

열 및 응력 해석용 3차원 적층 유한요소의 개발

조성수* · 하성규†

(2001년 2월 26일 접수, 2001년 8월 23일 심사완료)

Development of Three-Dimensional Layered Finite Element for Thermo-Mechanical Analysis

Seong Soo Cho and Sung Kyu Ha

Key Words: Coupled Field Problem(연성장 문제), Partitioning Technique(분리기법), Layered Brick Element(적층 육면체요소), Thermo-Mechanical Analysis(열-응력해석), Finite Element Method(유한요소법)

Abstract

A multi-layered brick element for the finite element method is developed for analyzing the three-dimensionally layered composite structures subjected to both thermal and mechanical boundary conditions. The element has eight nodes with one degree of freedom for the temperature and three for the displacements at each node, and can contain arbitrary number of layers with different material properties within the element; the conventional element should contain one material within an element. Thus the total number of nodes and elements, which are needed to analyze the multi-layered composite structures, can be tremendously reduced. In solving the global equation, a partitioning technique is used to obtain the temperature and the displacements which are caused by both the mechanical boundary conditions and temperature distributions. The results by using the developed element are compared with the commercial package, ANSYS and the conventional finite element methods, and they are in good agreement. It is also shown that the number of nodes and elements can be tremendously reduced using the element without losing the numerical accuracies.

기호설명		
c	: 비열	[J/kg°C]
d	: 변위	[m]
d_a	: 요소 각 절점에서의 변위	[m]
f	: 체력벡터	
h	: 대류열전달계수	[W/m ² °C]
k	: 열전도계수행렬	[W/m°C]
n	: 단위 법선벡터	
q^*	: 경계면에 주어진 열유속	[W/m ²]
t	: 시간	[sec.]
	t^*	: 경계면에 주어진 표면력
	Δt	: 시간증분 [sec.]
	u^*	: 경계면에 주어진 변위 [m]
	x, y, z	: 직교좌표계
	B	: 온도구배행렬
	\bar{B}	: 변형률-변위행렬
	C	: 열용량행렬
	D	: 응력-변형률관계의 구성행렬
	F_T	: 열흐름벡터
	F_d	: 하중벡터
	K_T	: 열전도행렬
	K_d	: 강성행렬
	N	: 온도장에서의 형상함수행렬
* 회원, 한양대학교 대학원 기계설계학과		
† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학과		
E-mail : sungha@hanyang.ac.kr		
TEL : (031)400-5249 FAX : (031)501-0754		

\bar{N}	: 변위장에서의 형상함수행렬	
N_a	: 요소 각 절점에서의 등매개 형상함수($a=1, 2, \dots, 8$)	
Q	: 단위체적당 발생하는 에너지	[J/m ³ s]
R, \bar{R}	: 변환행렬	
T	: 온도	[°C]
T_a	: 요소 각 절점에서의 온도	[°C]
T_c	: 외부 경계온도	[°C]
T^*	: 경계면에 주어진 온도	[°C]
α	: 열팽창계수벡터	
ϵ	: 변형률벡터	[m/m]
σ	: 응력벡터	[Pa]
ρ	: 밀도	[kg/m ³]
ξ, η, ζ	: 자연좌표계	

1. 서 론

과학기술이 발달함에 따라 일반 금속에 비해 비강도, 비강성이 우수한 복합재료의 사용이 확대되고 있다. 이러한 복합재료는 자동차, 선박, 항공우주분야 등 전 산업분야에 다양하게 사용되고 있다.^(1,2) 특히 항공우주분야에 사용되는 복합재 구조물은 기계적 하중뿐만 아니라 열에 의한 하중도 크게 작용한다. 그러므로 이러한 복합재 구조물의 수치적 해석을 위해서는 온도장 및 변위장이 연성(coupled)되어있는, 즉 연성장(coupled field) 문제⁽³⁻⁶⁾의 해석이 요구된다. 이러한 이유로, 복합재 구조물의 연성장 해석을 위한 많은 연구가 진행되었다.^(2,7-8)

Nilanjan과 Shinha⁽²⁾는 열에 의한 하중이 작용하는 복합재료에 대해 온도장과 변위장을 각각 해석하였다. 즉, 온도장을 해석한 뒤, 계산된 결과를 이용하여 변위장을 해석하였다. 그러나, 각 장(field)을 해석할 때마다 입력자료를 다시 작성하여야 하는 문제점이 있다. Tay⁽⁷⁾는 비정상 상태(unsteady state)의 복합재 구조물에 대한 온도장과 변위장을 동시에 고려하여 해석하는 방법을 사용하였다. 이 경우, 한 번의 입력자료 작성만으로 문제를 해석할 수 있으나, 요소당 자유도수의 증가로 저장 용량이 증가한다. 그리고, 지배방정식의 하중벡터가 온도의 함수인 비선형 문제로서 해의 초기치를 가정한 뒤 해가 수렴할 때까지 반복계산(iteration)하여 연성장을 해석한다. 이러한

반복계산으로 인하여 많은 계산시간이 소요된다.

