

이방성 이종재 접합계면 균열의 에너지 해방률에 관한 연구

김진광* · 조상봉†

(2001년 4월 20일 접수, 2001년 8월 7일 심사완료)

A Study on Energy Release Rate for Interface Cracks in Anisotropic Dissimilar Materials

Jin-Kwang Kim and Sang-Bong Cho

Key Words: Anisotropic Dissimilar Materials(이방성 이종재료), Interface Crack(계면 균열), Stress Intensity Factor(응력강도계수), Energy Release Rate(에너지해방률), Reciprocal Work Contour Integral Method(상반일 경로 적분법).

Abstract

The energy release rate for an interface crack in anisotropic dissimilar materials was obtained by the eigenfunction expansion method and also was analyzed numerically by the reciprocal work contour integral method. It was shown that the results for orthotropic dissimilar materials are consistent with the other worker's results.

1. 서론

이종접합재료의 파괴원인에는 여러 가지가 있을 수 있으나 가장 큰 원인중의 하나는 이종재 접합계면에서 발생하는 균열로 인한 것이다. 이러한 점을 고려하면 이종재 접합계면 균열에 대한 파괴역학적 강도평가법의 확립은 중요한 연구과제의 대상이다.

등방성 이종재 접합계면 균열에 대한 연구는 Williams⁽¹⁾이후 많이 연구되어 왔다. 또한, V-노치 균열문제에 대한 연구는 Bogy^(2,3)를 시작으로 중요성이 알려지면서 Hein과 Erdogan⁽⁴⁾ 등이 수학적으로 어려운 방법인 Mellin변환법을 이용하여 응력특

이성에 관한 연구를 하였다. Carpenter와 Byers⁽⁵⁾는 간단한 방법인 고유함수 전개법에 이항 윌리엄 형태(Two-term William's type)의 복소응력함수를 사용하여 상반일 경로 적분법(Reciprocal Work Contour Integral Method)으로 응력강도계수를 수치 해석하였다.

이방성 이종재 접합계면 균열에 대해서 Wang과 Choi⁽⁶⁾는 Lekhnitskii⁽⁷⁾의 형식을 이용하여 접합계면 균열의 거동을 설명하였다. Suo⁽⁸⁾는 이방성 이종재 접합계면 균열의 응력강도계수를 비록 단일재료에서와 같이 세 가지 형태 K_I , K_{II} , K_{III} 로는 구분할 수는 없어도 세 개의 독립적인 실수인자 K_1 , K_2 , K_3 로써 나타낼 수 있다고 하였다. 또한, Ting과 Chou,⁽⁹⁾ Zwiers et al,⁽¹⁰⁾ Ting⁽¹¹⁾ 등이 일항 윌리엄 형태(One-term William's type)의 복소응력함수를 사용하여 연구한 바 있다. 그러나 이와 같은 이방성 이종재료의 접합계면 균열에 대한 연구는 아직

* 회원, 경남대학교 대학원 기계설계학과

† 책임저자, 회원, 경남대학교 기계자동화공학부

E-mail : sbcho@kyungnam.ac.kr

TEL : (055)249-2620 FAX : (055)249-2617

부족한 상태이며 이론적 및 실험적 연구가 요구된다.

이방성 및 직교이방성 재료를 해석할 때는 지배 미분방정식에 대한 특성방정식을 이용한다. 이 특성방정식의 근은 1) 실수부와 허수부를 가지는 별근의 경우, 2) 순 허수의 별근인 경우, 3) 순 허수의 중근인 경우의 세 종류로 분류 보고되고 있다.⁽⁸⁾ 복합재료와 같은 이방성재료를 해석할 때는 특성근의 분류에 따라 해석할 수 있다.

본 논문에서는 특성방정식의 근이 실수부와 허수부로 되어있고 별근을 가지는 이방성 이종재료의 집합계면 균열에 대한 응력강도계수와 에너지 해방률 및 관계를 고유함수 전개법으로 유도하고자 한다. 그리고, 상반일 경로 적분법(RWCIM)^(12,13)을 이용하여 응력강도계수 혹은 에너지 해방률을 수치해석하여 비교 검토하고자 한다.

2. 이방성 및 직교이방성 재료에 대한 특성방정식

일반적인 이방성재료(anisotropic material)에 대한 평면응력상태의 구성방정식은 다음과 같다.⁽⁷⁾

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (1)$$

여기에서 a_{ij} 는 재료의 물성치로 구성되는 상수이다. 또한, 평면변형률의 경우에 대한 a_{ij}^* 는 다음과 같이 주어진다.

$$a_{ij}^* = a_{ij} - (a_{63}a_{63}/a_{33}) \quad (2)$$

이방성재료의 특수한 경우에 해당하는 직교이방성재료는 재료의 주축 1, 2와 x, y 축이 일치하는 경우이며 식 (1)의 구성방정식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (3)$$

평형방정식을 만족하는 응력성분을 Airy's 응력

함수 $U(x, y)$ 를 나타내면

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

이고, 식 (1)과 식 (4)를 적합방정식에 대입하여 정리하면 다음과 같은 특성방정식을 얻을 수 있다.

