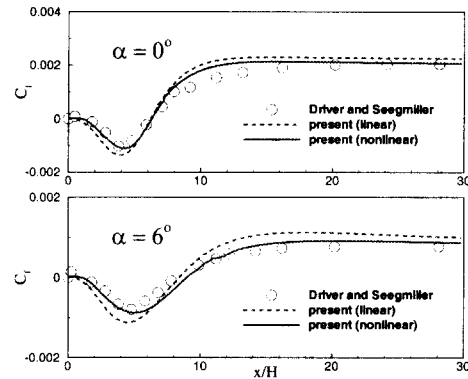


Fig. 7 Comparison of wall friction coefficient

서 열전달해석에 기준을 제공한다.

4.3 박리 및 재부착유동

박리 및 재부착유동은 공학적인 응용분야에서 자주 접하는 난류유동 구조로 후향계단유동으로 단순화하여 많은 연구가 행하여져 왔다.^(1,2,5,6) 이 유동은 기하학적으로 단순한 형태이지만 박리된 제트유동, 강한 유선곡률, 재부착, 역압력구배 유동과 구석와류등 복잡한 유동구조를 가진다. 따라서 이런 유동에서 모형의 예측성이 우수하게 평가되면 다른 형상에서도 좋은 결과를 기대할 수 있기 때문에 많은 연구자들은 1차적인 모형평가의 대상으로 채택하여 왔다. 본 연구에서는 비선형 레이놀즈응력 모형과 비선형 난류열유속 모형의 예측성을 검토하기 위하여 Driver와 Seegmiller의 실험⁽²¹⁾과 Vogel과 Eaton의 실험⁽²²⁾이 선정되었다. 수치계산에 이용된 유동조건은 참고문헌에 자세히 설명되어 있다.^(1,5,6,8)

Fig. 6은 재순환영역에서의 레이놀즈응력 분포를 보여주고 있다. 선형모형과 비선형모형을 비교할 때 재순환영역 안에서 비선형모형이 수직응력 분포를 잘 예측하고 있다. 그렇지만 전단응력의 예측성은 개선의 효과가 크지 않음을 보여준다. 이것은 비선형모형이 수직응력의 비등방성을 개선하는데 주된 영향이 있기 때문이다.

Fig. 7은 후향계단 후류벽면에서 벽면의 마찰계수 (C_f) 분포를 보여주고 있다. 그림에서의 α 는 압력구배를 변화시키기 위한 후향계단 윗벽의 기울기를 나타낸다. C_f 의 정확한 예측은 박리

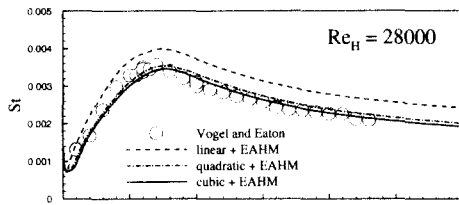


Fig. 8 Predicted St of nonlinear models

및 재부착유동에 대한 모형의 예측성을 검토하는 중요한 인자이다. 이 계수는 난류모형의 벽면근접거동 특징과 밀접한 관계가 있다. 예측된 계수의 분포를 보면 선형모형과 비선형 모형의 분명한 차이를 볼 수 있다. 재순환 영역이 재부착이후의 재발달 경계층 영역에서 선형모형은 C_f 값을 약간 크게 예측하고 있지만 비선형 모형은 상당히 개선된 결과를 보여주고 있다. 새로 개발된 응력-변형률관계와 비선형 열유속 모형의 예측성을 검토하기 위하여 열전달이 있는 후향계단에 대한 검토가 이루어졌다. Fig. 8은 응력-변형률 모형의 형태를 변화시켰을 때 나타나는 St 에 대한 예측이다. 실험과 비교할 때 현재의 모형은 전반적으로 우수한 예측을 보이고 있다. 비선형 열유속모형과 응력-변형률의 관계를 살펴보면 선형모형에 비해서 비선형모형이 실험치와 잘 일치하고 있다. 여기서 선형모형은 응력-변형률의 표준형태 $b_{ij} = -\nu_t(U_{i,j} + U_{j,i})/2k$ 가 이용되었다. 선형모형과 2차 비선형모형의 차이보다 2차 비선형모형과 3차 비선형모형의 차이가 상당히 작게 나타남을 볼 수 있다.