그리고, Nilanjan과 Shinha,⁽²⁾ Tay,⁽⁷⁾ Cesari⁽⁸⁾ 등은 복합재 구조물 해석에 있어 하나의 요소에 하나의 물성치만을 고려할 수 있는 요소를 사용하였다. 일반적으로 유한요소법을 이용하여 적층된 복합재 구조물의 해석을 수행하려면 각 적층마다 요소를 구성하여야 한다.⁽⁹⁾ 그러나, 두꺼운 적층 구조물의 경우 이러한 해석 방법은 많은 수의 요소를 필요로 하며, 더 많은 계산시간과 저장용량이 요구된다. 그리고 또 다른 방법으로는 두 개 또는 그 이상의 적층을 하나의 재료특성으로 변환하는 해석 방법⁽¹⁰⁾과, 적층 셀이나 평판 요소를 이용하는 방법⁽¹¹⁾이 있다. 그러나, 전자의 경우는 요소수를 줄일 수는 있으나 특정한 적층간의 응력을 계산할 수 없으며, 후자의 경우는 3차원 요소보다 모델링이나 해석 측면에서 용이하지만 해석 가능한 구조물의 형상에 제약이 따른다. 따라서, 두꺼운 적층 구조물의 효율적 해석을 위해 하나의 요소내에 물성치가 서로 다른 여러 개의 층을 포함하는 3차원 다층 요소(three-dimensional multi-layered element)의 개발이 필요하다.⁽¹⁾

따라서, 본 연구에서는 하나의 요소내에 여러 개의 물성치를 포함하며, 온도장과 변위장의 연성장 해석을 위한 3차원 적층 육면체요소를 개발한다. 그리고, 연성장 해석에 Felippa와 Park⁽⁶⁾이 제시한 분리기법(partitioning technique)을 이용한다. 분리기법을 이용할 경우, 온도장과 변위장의 자유도를 동시에 고려하여 전체강성행렬을 구성하지만, 내부적으로 온도장과 변위장의 자유도를 각각 분리하여 해석한다. 즉 우선 온도장을 해석한 후, 해석된 온도장의 결과를 이용하여 변위장을 해석한다. 그러므로, 동일한 입력자료를 이용하여 온도장과 변위장의 해석을 할 수 있다.

2. 해석이론

온도장과 변위장에 대한 지배방정식을 기술하였으며, 본 지배방정식을 이용하여 유한요소 정식화를 수행하였다.^(1,12-18) 또한 온도장의 경우 비정상 상태를 고려하였고, 분리기법을 이용하여 온도장과 변위장을 해석하였다.

2.1 지배방정식

적층 복합재료에서 3차원 비정상 상태 열전달 문제의 지배방정식은 다음 식으로 표현된다.

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^T \mathbf{k} \nabla T + Q \quad (1)$$

여기서, ρ 는 밀도, c 는 비열, Q 는 단위 체적당 에너지 발생률이며, T 는 온도, t 는 시간을 의미하며, \mathbf{k} 는 열전도계수행렬로써 다음과 같다.

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{xy} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{xz} & k_{yz} & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (2)$$

그리고 식 (1)은 경계조건으로 S_1 영역, S_2 영역, S_3 영역에서 각각 온도경계조건, 열유속경계조건, 그리고/또는 대류경계조건을 가질 수 있으며, 이를 식 (3) ~ (5)과 같이 나타낼 수 있다. Fig. 1에 각각의 경계조건을 도시하였다.

$$T = T^* \quad (3)$$

$$\mathbf{n}^T \mathbf{k} \nabla T = q^* \quad (4)$$

$$\mathbf{n}^T \mathbf{k} \nabla T = h(T_c - T) \quad (5)$$

여기서, T^* 과 q^* 는 각각 경계면에 주어진 온도 및 열유속을 나타내며, \mathbf{n} 은 경계면에 수직인 단위 법선 벡터, h 는 대류 열전달계수, T_c 는 외부 온도를 나타낸다.

3차원 응력 해석을 위한 요소 평형방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (6)$$

여기서, $\boldsymbol{\sigma}$ 는 응력벡터, \mathbf{f} 는 체력벡터를 나타낸다.

열에 의한 하중이 고려될 경우, 응력벡터는 다음과 같이 나타낸다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha} \Delta T) \quad (7)$$

여기서, \mathbf{D} 는 응력과 변형률의 관계를 나타내는 구성행렬(constitutive matrix), $\boldsymbol{\varepsilon}$ 은 변형률벡터, $\boldsymbol{\alpha}$ 는 열팽창계수벡터를 나타낸다. 그리고, 식 (6)은 경계조건으로 Γ_1 영역에서 변위 경계조건을, Γ_2 영역에서는 하중 경계조건을 가질 수 있으며, 이를

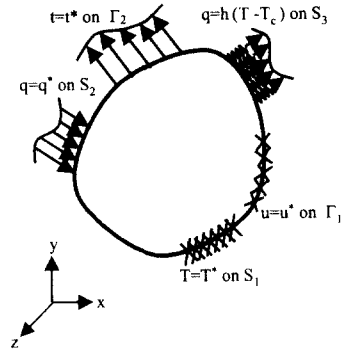


Fig. 1 Three-dimensional body subjected to the external thermal and mechanical boundary conditions

Fig. 1에 나타내었다. 여기서 \mathbf{u}^* 와 t^* 은 각각 경계면에 주어진 변위와 표면력(surface traction)을 의미한다.