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \quad (5)$$

식 (5)의 특성방정식을 만족하는 특성근을 μ_i ($i=1, 2, 3, 4$)라 하면 근 μ_i 는 복소수이며, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mu_1 = a_1 + i\beta_1, \mu_2 = a_2 + i\beta_2, \mu_3 = \overline{\mu_1}, \mu_4 = \overline{\mu_2} \quad (6)$$

식 (6)에서 a_i 와 β_i ($i=1, 2$)는 실수이고 근 μ_i 는 복소변수 $z_i = x + \mu_i y$ 의 관계를 가지고 있다. 직교이방성재료의 경우에는 식 (3)에서와 같이 $a_{16} = a_{26} = 0$ 이므로 식 (5)의 특성방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$a_{11}\mu^4 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 + a_{22} = 0 \quad (7)$$

식 (7)을 무차원 인자, n 과 m 으로 표현하면

$$n\mu^4 + 2m\sqrt{n}\mu^2 + 1 = 0 \quad (8)$$

이다. 여기서

$$n = \frac{a_{11}}{a_{22}}, \quad m = \frac{2a_{12} + a_{66}}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}} \quad (9)$$

이다. 만약 $n=1, m=1$ 이면 특성방정식의 특성근은 중복근을 가지며, 전단탄성계수 G_{12} 는 다음의 관계를 가져야 한다.

$$G_{12} = \frac{E_{11}}{\{2 \times (\nu_{12} + \sqrt{E_{11}/E_{22}})\}} \quad (10)$$

식 (10)에서 E_{11} 과 E_{22} 가 같은 경우는 등방성

또한, 식 (27)은 $1 - e^{i2\pi\lambda}$ 와 $1 - e^{-i2\pi\lambda}$ 이 0이 아닌 경우에도 성립할 수 있다. 이 경우에 대한 고유치는 복소수 고유치가 되며 다음의 과정을 통하여 구할 수 있다. 식 (27)을 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{pmatrix} = -e^{i2\pi\lambda} [S_2]^{-1} [S_1] \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{pmatrix} \quad (28)$$

식 (28)을 식 (24)에 대입하여 정리하면

$$\begin{pmatrix} \overline{B_{21}} \\ \overline{B_{22}} \end{pmatrix} = [S_2]^{-1} [S_2] \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{pmatrix} \quad (29)$$

이 된다. 또한, 식 (23), (28), (29)를 식 (26)에 대입하여 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$[D(\lambda)][S_1] \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

여기서

$$[D(\lambda)] = \begin{pmatrix} D_{11}(\lambda) & D_{12}(\lambda) \\ D_{21}(\lambda) & D_{22}(\lambda) \end{pmatrix} \quad (31)$$

이고,

$$\begin{aligned} D_{11}(\lambda) &= (G_1 - \overline{G_2}) - (\overline{G_1} - G_2)e^{-i2\pi\lambda}, \\ D_{12}(\lambda) &= (H_1 - \overline{H_2}) - (\overline{H_1} - H_2)e^{-i2\pi\lambda}, \\ D_{21}(\lambda) &= (I_1 - \overline{I_2}) - (\overline{I_1} - I_2)e^{i2\pi\lambda}, \\ D_{22}(\lambda) &= (J_1 - \overline{J_2}) - (\overline{J_1} - J_2)e^{i2\pi\lambda}. \end{aligned}$$

또한

$$\begin{aligned} G_j &= \frac{p_R \mu_{\bar{n}} - p_{\bar{n}} \mu_R}{\mu_{\bar{n}} - \mu_R}, & H_j &= \frac{p_{\bar{n}} - p_R}{\mu_{\bar{n}} - \mu_R}, \\ I_j &= \frac{q_R \mu_{\bar{n}} - q_{\bar{n}} \mu_R}{\mu_{\bar{n}} - \mu_R}, & J_j &= \frac{q_{\bar{n}} - q_R}{\mu_{\bar{n}} - \mu_R}. \end{aligned}$$

이다. 이방성 이중재료간 접합계면 균열문제에서 식 (30)이 비 자명해(non-trivial solution)를 가질 조

건은 식 (31)의 행렬식이 영(0)인 경우이며 이 행렬식을 전개하면 다음과 같이 된다.

$$P(e^{-i2\pi\lambda})^2 + Q(e^{-i2\pi\lambda}) + R = 0 \quad (32)$$

여기서

$$\begin{aligned} P &= -(\overline{H_1} - H_2)(\overline{I_1} - I_2) + (\overline{G_1} - G_2)(\overline{J_1} - J_2), \\ Q &= -(\overline{H_1} - H_2)(\overline{I_2} - I_1) + (\overline{H_2} - H_1)(\overline{I_1} - I_2) \\ &\quad + (\overline{G_1} - G_2)(\overline{J_2} - J_1) + (\overline{G_2} - G_1)(\overline{J_1} - J_2) \\ R &= -(\overline{H_2} - H_1)(\overline{I_2} - I_1) + (\overline{G_2} - G_1)(\overline{J_2} - J_1) \end{aligned}$$

이고, 식 (32)에서 고유치 λ 를 구하면 다음과 같다.

$$\lambda = (n - \frac{1}{2}) \pm i\epsilon \quad (\text{단, } n = 1, 2, 3, \dots, \infty) \quad (33)$$

여기서

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\left(\frac{Q}{2P} \right) \mp \sqrt{\left(\frac{Q}{2P} \right)^2 - \left(\frac{R}{P} \right)} \right] \quad (34)$$

이고, 식 (34)를 Dunders 파라미터 β^* 로 표현하면 다음과 같이 된다.

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{1 - \beta^*}{1 + \beta^*} \right] \quad (35)$$

여기서

$$\beta^* = - \frac{Q + P \sqrt{\left(\frac{Q}{P} \right)^2 - 4 \frac{R}{P} - 2}}{Q + P \sqrt{\left(\frac{Q}{P} \right)^2 - 4 \frac{R}{P} + 2}} \quad (36)$$

이다. 식 (33)으로부터 이방성 이중재료 내의 접합계면 균열에 대한 복소수 고유치를 얻을 수 있다. 특히 n 이 1인 경우, 즉 $0.5 + i\epsilon$ 일 때 접합계면 균열선단에서의 응력은 무한대로 발산하며 이 때의 고유치가 바로 응력특이성지수를 나타낸다.