또한 열전달모형의 변화에 따른 예측결과를 Fig. 9에서 보면 유동장 모형의 변화보다 열유속 모형의 변화가 열전달 예측에 커다란 영향이 있음을 볼 수 있다. $Pr_t = 0.9$ 모형과 Kays and Crawford 경험식은 박리 및 재부착유동의 열전달 예측에 좋은 결과를 줄 수 없음을 알 수 있다. 새로 개발된 비선형 열유속 모형은 기존의 연구와 같이 유동변형률의 비선형성에 의해서 결정된다. 여기서 0th는 식 (20)에서 속도구배항이 없는 대각항만을, 1th는 속도구배의 1차곱항까지 고려함을 나타낸다. 0차함수의 결과의 우수성은 일반적인 구배확산모형이 열응력의 대부분을 표

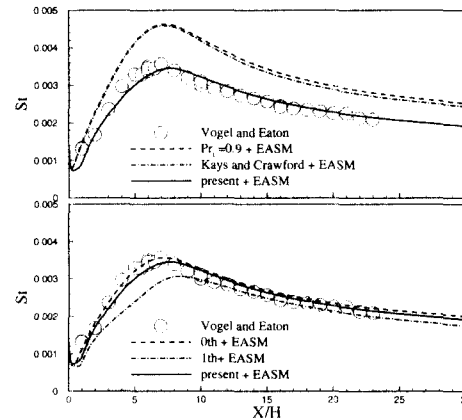


Fig. 9 Predicted St of heat flux models

현함을 보여주는 것이다. 대부분의 비선형 열유속모형은 속도구배에 1차함수로 표현되는데 Fig. 9에서 보는 바와 같이 1차함수로 표현된 열유속 모형은 St 를 작게 예측하는 효과가 있다. 2차함수로 표현된 모형은 이런 감소효과를 완화하는 효과를 보이고 있다. 1차함수 열유속모형을 이용할 때 C_f 가 크게 예측된 경우 St 의 예측분포가 좋아질 가능성이 있음을 보여주는 결과이다. 따라서 열유속 모형은 속도구배의 2차항까지 고려해야 일반성이 있는 모형이 됨을 알 수 있다.

4.4 벽면 충돌제트 유동

벽면 충돌제트 유동은 벽면과의 충돌에 의한 커다란 열전달효과를 얻을 수 있기 때문에 실제 응용분야도 많고 이에 대한 정확한 예측은 매우 유용하다. 그렇지만 간단한 형상에도 불구하고 매우 복잡한 유동구조를 보여준다.⁽⁸⁾ 정체점 부근의 유동은 거의 비회전유동으로 강한 유선곡률을 가지고 유동방향이 바뀌게 된다. 이러한 유동변형률 효과가 고려되지 않은 모형은 열전달 예측성이 매우 떨어진다.

Fig. 10은 충돌제트 유동에서 열전달에 대한 응력-변형률 관계의 예측성을 보여주고 있다. 변형률의 2차함수 모형이 선형모형보다 Nu 가 증가하고 있고 3차함수 모형은 실험값에 잘 접근함을 볼 수 있다. 이것은 3차함수 모형에서 유선곡률의 영향을 $S^{*2} - W^{*2}$ 항이 고려하기 때문에 개선된 효과를 보이는 것이다. 2차함수 모형의 예

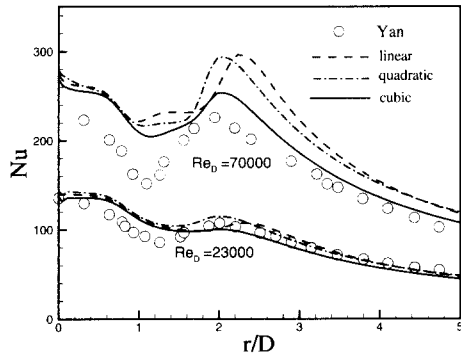


Fig. 10 Model comparison of Nu

측결과가 선형모형의 예측보다 증가된 Nu 를 보이는 것은 정체점부근이 상대적으로 비등방성이 작은 영역임을 보이는 것이다.