2.2 유한요소 정식화

온도장과 변위장이 함께 고려되는 3차원 유한요소해석을 위하여 요소당 8개의 절점과 각 절점에서 온도장에 대한 1개의 자유도(T)와 변위장에 대한 3개의 자유도($\mathbf{d}; d_x, d_y, d_z$)를 가지는 육면체 요소를 개발하였다.

요소내의 온도 T 와 변위 \mathbf{d} 를 8절점 요소의 형상함수(shape function)를 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$T = \sum_{a=1}^8 N_a T_a^e = \mathbf{N} T^e \quad (8)$$

$$\mathbf{d} = \sum_{a=1}^8 N_a \mathbf{d}_a^e = \bar{\mathbf{N}} \mathbf{d}^e \quad (9)$$

여기서, T_a^e 와 \mathbf{d}_a^e 는 각 절점($a=1,2,\dots,8$)에서의 절점온도와 3개의 자유도를 가지는 절점변위를 나타낸다. 그리고 N_a 는 각 절점에서의 등매개형상함수(isoparametric shape function)를 나타내며 자연좌표계(natural coordinates; ξ, η, ζ)를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$N_a = \frac{1}{8} (1 + \xi_a \xi) (1 + \eta_a \eta) (1 + \zeta_a \zeta) \quad (10)$$

where $a = 1, 2, \dots, 8$

2.1절에서 서술한 열 및 기계적 경계조건들과 식 (8) ~ (10)을 이용하여, 식 (1)과 식 (6)을 weak 공식화(weak formulation)하고, Galerkin법을 적용하면 식 (11)과 식 (12)를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_V \rho c \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv \dot{\mathbf{T}}^e + \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{k} \mathbf{B} dv \mathbf{T}^e \\ &= \int_{S_2} \mathbf{q}^* \mathbf{N}^T dS_2 + \int_{S_3} h T_\infty \mathbf{N}^T dS_3 \\ & \quad - \int_{S_3} h \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS_3 \mathbf{T}^e + \int_V Q \mathbf{N}^T dv \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} dv \mathbf{d}^e \\ &= \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \mathbf{a} \mathbf{N}^T \mathbf{T}^e dv \\ & \quad + \int_{\Gamma_2} \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{f} dv + \int_{\Gamma_2} t^* \bar{\mathbf{N}} d\Gamma_2 \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, \mathbf{B} 와 $\bar{\mathbf{B}}$ 는 각각 온도구배행렬(temperature gradient-field matrix)과 변형률-변위행렬(strain-displacement matrix)을 나타낸다. 그리고, 절점온도구배행렬 \mathbf{B}_a 와 절점변형률-변위행렬 $\bar{\mathbf{B}}_a$ 를 각각 식 (13)과 같이 정의하면, $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \cdots \mathbf{B}_a \cdots \mathbf{B}_8]$ 이고, $\bar{\mathbf{B}} = [\bar{\mathbf{B}}_1 \cdots \bar{\mathbf{B}}_a \cdots \bar{\mathbf{B}}_8]$ 이다.

$$\mathbf{B}_a = \begin{pmatrix} N_{a,x} \\ N_{a,y} \\ N_{a,z} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_a = \begin{pmatrix} N_{a,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{a,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{a,z} \\ 0 & N_{a,z} & N_{a,y} \\ N_{a,z} & 0 & N_{a,x} \\ N_{a,y} & N_{a,x} & 0 \end{pmatrix}$$

식 (11)과 식 (12)를 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{C}^e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{T}}^e \\ \mathbf{d}^e \end{pmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_T^e & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_d^e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}^e \\ \mathbf{d}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_T^e \\ \mathbf{F}_d^e(\mathbf{T}^e) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

단,

$$\mathbf{C}^e = \int_V \rho c \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv \quad (15)$$

$$\mathbf{K}_T^e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{k} \mathbf{B} dv + \int_{S_3} h \mathbf{N}^T \mathbf{N} dS_3 \quad (16)$$

$$\mathbf{K}_d^e = \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} dv \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_T^e &= \int_{S_2} \mathbf{q}^* \mathbf{N}^T dS_2 \\ & \quad + \int_{S_3} h T_\infty \mathbf{N}^T dS_3 + \int_V Q \mathbf{N}^T dv \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_d^e(\mathbf{T}^e) &= \int_V \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{f} dv + \int_{\Gamma_2} t^* \bar{\mathbf{N}} d\Gamma_2 \\ & \quad + \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \mathbf{a} \mathbf{N}^T \mathbf{T}^e dv \end{aligned} \quad (19)$$