이와 같이 균열선단에서의 응력을 무한대로 발산시키는 응력특이성을 가진 복소수 고유치 $0.5 + i\epsilon$ 에 대한 고유벡터를 임의의 복소수 계수 ξ 로 표현하기 위하여 식 (30)에 식 (34)를 대입하여 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

재료가 되고, 서로 다른 경우는 유사등방성 재료가 된다. 식 (8)의 특성근을 m 에 따라 분류하면 다음과 같다.⁽⁸⁾

$$1 < m < \infty \quad \mu_1 = i\beta_1, \quad \mu_2 = i\beta_2 \quad (11a)$$

$$-1 < m < 1 \quad \mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \mu_2 = \alpha_2 + i\beta_2 \quad (11b)$$

$$m = 1 \quad \mu_1 = \mu_2 = i\beta_1 \quad (11c)$$

식 (11a)는 특성근이 순 허수만으로 이루어진 경우이지만 식 (11b)는 실수부와 허수부로 구성된 특성근을 가진다. 그리고, 식 (11c)에 해당하는 경우는 순 허수의 중복근을 가진다.

3. 이방성 이종재료의 복소응력함수에 의한 응력과 변위

일반적인 균질 이방성 재료에서 체적력이 없다고 가정하면 변위 u 와 응력 σ 를 복소응력함수 $U_{\bar{j}}$ 과 $U_{\bar{k}}$ 로 다음과 같이 표현할 수 있다.⁽¹⁴⁾

$$u_{ix} = 2\text{Re}\{p_{\bar{1}}U_{\bar{1}}' + p_{\bar{2}}U_{\bar{2}}'\} - \omega_{j\alpha}y + u_{j\alpha x} \quad (12)$$

$$u_{iy} = 2\text{Re}\{q_{\bar{1}}U_{\bar{1}}' + q_{\bar{2}}U_{\bar{2}}'\} + \omega_{j\alpha}x + u_{j\alpha y} \quad (13)$$

$$\sigma_{ixx} = 2\text{Re}\{\mu_{\bar{1}}^2 U_{\bar{1}}'' + \mu_{\bar{2}}^2 U_{\bar{2}}''\}, \quad (14)$$

$$\sigma_{jyy} = 2\text{Re}\{U_{\bar{1}}'' + U_{\bar{2}}''\}, \quad (15)$$

$$\sigma_{xy} = -2\text{Re}\{\mu_{\bar{1}}U_{\bar{1}}'' + \mu_{\bar{2}}U_{\bar{2}}''\} \quad (16)$$

여기서

$$U_{\bar{1}} = A_{\bar{1}}z_{\bar{1}}^{\lambda+1} + B_{\bar{1}}z_{\bar{1}}^{\bar{\lambda}+1}, \quad (17)$$

$$U_{\bar{2}} = A_{\bar{2}}z_{\bar{2}}^{\lambda+1} + B_{\bar{2}}z_{\bar{2}}^{\bar{\lambda}+1}, \quad (18)$$

$$p_{\bar{1}} = a_{\bar{1}1}\mu_{\bar{1}}^2 + a_{\bar{1}2} - a_{\bar{1}6}\mu_{\bar{1}}, \quad (19)$$

$$p_{\bar{2}} = a_{\bar{1}1}\mu_{\bar{2}}^2 + a_{\bar{1}2} - a_{\bar{1}6}\mu_{\bar{2}}, \quad (20)$$

$$q_{\bar{1}} = a_{\bar{1}2}\mu_{\bar{1}} + \frac{a_{\bar{2}2}}{\mu_{\bar{1}}} - a_{\bar{2}6}, \quad (21)$$

$$q_{\bar{2}} = a_{\bar{1}2}\mu_{\bar{2}} + \frac{a_{\bar{2}2}}{\mu_{\bar{2}}} - a_{\bar{2}6} \quad (22)$$

또한, $z_{\bar{j}} = x + \mu_{\bar{j}}y$ 이고 $\mu_{\bar{j}} = \alpha_{\bar{j}} + i\beta_{\bar{j}}$ ($i=1,2$)이며, 계수 $A_{\bar{j}}$ 와 $B_{\bar{j}}$ 는 복소수이다. j 는 재료 1과

재료 2를 나타내고, 위 첨자 '와 ''는 각각 1차 미분과 2차 미분을 의미한다. 그리고 $\omega_{j\alpha}$, $u_{j\alpha x}$ 와 $u_{j\alpha y}$ 는 상수이고 이들 항은 강제변위를 표현하는 항이다. 이후 본 논문에서는 강제변위가 없는 것으로 생각한다.