Fig. 11은 현재모형의 레이놀즈수 영향을 보여주고 있다. 예측된 결과는 레이놀즈수 변화에 따라 일관된 결과를 보여주고 있고 비교를 위해서 Craft 등⁽³⁾ 모형의 결과를 나타내었다. 현재 모형과 Craft 등⁽³⁾ 모형의 차이는 전반적으로 작게 나타나고 있지만 정체점 부근에서 현재의 모형의 결과가 상당히 개선된 형태이다. 일반적으로 실험은 정체점부근에서 난류용력들의 비등방성이 거의 일정한 크기를 유지함을 보여주고 있다.⁽²²⁾ 그렇지만 Fig. 1에서 보였듯이 Craft 등⁽³⁾ 모형은 정체점과 같이 유동변형률이 큰 경우에도 난류용력들이 현실성의 범위를 벗어나서 증가한다. 이러한 모형의 특징이 열전달 예측에 반영되어서 나타난 결과이다. 또한 제트유동의 끝에서 발생하는 와류와 벽면의 충돌로 인해서 나타나는 Nu 의 2차 최대값은 Craft 등⁽³⁾ 모형은 실험값 $r/D=2.0$ 보다 약간 후류에서 $r/D=2.3$ 나타나고 있지만 현재의 모형은 거의 실험값에 접근한 $r/D=2.05$ 에서 보이고 있다.

5. 결 론

강한 비평형효과가 존재하는 유동에 대한 난류 유동 및 열전달을 예측하기 위하여 응력-변형률의 선형관계를 이용한 Park and Sung⁽¹⁾의 $k-\epsilon-f_\mu$ 모형이 비선형관계로 확장되었다. 응력

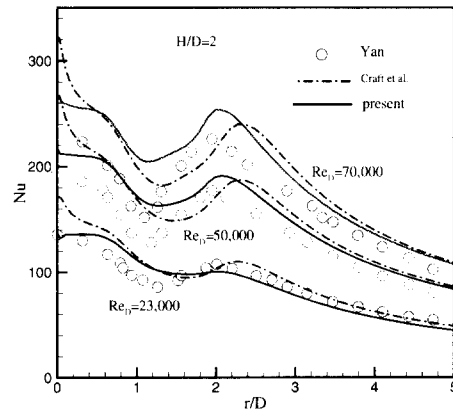


Fig. 11 Model comparison of Nu at three Reynolds number

변형률 관계는 속도구배의 3차함수가 이용되었다. 비선형 열유속 모형은 Cayley-Hamilton 정리를 이용하여 속도구배의 2차함수로 구성되었다. 비선형 모형의 계수는 실현성조건에 의해서 기본적인 형태가 유도 되었고 유동변형률이 큰 경우에 대한 비물리적인 거동이 제거되었다.

우선 새로운 모형은 완전히 발달된 채널유동과 후향계단 유동에 대한 검증이 이루어졌다. 예측된 결과는 DNS의 벽면임계거동을 성공적으로 보여 주었다. 후향계단의 C_f 와 St 를 실험결과와 비교하였다. 새로운 비선형 열유속 모형은 $Pr_t=0.9$ 와 Kays and Crawford 경험식에 비해 실험결과와 잘 일치하였다. 강한 유동변형률에 대한 모형의 예측성을 검토하기 위하여 충돌 제트 유동으로 검증이 확장되었다. 결과는 충돌 제트 유동의 유동구조 및 열전달 예측에 우수한 성능을 보였다. 반면 Craft 등⁽³⁾의 모형은 정체점에서 열전달계수를 크게 예측하는 단점을 보였다.