이며, \mathbf{C}^e 는 요소열용량행렬, \mathbf{K}_T^e 는 요소열전도행렬, \mathbf{K}_d^e 는 요소강성행렬, \mathbf{F}_T^e 는 요소열흐름 벡터이고, $\mathbf{F}_d^e(\mathbf{T}^e)$ 는 온도장이 고려된 요소 절점 하중 벡터를 나타낸다. 그리고, 식 (15) ~ (19)를 수치적분하기 위해 자연좌표계(natural coordinate)로 사상(mapping)시키면 다음과 같다.

$$\mathbf{C}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho c \mathbf{N}^T \mathbf{N} |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{k} \mathbf{B} |J| d\xi d\eta d\zeta \\ & \quad + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h \mathbf{N}^T \mathbf{N} |\bar{J}| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_d^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}} |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_T^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{q}^* \mathbf{N}^T |\bar{J}| d\xi d\eta \\ & \quad + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h T_\infty \mathbf{N}^T |\bar{J}| d\xi d\eta \\ & \quad + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q \mathbf{N}^T |J| d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_d^e(\mathbf{T}^e) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{f} |J| d\xi d\eta d\zeta \\ & \quad + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t^* \bar{\mathbf{N}} |\bar{J}| d\xi d\eta \\ & \quad + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{D} \mathbf{a} \mathbf{N}^T \mathbf{T}^e |J| d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (24)$$

J 는 기준좌표계(x, y, z)와 자연좌표계(ξ, η, ζ)사이의 3차원 Jacobian행렬을 나타내며, \bar{J} 는 2차원 Jacobian행렬로서 다음과 같이 정의된다.

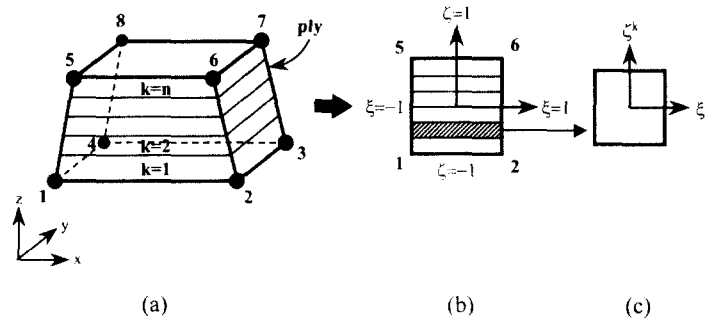


Fig. 2 Mapping of a multi-layered brick element into the natural and sub-natural coordinates for calculation of the element stiffness marix; (a) Layered brick element and global coordinate system, (b) Lay up sequence in natural coordinate system(ξ, η, ζ), (c) k-th layer in sub-natural coordinates(ξ^k, η^k, ζ^k)

$$J = \begin{bmatrix} x, \xi & x, \eta & x, \zeta \\ y, \xi & y, \eta & y, \zeta \\ z, \xi & z, \eta & z, \zeta \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} x, \xi & x, \eta \\ y, \xi & y, \eta \end{bmatrix}$$

그리고 행렬식 $|J|$ 와 $|\bar{J}|$ 을 계산하기 위해서는 기준좌표계와 자연좌표계사이의 관계가 필요하며, 형상함수를 이용하여

$$\begin{aligned} x &= \sum_{a=1}^8 N_a(\xi, \eta, \zeta) x_a \\ y &= \sum_{a=1}^8 N_a(\xi, \eta, \zeta) y_a \\ z &= \sum_{a=1}^8 N_a(\xi, \eta, \zeta) z_a \end{aligned} \quad (26)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 여기서 x_a, y_a 그리고 z_a 는 요소의 임의 절점 a 에서의 기준좌표값이 된다.

한편, 식 (20) ~ (22)과 식 (24)에서 열용량 ρc , 열전도계수행렬 k , 구성행렬 D 와 열팽창계수벡터 α 는 Fig. 2에서 알 수 있듯이 요소내부에서 변하게 된다. 이러한 요소내 물성치의 변화를 고려하기 위하여, 요소열용량행렬 C^e , 요소열전도행렬 K_T^e , 요소강성행렬 K_d^e 그리고 요소절점하중벡터 $F_d^e(T^e)$ 는 요소를 구성하는 각각의 층에서 적층 순서에 따라 개별적으로 적분함으로써 구해진다.

$$C^e = \sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho^k c^k N^T N |J| |J^k| d\xi^k d\eta^k d\zeta^k \quad (27)$$

$$\begin{aligned} K_T^e &= \sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T k^k B |J| |J^k| d\xi^k d\eta^k d\zeta^k \\ &+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h N^T N |\bar{J}| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (28)$$

$$K_d^e = \sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{B}^T D^k \bar{B} |J| |J^k| d\xi^k d\eta^k d\zeta^k \quad (29)$$

$$\begin{aligned} F_d^e(T^e) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{N}^T f |J| d\xi d\eta d\zeta \\ &+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t^* \bar{N} |\bar{J}| d\xi d\eta \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{B}^T D^k \alpha^k N T^e |J| |J^k| d\xi^k d\eta^k d\zeta^k \end{aligned} \quad (30)$$