4. 응력특이성지수와 응력강도계수의 결정

이종재료간 접합계면 균열에서 표면력 자유의 경계조건과 변위와 응력의 연속조건으로부터 다음과 같은 연립방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \overline{B}_{11} \\ \overline{B}_{12} \end{Bmatrix} = -e^{-i2\pi\lambda} [\overline{S}_1]^{-1} [S_1] \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{Bmatrix} \overline{B}_{21} \\ \overline{B}_{22} \end{Bmatrix} = -e^{i2\pi\lambda} [\overline{S}_2]^{-1} [S_2] \begin{Bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$$[S_1] \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix} + [\overline{S}_1] \begin{Bmatrix} \overline{B}_{11} \\ \overline{B}_{12} \end{Bmatrix} = [S_2] \begin{Bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{Bmatrix} + [\overline{S}_2] \begin{Bmatrix} \overline{B}_{21} \\ \overline{B}_{22} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

$$[T_1] \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix} + [\overline{T}_1] \begin{Bmatrix} \overline{B}_{11} \\ \overline{B}_{12} \end{Bmatrix} = [T_2] \begin{Bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{Bmatrix} + [\overline{T}_2] \begin{Bmatrix} \overline{B}_{21} \\ \overline{B}_{22} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

여기서

$$[S_j] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mu_{\bar{j}} & \mu_{\bar{j}} \end{bmatrix}, \quad [T_j] = \begin{bmatrix} p_{\bar{j}} & p_{\bar{j}} \\ q_{\bar{j}} & q_{\bar{j}} \end{bmatrix}, \quad [0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이다.

식 (23)과 식 (24)를 식 (25)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$(1 - e^{-i2\pi\lambda}) [S_1] \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{Bmatrix} = (1 - e^{i2\pi\lambda}) [S_2] \begin{Bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

먼저, 식 (27)은 $1 - e^{i2\pi\lambda}$ 와 $1 - e^{-i2\pi\lambda}$ 이 0일 때 성립한다. 이 경우에 대한 고유치, $\lambda = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty$ 이 되고, 이들 고유치 중에서 음의 고유치와 강제변위(병진운동, 회전운동)를 나타내는 0과 1의 고유치를 제외하면 실수 고유치, $\lambda = 2, 3, \dots, \infty$ 을 얻게 된다.

$$\begin{Bmatrix} D_{11}(\varepsilon) & D_{12}(\varepsilon) \\ D_{21}(\varepsilon) & D_{22}(\varepsilon) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{11} + A_{12} \\ \mu_{11}A_{11} + \mu_{12}A_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (37)$$

여기서

$$\begin{aligned} D_{11}(\varepsilon) &= (G_1 - \overline{G_2}) + (\overline{G_1} - G_2)e^{2\pi\varepsilon}, \\ D_{12}(\varepsilon) &= (H_1 - \overline{H_2}) + (\overline{H_1} - H_2)e^{2\pi\varepsilon}, \\ D_{21}(\varepsilon) &= (I_1 - \overline{I_2}) + (\overline{I_1} - I_2)e^{2\pi\varepsilon}, \\ D_{22}(\varepsilon) &= (J_1 - \overline{J_2}) + (\overline{J_1} - J_2)e^{2\pi\varepsilon}. \end{aligned}$$

이고, 이 연립방정식은 다음과 같은 하나의 방정식으로 표현할 수 있다.

$$(A_{11} + A_{12}) + \eta(\mu_{11}A_{11} + \mu_{12}A_{12}) = 0 \quad (38)$$

여기서,

$$\eta = \eta_I + i\eta_{II} = \frac{D_{12}(\varepsilon)}{D_{11}(\varepsilon)} = \frac{D_{22}(\varepsilon)}{D_{21}(\varepsilon)} \quad (39)$$

이다. 직교이방성 이중재료일 경우 η 는 허수 $i\eta_{II}$ 만으로 표현되고 이방성 이중재료나 이방성재료와 직교이방성재료가 서로 집합된 이중재료일 경우에는 실수부와 허수부를 가진 복소수 $\eta_I + i\eta_{II}$ 로 표현된다.

식 (38)에서 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$A_{12} = -\frac{1 + \eta\mu_{11}}{1 + \eta\mu_{12}} A_{11} \quad (40)$$

고유벡터를 구하여 복소수 계수 ζ 의 항으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ B_{11} \\ B_{12} \end{Bmatrix} = \zeta \begin{Bmatrix} e^{(-1)^j\pi\varepsilon} \frac{1 + \mu_{12}\eta}{D_j} \\ -e^{(-1)^j\pi\varepsilon} \frac{1 + \mu_{11}\eta}{D_j} \\ e^{(-1)^{j+1}\pi\varepsilon} \frac{1 + \mu_{12}\eta}{D_j} \\ -e^{(-1)^{j+1}\pi\varepsilon} \frac{1 + \mu_{11}\eta}{D_j} \end{Bmatrix} \quad (41)$$

여기서

$$\zeta = \zeta_I + i\zeta_{II} = \frac{\mu_{11} - \mu_{12}}{e^{-\pi\varepsilon}(1 + \mu_{12}\eta)} A_{11} \quad (42)$$

이고, $D_j = \mu_{11} - \mu_{12}$ 이다.

식 (33)에서 $n=1$ 일 때의 고유치와 식 (41)을 식 (12)~(16)에 대입하여 정리하면 이방성 이중재 접합계면 균열에 대한 응력장과 변위장을 얻을 수 있으며, 응력강도계수를 면내문제에서 정의하여 균열선단에서 전방으로 x 축 상의 거리 r 만큼 떨어진 곳의 응력과 후방으로 x 축 상의 거리 r 만큼 떨어진 곳의 상대변위를 표현하면 다음과 같다.