감사의 글

이 연구는 과학기술부 국가지정연구실 사업의 일환으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Park T.S. and Sung H.J., 1997, "A New Low-Reynolds-Number $k-\varepsilon-f_w$ Model for Predictions Involving Multiple Surfaces," *Fluid Dynamics Research*, Vol. 20, pp. 97~113.
- (2) Apsley, D.D. and Leschziner, M.A., 1998, "A New Low-Reynolds-Number Nonlinear Two-Equation Turbulence Model for Complex Flows," *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 19, pp. 209~222.
- (3) Craft, T.J., Launder, B.E. and Suga, K., 1996, "Development and Application of a Cubic Eddy-Viscosity Model of Turbulence," *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 17, pp. 108~115.
- (4) Gatski, T.B. and Speziale, C.G., 1993, "On Explicit Algebraic Stress Models for Complex Turbulent Flows," *J. Fluid Mech.*, Vol. 254, pp. 59~78.
- (5) Park, T.S. and Sung, H.J., 1995, "A Nonlinear Low-Reynolds-Number $k-\varepsilon$ Model for Turbulent Separated and Reattaching Flows - (I)Flow Field Computation," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 38, pp. 2657~2666.
- (6) Rhee, G.H. and Sung, H.J., 2000, "A Nonlinear Low-Reynolds-Number Heat Transfer Model for Turbulent Separated and Reattaching Flows," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 1439~1448.
- (7) Durbin, P.A. and Laurence, D., 1996, "Nonlocal Effects in Single Point Closure," *3rd Advances in Turbulence Research Conf.*, Korea Univ., Korea, pp. 109~120.
- (8) Park, T.S. and Sung, H.J., 2001, "Development of a Near-Wall Turbulence Model and Application to Jet Impingement Heat Transfer Flow," *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 22, pp. 10~18.
- (9) Speziale, C.G. and Gatski, T.B., 1997, "Analysis and Modelling of Anisotropies in the Dissipation Rate of Turbulence," *J. Fluid Mech.*, Vol. 344, pp. 155~180.
- (10) Pope, S.B., 1975, "A More General Effective-Viscosity Hypothesis," *J. Fluid Mech.*, Vol. 72, pp. 331~340.
- (11) Park, T.S., 1999, "Multigrid Method and Low-Reynolds-Number $k-\varepsilon$ Model for Turbulent Recirculating Flows," *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, Vol. 36, pp. 433~456.
- (12) Abe, K., Kondoh, T. and Nagano, Y., 1996, "A Two-Equation Heat Transfer Model Reflecting Second-Moment Closures for Wall and Free Turbulent Flows," *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 17, pp. 228~237.
- (13) Rogers, M.M., Mansour, N.N. and Reynolds, W.C., 1989, "An Algebraic Model for the Turbulent Flux of a Passive Scalar," *J. Fluid Mech.*, Vol. 203, pp. 77~101.
- (14) Shabany, Y. and Durbin, P.A., 1997, "Explicit Algebraic Scalar Flux Approximation," *AIAA J.* Vol. 35, pp. 985~989.
- (15) Speziale, C.G., 1998, "A Consistency Condition for Non-linear Algebraic Reynolds Stress Model in Turbulence," *Int. J. Non-linear Mech.*, Vol. 33, pp. 579~584.
- (16) Tavoularis, S. and Corrsin, S., 1981, "Experiments in Nearly Homogeneous Turbulent Shear Flow with a Uniform Mean Temperature Gradient. Part I," *J. Fluid Mech.*, Vol. 104, pp. 311~347.
- (17) Moser, R.D., Kim, J. and Mansour, N.N., 1999, "Direct Numerical Simulation of Turbulent Channel Flow up to $Re_\tau = 590$," *Phys. Fluids*, Vol. 11, pp. 943~945.
- (18) Kasagi, N., Tomita, Y. and Kuroda, A., 1992, "Direct Numerical Simulation of Passive Scalar Field in a Turbulent Channel Flow," *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 114, pp. 598~606.
- (19) Wallin, S. and Johansson, A.V., 2000, "An Explicit Algebraic Reynolds Stress Model for Incompressible and Compressible Turbulent Flows," *J. Fluid Mech.*, Vol. 403, pp. 89~132.
- (20) Driver, D.M. and Seegmiller, H.L., 1985, "Features of a Reattaching Turbulent Shear Layer in Divergent Channel Flow," *AIAA J.* Vol. 163, pp. 163~171.
- (21) Vogel, J.C. and Eaton, J.K., 1985, "Combined Heat Transfer and Fluid Dynamic Measurements

Downstream of a Backward-Facing Step," *ASME J. Heat Transfer*, Vol. 107, pp. 922~929.

(22) Yan, X., 1993, "A Preheated-Wall Transient Method Using Liquid Crystals for the

Measurement of Heat Transfer on External Surfaces and in Ducts," *PhD Thesis*, Univ. California, Davis.