여기서 k 는 임의의 층번호를 표시하며, n 은 요소내에 적층된 전체 층의 개수를 나타낸다. 또한 식 (27) ~ (30)에서 k^k, D^k 와 α^k 는 k 번째 적층판의 적층판축(off-axis) 열전도계수행렬, 구성행렬과 열팽창계수벡터를 나타내며, 다음과 같은 변환식을 이용하여 구할 수 있다.

$$k^k = (R^k)^T k_o^k R^k \quad (31)$$

$$D^k = (\bar{R}^k)^T D_o^k \bar{R}^k \quad (32)$$

$$\alpha^k = \bar{R}^k \alpha_o \quad (33)$$

여기서 k_o^k, D_o^k 와 α_o^k 각각은 k 번째 적층판의 플라이축(on-axis) 열전도행렬, 구성행렬 그리고 열팽창계수벡터를 나타내며, R^k 와 \bar{R}^k 는 k 번째 적층판의 변환행렬(transformation matrix)이며, 각각 식 (34)과 식 (35)로 정의한다.

$$R^k = \begin{bmatrix} m & n & 0 \\ -n & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\bar{R}^k = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -2mn & 2mn & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

여기서, $m = \cos \theta, n = \sin \theta$ 이며, θ 는 적층각도이다. 또한 Fig. 2에서 알 수 있듯이, 자연좌표계에서의 k 번째 적층판의 적분구간이 부(sub)-자연좌표계(ξ^k, η^k, ζ^k)의 영역으로 다시 사상(mapping)되므로 새로운 Jacobian행렬 J^k 가 다음과 같이 정의된다.

$$J^k = \begin{bmatrix} \xi_{,\xi^k} & \xi_{,\eta^k} & \xi_{,\zeta^k} \\ \eta_{,\xi^k} & \eta_{,\eta^k} & \eta_{,\zeta^k} \\ \zeta_{,\xi^k} & \zeta_{,\eta^k} & \zeta_{,\zeta^k} \end{bmatrix} \quad (36)$$

그리고 행렬식 $|J^k|$ 를 계산하기 위한 자연좌표계와 부-자연좌표계사이의 관계식은 식 (37)와 같다.

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{a=1}^8 N_a(\xi^k, \eta^k, \zeta^k) \xi_a^k \\ \eta &= \sum_{a=1}^8 N_a(\xi^k, \eta^k, \zeta^k) \eta_a^k \\ \zeta &= \sum_{a=1}^8 N_a(\xi^k, \eta^k, \zeta^k) \zeta_a^k \end{aligned} \quad (37)$$

여기서 ξ_a^k, η_a^k 그리고 ζ_a^k 는 k 번째 적층판 코너 a 에서의 자연좌표값을 표시하고 있으며, N_a 는 식 (10)에서 정의한 형상함수이다.

2.3 시간해법

식 (14)의 1행은 비정상 상태의 열전도 방정식을 유한요소 정식화한 것이다. 이 식을 시간해법 중 후방 Euler방법(Backward Euler Method)을 이용

하여 정리하면, 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$K_{eff}^e T_t^e = F_{eff}^e \quad (38)$$

여기서,

$$K_{eff}^e = \frac{1}{\Delta t} C^e + K_T^e \quad (39)$$

$$F_{eff}^e = F_t^e + \frac{1}{\Delta t} C^e T_{t-1}^e \quad (40)$$

이며, Δt 는 시간증분을, T_t^e, T_{t-1}^e 는 각각 시간이 $t, t-1$ 일 때의 요소온도를 의미한다. 그리고, K_{eff}^e 는 요소유효열전도행렬(effective conductivity matrix)을, F_{eff}^e 는 요소유효열흐름벡터(effective heat flow vector)를 의미한다. 따라서, 식 (14)를 식 (38)을 이용하여 정리하면,

$$\begin{bmatrix} K_{eff}^e & 0 \\ 0 & K_d^e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_t^e \\ d^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{eff}^e \\ F_d^e(T_t^e) \end{pmatrix} \quad (41)$$

이며, 식 (41)의 좌변 첫 항은 전체강성행렬(total stiffness matrix)이다.

2.4 해석절차

연성장 해석에 Felippa와 Park⁽⁶⁾이 제시한 분리기법(partitioning technique)을 이용한다. 분리기법을 이용한 연성장 해석흐름을 Fig. 3에 나타내었다. 연성장 문제 해석시, 형상(geometry) 정보, 적층 정보와 물성치 그리고 경계조건을 이용하여 식 (41)을 구성한다. 그리고, 식 (41)의 우변 2행의 절점하중벡터에는, 식 (41)에서 1행의 온도장 해석을 수행하고, 여기서 얻어진 온도장의 해석 결과를 적용한다. 그런 후, 식 (41)에서 2행의 변위장을 해석하게 된다. 그러므로, 동일한 입력자료를 이용하여 온도장과 변위장의 해석을 할 수 있다.