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ (K_1\eta_{II} + K_2\eta_I)\cos[\varepsilon\ln(\frac{r}{l})] + (K_1\eta_I - K_2\eta_{II})\sin[\varepsilon\ln(\frac{r}{l})] \right\} \quad (43)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_2\cos[\varepsilon\ln(\frac{r}{l})] + K_1\sin[\varepsilon\ln(\frac{r}{l})] \right\} \quad (44)$$

$$\delta_x = \frac{2\sqrt{r}}{(1 + 4\varepsilon^2)\cosh[\pi\varepsilon]\sqrt{2\pi}} \times \left\{ (\chi_{11} + \chi_{21}) \left\{ K_2\cos[\varepsilon\ln(\frac{r}{l})] + K_1\sin[\varepsilon\ln(\frac{r}{l})] \right\} + 2\varepsilon(-K_1\cos[\varepsilon\ln(\frac{r}{l})] + K_2\sin[\varepsilon\ln(\frac{r}{l})]) \right\} + (\chi_{12} + \chi_{22}) \left\{ K_1\cos[\varepsilon\ln(\frac{r}{l})] - K_2\sin[\varepsilon\ln(\frac{r}{l})] \right\} + 2\varepsilon(K_2\cos[\varepsilon\ln(\frac{r}{l})] + K_1\sin[\varepsilon\ln(\frac{r}{l})]) \right\} \quad (45)$$

$$\delta_y = \frac{2\sqrt{r}}{(1 + 4\varepsilon^2)\cosh[\pi\varepsilon]\sqrt{2\pi}} \times \left\{ (\psi_{12} + \psi_{22}) \left\{ K_1\cos[\varepsilon\ln(\frac{r}{l})] - K_2\sin[\varepsilon\ln(\frac{r}{l})] \right\} + 2\varepsilon(K_2\cos[\varepsilon\ln(\frac{r}{l})] + K_1\sin[\varepsilon\ln(\frac{r}{l})]) \right\} \quad (46)$$

여기서 l 은 임의의 길이나 보통 균열 길이 $2a$ 로 잡는다. 그리고, K_1 과 K_2 는 이방성 이중재료간의 접합계면 균열에 대한 응력강도계수로 다음과 같은 관계가 있다.

$$K_1 = 4\sqrt{2\pi}\cosh[\pi\varepsilon] \times \left\{ \left[2\varepsilon\cos[\varepsilon\ln(l)] + \left(\frac{3}{4} - \varepsilon^2\right)\sin[\varepsilon\ln(l)] \right] \zeta_I + \left[\left(\frac{3}{4} - \varepsilon^2\right)\cos[\varepsilon\ln(l)] - 2\varepsilon\sin[\varepsilon\ln(l)] \right] \zeta_{II} \right\} \quad (47)$$

$$K_2 = 4\sqrt{2\pi}\cosh[\pi\varepsilon] \times \left\{ \left[-\left(\frac{3}{4} - \varepsilon^2\right)\cos[\varepsilon\ln(l)] + 2\varepsilon\sin[\varepsilon\ln(l)] \right] \zeta_I + \left[2\varepsilon\cos[\varepsilon\ln(l)] + \left(\frac{3}{4} - \varepsilon^2\right)\sin[\varepsilon\ln(l)] \right] \zeta_{II} \right\} \quad (48)$$

여기서

$$\eta_I = \frac{(1 + e^{2\pi\epsilon})^2 \rho_I \omega_I - (1 - e^{2\pi\epsilon})^2 \rho_{II} \omega_{II}}{(1 + e^{2\pi\epsilon})^2 \omega_I^2 + (1 - e^{2\pi\epsilon})^2 \omega_{II}^2} \quad (49)$$

$$\eta_{II} = \frac{(1 + e^{2\pi\epsilon})(1 - e^{2\pi\epsilon})(-\rho_I \omega_{II} - \rho_{II} \omega_I)}{(1 + e^{2\pi\epsilon})^2 \omega_I^2 + (1 - e^{2\pi\epsilon})^2 \omega_{II}^2} \quad (50)$$

이고

$$\rho_I = a_{116} - a_{216} - a_{111}(\alpha_{11} + \alpha_{12}) + a_{211}(\alpha_{21} + \alpha_{22})$$

$$\rho_{II} = a_{111}(\beta_{11} + \beta_{12}) + a_{211}(\beta_{21} + \beta_{22})$$

$$\omega_I = \frac{-a_{112} + a_{212} - a_{111}(-\alpha_{11}\alpha_{12} + \beta_{11}\beta_{12}) - a_{211}(\alpha_{21}\alpha_{22} - \beta_{21}\beta_{22})}{\alpha_{11}^2 + \beta_{11}^2}$$

$$\omega_{II} = a_{111}(\alpha_{12}\beta_{11} + \alpha_{11}\beta_{12}) + a_{211}(\alpha_{22}\beta_{21} + \alpha_{21}\beta_{22})$$

$$\chi_{11} = a_{111}(\beta_{11}(1 + \alpha_{12}\eta_I) + \beta_{12}(1 + \alpha_{11}\eta_I))$$

$$\chi_{12} = a_{111}(\alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{11}\eta_I)\eta_{II}$$

$$\phi_{12} = a_{122} \frac{\alpha_{12}^2\beta_{11} + \beta_{12}(\alpha_{11}^2 + \beta_{11}(\beta_{11} + \beta_{12}))}{(\alpha_{11}^2 + \beta_{11}^2)(\alpha_{12}^2 + \beta_{12}^2)} \eta_{II}$$

이다. 이방성 이종재료의 특수한 경우에 해당하는 직교이방성 이종재료일 경우에는 식 (45)에서 $\chi_{12} + \chi_{22}$ 가 0이 되고, 식 (49)의 η_I 이 0이 된다.