3. 검증 및 해석결과

2절의 이론을 근거로 요소당 8개의 절점과 각 절점에서 온도장에 대한 1개의 자유도(T)와 변위장에 대한 3개의 자유도($d; d_x, d_y, d_z$)를 가지

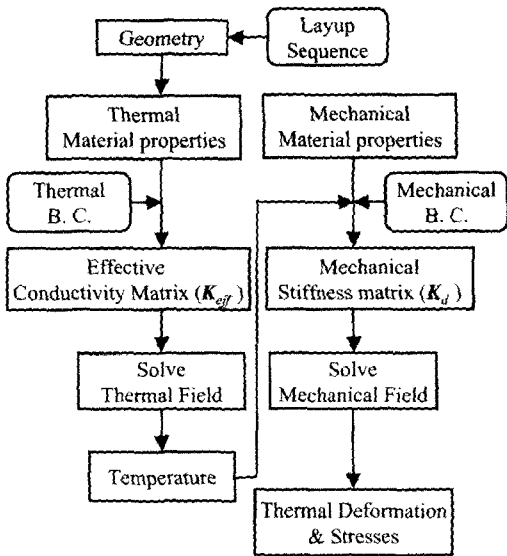
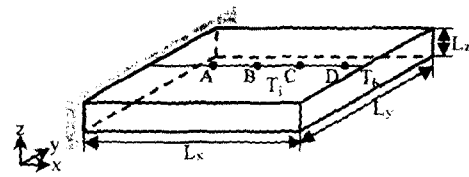


Fig. 3 Analysis procedure of the problem coupled the temperature and displacement field using partitioning technique

는 3차원 육면체 요소를 개발하였다. 개발된 요소의 검증 을 위하여, 등방성 재료에 대한 연성장 해석 결과를 상용 패키지 ANSYS의 결과와 비교, 검토한다. 그리고, 적층 복합재에 대한 연성장 해석 결과는 요소내 적층 개수를 달리함에 따른 온도와 변위를 비교, 검토한다.

3.1 검증모델 I

개발된 요소를 이용하여 온도장과 변위장의 연성장 해석을 하며, 연성장 해석시 분리기법을 이용한다. 개발된 요소의 검증을 위하여 Fig. 4에 도시한 모델을 이용하였다. 검증모델은 길이와 폭이 각각 0.1 m이고 두께는 0.01 m인 평판으로, 길이, 폭 방향으로는 각각 10개, 두께 방향으로 2개의 메시(mesh)를 하였다. 온도장 해석시 초기온도, T_i 는 0°C로 하고, 경계조건으로는 $x = 0.1$ m 위치의 면에 일정 온도 100°C를 유지하는 온도경계조건, T_b 로 하였다. 그리고, 시간증분, Δt 는 1초로 하여 총시간 60초까지 계산하였다. 변위장 해석시 경계조건으로는 $x = 0$ m 위치의 면을 완전 구속된 상태로 하였다. 여기서 재료는 알루미늄 7075을 사용하였으며, 물성치는 Table 1에 나타내었다. 상용 패키지 ANSYS는 온도장과 변위장의 연성장 해석이 등방성 재료의 경우에만 가능하



Initial Temperature, $T_i = 0$ °C
Boundary Temperature, $T_b = 100$ °C at $x = L_x$
 $L_x = 0.1$ m, $L_y = 0.1$ m, $L_z = 0.01$ m

Fig. 4 Verification model I : three-dimensional isotropic plate

Table 1 Material properties of isotropic plate for the verification model I

Material Property	unit	Aluminum 7050
E	GPa	70.3
ν		0.33
α	m/m/°C	23.5×10^{-6}
ρ	kg/m ³	2830
c	J/kg °C	860
k	W/m °C	180

다. 검증모델 I에서 등방성 재료를 선택한 것은 분리기법에 의한 온도장과 변위장의 연성장 해석이 효과적으로 적용이 되었는가를 상용 패키지 ANSYS와 비교하기 위한 것이다.

개발된 요소를 이용한 수치계산 결과와 상용 패키지 ANSYS의 연성요소(coupled element)를 이용한 수치계산 결과를 Fig. 5와 Fig. 6에 도시하였다. Fig. 5는 시간에 따른 온도변화를 A, B, C, D 지점에 대하여 도시한 것이다. 여기서 A, B, C, D 지점은 Fig. 4에 도시된 곳으로, 그 위치는 $y = 0.05$ m, $z = 0.01$ m이면서 각각 $x = 0.03, 0.05, 0.07, 0.09$ m인 곳이다. 그리고 Fig. 6은 열전달이 시작되고 시간이 60초가 경과된 후, $y = 0.1$ m, $z = 0.01$ m에 위치한 모서리에서의 변위장을 x축을 따라 도시한 것이다. Fig. 5와 Fig. 6에서 보는 바와 같이 개발된 요소를 이용한 온도장과 변위장 해석 결과가 상용 패키지 ANSYS의 결과와 잘 일치하고 있다. 따라서 분리기법을 이용한 온도장과 변위장의 연성장 해석에 개발된 요소를 이용할 경우 유효한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

3.2 검증모델 II

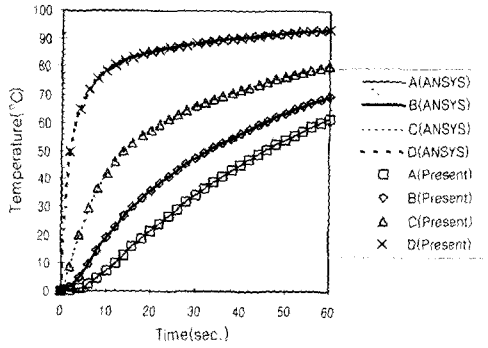


Fig. 5 Verification model I : Comparison of temperature variation with time at point A, B, C, and D which is at $y = 0.05$ and $z = 0.01$ m

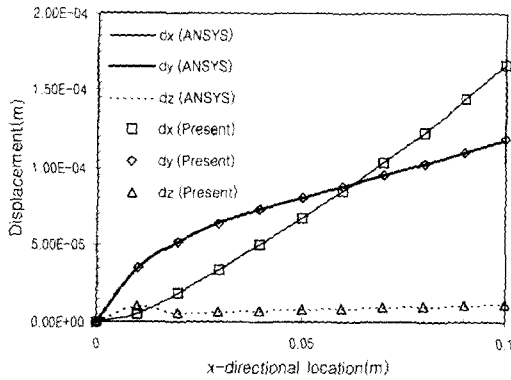
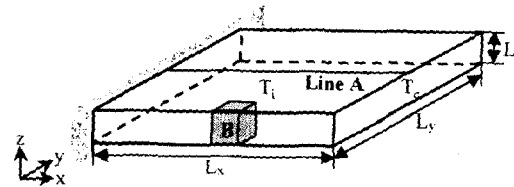


Fig. 6 Verification model I : Comparison of displacement along x-direction at $y = 0.1$ and $z = 0.01$ m

개발된 요소는 하나의 요소내에 여러 개의 물성치를 포함할 수 있다. 검증모델 II에서는 개발된 요소를 이용하여, 하나의 요소가 여러 개의 물성치를 포함할 때의 온도장과 변위장의 연성장 해석 결과와 하나의 요소가 하나의 물성치를 포함할 때의 해석 결과를 비교, 검토하였다. 검증모델은 길이와 폭이 각각 0.5 m이고 두께는 0.05 m인 적층평판(laminate plate)으로 Fig. 7에 도시하였다. 온도장 해석시 초기온도, T_i 는 0°C로 하고, $x = 0.5$ m 위치의 면에 h, T_c 가 각각 300 W/m²·°C, 50 °C인 대류경계조건을 주었다. 그리고, 시간증분, Δt 는 60초로 하여 총시간 3600초까지 계산하였다. 변위장 해석시 경계조건으로는 $x = 0$ m 위치의 면을 완전 구속된 상태로 하였다. 여기서



Initial Temperature, $T_i = 0$ °C
 Convection Boundary :
 $h = 300$ W/m²·°C, $T_c = 50$ °C at $x = L_x$
 $L_x = 0.5$ m, $L_y = 0.5$ m, $L_z = 0.05$ m

Fig. 7 Verification model II : Three-dimensional layered composite plate

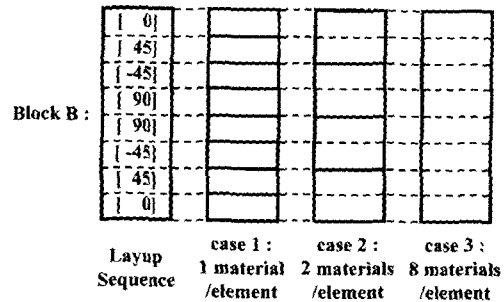


Fig. 8 Magnified scheme of block B in Fig. 7 which shows a layup sequence and a classification of cases in the verification model II

재료는 복합재료 AS/3501(graphite/epoxy)을 사용하였으며, 물성치는 Table 2에 나타내었다. 분리기법을 이용한 온도장과 변위장의 연성장 해석은 Fig. 8에 도시한 바와 같이 세 가지 경우로 나누어 해석하였다. Fig. 8은 Fig. 7의 블록 B를 xz 평면에서 자세히 도시한 것으로, $[0/\pm 45/90]$ 의 적층순서로 총 8장이 적층된 것이다. 그리고 각각의 해석 경우는 하나의 요소에 몇 개가 적층되는지, 즉 하나의 요소에 몇 개의 물성치가 포함되는지로 나누었다. 두께 방향으로 총 적층수가 8개인 현 모델에서, case 1은 하나의 요소가 하나의 적층을 가지는 일반적 복합재 구조물 해석 방법^(2,7-9)으로 해석하였다. 즉 두께 방향으로 총 8개의 요소를 사용하여 하나의 요소가 하나의 적층을 가진다. 그리고 case 2와 case 3은 하나의 요소가 여러 개의 적층을 가지는 다층 적층 방법으로 해석하였다. 즉 case 2는 두께 방향으로 총 4개의 요소를 사용하여 하나의 요소가 2개의 적층을 가지며, case 3은 두께 방향으로 총 1개의 요