5. 이방성 이종재 접합계면 균열에 대한 에너지 해방률

선형과괴역학에서 중요한 인자로 사용되는 응력강도계수와 대응관계에 있는 에너지 해방률 G 는 다음과 같이 정의된다.

$$G = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta a} \int_0^{\Delta a} \{ \sigma_{yy}(x) \delta_y(\Delta a - x) + \tau_{xy}(x) \delta_x(\Delta a - x) \} dx \quad (51)$$

식 (51)에서 균열이 진전하기 전의 응력성분과 균열이 Δa 만큼 진전한 상태에서의 상대변위를 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{\eta_{II}} \sigma_{1yy} + i\sigma_{1xy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \left[(K_1 + iK_2) \left\{ 1 - i \left(\frac{\eta_I}{2\eta_{II}} \right) \right\} \times \left(\frac{x}{l} \right)^{i\epsilon} + i(K_1 - iK_2) \left(\frac{\eta_I}{2\eta_{II}} \right) \left(\frac{x}{l} \right)^{-i\epsilon} \right] \quad (52)$$

$$\eta_{II} \delta_y + i\delta_x = \frac{2\sqrt{(\Delta a - x)}}{(1 + 4\epsilon^2)\cosh[\pi\epsilon]\sqrt{\pi}} [(K_1 + iK_2) \times \left\{ \chi_{21} + \chi_{11} + i \frac{\chi_{22} + \chi_{12}}{2} \right\} (1 - i2\epsilon) \left(\frac{\Delta a - x}{l} \right)^{i\epsilon} + i \left\{ (K_1 - iK_2) \frac{\chi_{22} + \chi_{12}}{2} \right\} (1 + i2\epsilon) \left(\frac{\Delta a - x}{l} \right)^{-i\epsilon}] \quad (53)$$

식 (52)와 식 (53)을 이용하여 식 (51)에 정의된 이방성 이종재 접합계면 균열에 대한 에너지 해방률을 구하면 다음과 같이 된다.

$$G = \frac{K_I^2 H}{4 \cosh^2(\pi\epsilon)} \quad (54)$$

여기서 $K_I = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$ 이고 $H = (\chi_{21} + \chi_{11})$ 이다.

식 (54)에서 직교이방성 이종재료일 경우는 Suo⁽⁸⁾의 결과 식과 일치한다.

6. 수치해석 및 고찰

이방성 이종재료간 접합계면 균열의 응력강도계수는 유한요소해석 프로그램인 ANSYS의 해석결과값을 베티(betti)의 상반정리를 기초로 한 상반일 경로 적분법(RWCIM)^(13,14)의 입력 자료로 활용하여 응력특이성을 나타내는 고유치 $\lambda = 0.5 + i\epsilon$ 에 대한 식 (41)의 고유벡터를 수치 해석하여 구하였다. 상반일 경로 적분법은 변위외삽법 및 응력외삽법과 같이 균열선단부근에서의 변위값과 응력값을 이용하지 않고 임의의 적분경로를 사용하므로 균열선단부근의 요소망을 매우 조밀하게 생성할 필요가 없고 특이요소(singular element)를 사용할 필요가 없다.^(13,14) 해석모델은 편측균열과 중앙균열로 Fig. 1(a)와 Fig. 1(b)와 같이 설정하였으며, 이에 대한 유한요소모델은 8절점 등매개변수요소(isoparametric element)를 사용하여 균열길이 $a=0.4$ 인 경우에 대한 예로 편측균열과 중앙균열모델을 Fig. 2에 나타내었고 본 연구에서 사용한 무차원 응력강도계수 F_I 는 다음과 같다.

$$F_I = \frac{K_I}{\sigma_0 \sqrt{\pi a}} \quad (55)$$

6.1 직교이방성 이종재료에 대한 해석

Fig. 1(a)의 편측균열모델에서 재료 1과 재료 2를

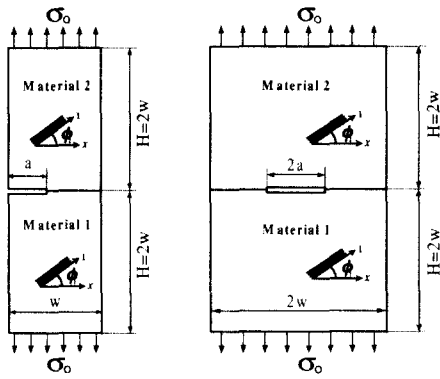


Fig. 1 (a) A single edge interface crack in a finite dissimilar plate
 (b) A central interface crack in a finite dissimilar plate

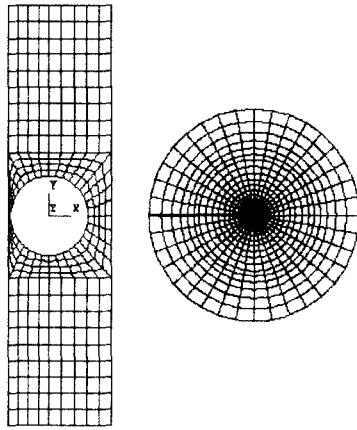


Fig. 2 Finite element model

재료의 주축이 x축과 이루는 각도 ϕ 가 영(0)인 직교이방성재료로 선정하였고, 재료상수를 Table 1에 나타내었다. 이와 같은 직교이방성 이종재료에 대한 평면변형률상태의 응력특이성지수 및 무차원 응력강도계수 F_i 를 수치 해석하였으며 그 결과를 Table 2에 나타내었다. Table 2에서 보면 기존의 경계요소법에 의한 해석결과⁽¹⁶⁾와 비교적 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다. 또한, Table 3은 Fig. 1(b)의 중앙균열모델에서 재료 1과 재료 2의 재료 물성치를 Table 1과 같이 선정하였으며 평면변형률상태의 접합계면 균열에 대한 무차원 응력강도계수를 구하여 기존의 해석결과⁽¹⁶⁾와 비교한 것으로 비교적 잘 일치하고 있다.

Table 1 Material properties of orthotropic bi-materials

Material Properties	Material 1	Material 2
$E_{11}(GPa)$	151.7	137.9
$E_{22}(GPa)$	10.62	14.48
$E_{33}(GPa)$	10.62	14.48
$G_{12}(GPa)$	5.580	4.980
ν_{12}	0.280	0.210
ν_{31}	0.020	0.022
ν_{32}	0.280	0.210

Table 2 Non-dimensional stress intensity factors for the single-edge interface crack in a finite dissimilar plate (Plane strain, $F_i = K_i / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$, $\lambda = 0.5 + i0.003258$)

a/W	0.05	0.10	0.20	0.40
BEM' Result ⁽¹⁶⁾	1.0967	1.1544	1.3356	2.0977
Present Method	1.0936	1.1487	1.3338	2.0639

Table 3 Non-dimensional stress intensity factor of a central interface crack in a finite dissimilar plate (plane strain, $F = K_i / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$, $\lambda = 0.5 + i0.003258$)

a/W	0.05	0.10	0.20	0.40
BEM' Result ⁽¹⁶⁾	1.0032	1.0151	1.0258	1.0985
Present Result	0.9997	1.0050	1.0191	1.0891

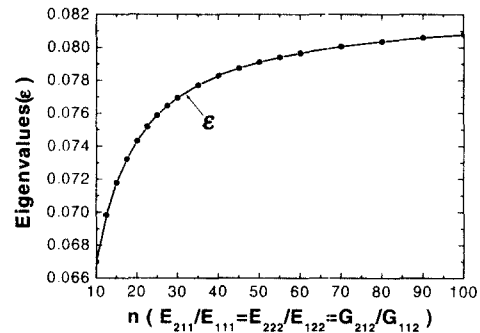


Fig. 3 Eigenvalue vs. n for a single edge interface crack in orthotropic dissimilar materials

다음으로 Fig. 1(a)의 편축균열모델에서 재료 1의 물성치를 $E_{111}=1.2\text{ GPa}$, $E_{122}=0.6\text{ GPa}$, $G_{112}=0.007\text{ GPa}$, $\nu_{112}=0.072$ 으로 하고, 재료2의 물성치를 $n(=E_{211}/E_{111}=E_{222}/E_{122}=G_{212}/G_{112})$, $\nu_{212}=0.072$ 으로 설정하여 평면응력상태에 대한 n 의 변화에 따른 응력특이성지수 $\lambda=0.5+i\epsilon$ 의 ϵ 과 무차원 응력강도계수를 구하여 각각 Fig. 3와 Fig. 4에 나타내었다.

6.2 직교이방성과 이방성 이종재료에 대한 해석
 직교이방성과 이방성 이종재료 내의 접합계면균열에 대하여 재료의 주축 1방향의 재료물성치가 Table 4에서와 같이 변화할 경우에 대한 평면응력상태의 응력특이성지수와 응력강도계수에 관한 해석을 하고자 한다. 먼저 해석모델은 Fig. 1(a)의 편축균열모델에서 높이 $H=2w$ 대신에 $H=1.5w$ 로 변경하여 보았다. 각 이종재료의 재료 1의 주축 1방향과 x 축이 이루는 각도를 0° 부터 90° 까지 변화시켰을 경우에 대하여 섬유(fiber)방향에 따른 응

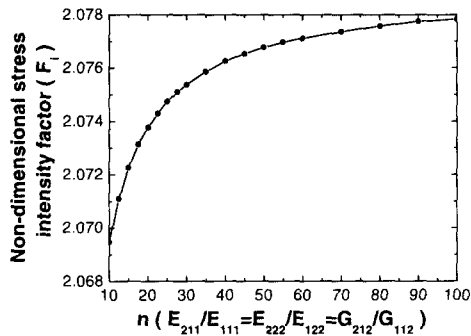


Fig. 4 Non-dimensional stress intensity factor vs. n for a single edge interface crack in orthotropic dissimilar materials

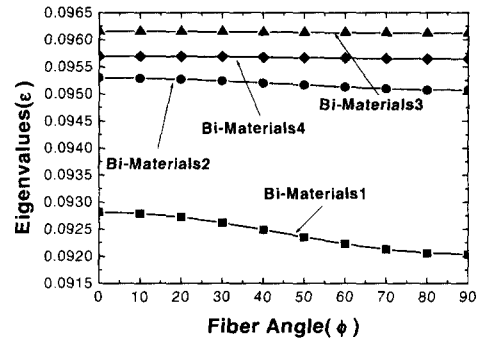


Fig. 5 Eigenvalue vs. fiber angle(Φ) for single edge interface crack in orthotropic and anisotropic dissimilar materials

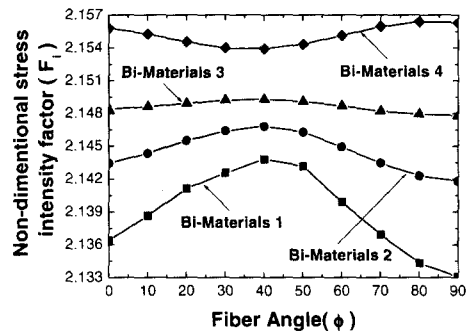


Fig. 6 Non-dimensional stress intensity factor vs. fiber angle(Φ) for single edge interface crack in orthotropic and anisotropic dissimilar materials

Table 4 Material properties of orthotropic and anisotropic bi-materials

Material Properties	Bi - Materials 1		Bi - Materials 2		Bi - Materials 3		Bi - Materials 4	
	Material 1	Material 2	Material 1	Material 2	Material 1	Material 2	Material 1	Material 2
$E_{11}(GPa)$	6.0	0.6	4.0	0.4	3.0	0.3	2.0	0.2
$E_{22}(GPa)$	2.5	0.25	2.5	0.25	2.5	0.25	2.5	0.25
$G_{12}(GPa)$	1.0	0.1	1.0	0.1	1.0	0.1	1.0	0.1
ν_{12}	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29
ϕ	$0^\circ \sim 90^\circ$	0°	$0^\circ \sim 90^\circ$	0°	$0^\circ \sim 90^\circ$	0°	$0^\circ \sim 90^\circ$	0°

력특이성을 가지는 고유치 $\lambda = 0.5 + i\epsilon$ 의 ϵ 과 무차원응력강도계수 F_i 의 변화상태를 Fig. 5와 Fig. 6에 나타내었다. Fig. 6은 같은 균열 길이에 대해 주축 1방향의 재료상수와 주축 2방향의 재료상수 비 ($E_{122}/E_{111} = E_{222}/E_{211}$)의 값이 클수록 무차원 응력강도계수 F_i 의 값은 점점 증가하는 경향을 나타내고 있으며, 또한 주축 1방향과 2방향의 재료상수 값의 차가 작을수록 섬유(fiber)방향에 따른 무차원 응력강도계수의 변화의 폭이 작아짐을 알 수 있다.

7. 결 론

이방성 이종재 접합계면 균열에 대한 에너지 해방률을 구하였고 응력강도계수와와의 관계를 유도하였으며 상반일 경로 적분법을 이용하여 응력강도계수를 수치 해석하였다.

(1) 직교이방성 이종재 접합계면 균열에 대한 응력강도계수의 수치 해석결과는 기존의 결과와 잘 일치하였고 또한, 본 연구에서 얻어진 에너지 해방률 식은 기존의 Suo⁽⁸⁾의 식과 잘 일치하였다.

(2) 이방성 이종재 접합계면 균열문제에 대한 자료가 많지 않은 실정에서 이종재 접합계면균열의 응력강도계수 해석 예를 보였다. 이방성 이종재 접합계면의 강도평가를 체계적으로 해석할 수 있는 기초적 자료가 될 수 있을 것으로 사료된다.

후 기

본 연구는 2000년도 경남대학교 교내학술연구소 성비 지원에 의해 수행된 것이며 지원에 감사드립니다.

참고문헌

(1) Williams, M. L., 1959, "The Stress Around a Fault or Crack in Dissimilar Media," *Bull. Seism. Soc. Am.* 49, pp. 199~204.
 (2) Bogy, D. B., 1970, "On the Problem of Edge-bonded Elastic Quarter-planes Loaded at the Boundary," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 6, pp. 1287~1313.
 (3) Bogy, D. B., 1971, "Two Edge-Bonded Elastic Wedges of Different Materials and Wedge Angles

under Surface Traction," *J. Appl. Mech.*, Vol. 38, pp. 377~386.
 (4) Hein, D. B. and Erdogan. F., 1971, "Stress Singularities in a Two-material Wege," *Int. J. Fract. Mechanics*, Vol. 7, pp. 317~330.
 (5) Carpenter, W. C. and Byers, C., 1987, "A Path Independent Intergral for Computing Stress Intensities for V-notched Cracks in a Bi-material," *Int. J. Fract.*, Vol. 35, pp. 245~268.
 (6) Wang, S. and Choi, I., 1983, "The Interface Crack Between Dissimilar Anisotropic Composite Materials," *J. Appl. Mech.*, Vol. 50, pp. 169~178.
 (7) Lekhnitskii. S. G, 1963, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, Holden-Day, Inc.
 (8) Suo, Z. 1989, "Singularity, Interface and Crack in Dissimilar Anisotropic Media," Harvard University Report Mech-137.
 (9) Ting, T. C. T. and Chou, S. C., 1981, "Edge Singularities in Anisotropic Composites," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 17, No. 11, pp. 1057~1068.
 (10) Zwiers, R. I., Ting, T. C. T. and Spiker, R. L., 1982, "On the Logarithmic Singularity of Free-Edge Stress in Laminated Composites under Uniform Extension," *J. Appl. Mech.*, Vol. 49, pp. 561~569.
 (11) Ting, T. C. T., 1986, "Explicit Solution and Invariance of the Singularities at an Interface Crack in Anisotropic Composites," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 22, No. 9, pp. 965~983.
 (12) 조상봉, 정휘원, 김진광, 2000, "상반일 등고선 적분법을 이용한 이종재 접합계면 균열의 응력강도계수 결정," 한국정밀공학회, 제17권 제5호, pp. 180~185.
 (13) 김진광, 조상봉, 2000, "유사등방성 이종재료 내의 V-노치 균열에 대한 고유치와 고유벡터 해석," 한국정밀공학회, 제17권 제11호, pp. 129~140.
 (14) 조상봉, 양장홍, 1998, "이방성 이종재료 내의 V-노치균열에 대한 응력특이성에 관한 연구," 대한기계학회논문집 A권, 제22권 제7호, pp. 1307~1315.
 (15) 조상봉, 김진광, 1999, "유사등방성과 이방성이 종재료 내의 V-노치 균열에 대한 응력특이성에 관한 연구," 한국정밀학회, 제16권 제10호, pp. 152~163.
 (16) 結成良治, 1993, *界面の力学, 倍風館*.