Table 2 Material properties of composites plate for verification model II

Material Property	unit	AS/3501(Graphite/Epoxy)
E_{xx}	GPa	138.0
$E_{yy} = E_{zz}$	GPa	8.96
$G_{xy} = G_{xz}$	GPa	7.1
G_{yz}	GPa	3.45
$\nu_{xy} = \nu_{xz}$		0.3
ν_{yz}		0.3
α_{xx}	m/m/°C	-0.3×10^{-6}
$\alpha_{yy} = \alpha_{zz}$	m/m/°C	28.1×10^{-6}
k_{xx}	W/m °C	4.62
$k_{yy} = k_{zz}$	W/m °C	0.72
ρ	kg/m ³	1600
c	J/kg °C	1000

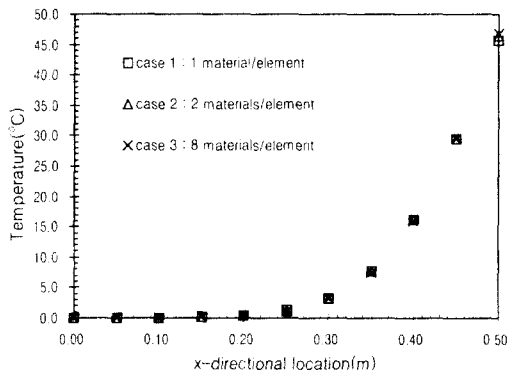


Fig. 9 Verification model II : Comparison of temperature along line A which is at $y = 0.25$ and $z = 0.05$ m

소를 사용하여 하나의 요소가 8개의 적층을 가진다. 길이, 폭 방향으로 각각 10개의 메시(mesh)를 하였다.

Fig. 7에 도시되어 있는 line A를 따라, 세 가지 경우의 온도장과 변위장 수치해석 결과를 Fig. 9와 Fig. 10에 각각 도시하였다. Line A의 위치는 $y = 0.25, z = 0.05$ m인 곳이며, case 1은 하나의 요소가 하나의 물성치만을 포함할 수 있는 기존 연구와 동일한 방법이다. 이러한 이유로 case 1의 결과와 하나의 요소가 여러 물성치를 포함하는 경우인 case 2, 3의 결과를 각각 비교하였다. 온도장 해석 결과인 Fig. 9는 온도를 line A를 따라 도시한 것으로, case 1과 case 2, 3의 결과가 잘 일치하고 있다. 그리고 변위장 해석 결과인 Fig. 10은 좌우 대칭으로 변위가 0인 d_x 를 제외한, 변

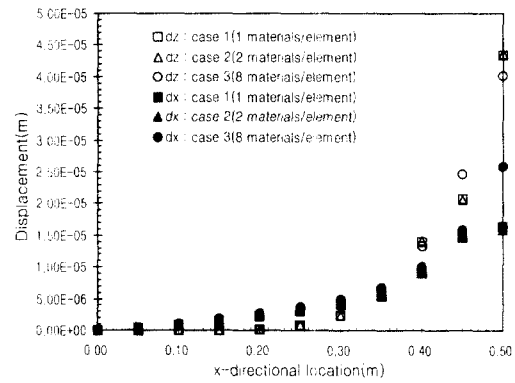


Fig. 10 Verification model II : Comparisons of a deflection, d_x, d_z along line A which is at $y = 0.25$ and $z = 0.05$ m

위 d_x, d_z 를 line A를 따라 도시한 것이다. 여기서 하나의 요소가 하나의 물성치를 포함하는 일반적 복합재 구조물 해석 방법인 case 1의 변위를 기준으로 하나의 요소가 여러 개의 물성치를 포함하는 경우인 case 2, 3의 변위를 비교하여 볼 때, case 3의 경우가 다소 오차가 있음을 알 수 있다. 온도가 증가함에 따라 열팽창이 발생하고, $x = 0.5$ m 위치의 자유끝단부에서는 적층 각도가 0도인 경우보다 90도인 경우가 x 방향 열팽창 계수가 크기 때문에 자유끝단부 단면 가운데 부분이 바깥쪽으로 볼록한 변형 양상을 나타낸다. 그런데 case 3의 경우, z 방향으로 요소가 1개이기 때문에 바깥쪽으로 볼록한 변형 양상이 나타나지 않음으로 인하여 발생한 오차이다.

하나의 요소가 하나의 물성치를 포함하는 case 1과 하나의 요소가 여러 개의 물성치를 포함하는 경우인 case 2, 3의 해를 비교한 결과, case 2의 경우처럼 해의 정확도가 떨어지지 않을 정도의 적절한 요소수를 가지도록 메시를 하면서, 하나의 요소가 여러 개의 물성치를 포함할 경우, 정확성이 크게 떨어지지 않는 유효한 결과를 구할 수 있었다. 또한 절점(node)과 요소(element)의 수도 하나의 요소에 여러 개의 물성치를 포함시킴으로써 그 수를 많이 감소시킬 수 있었으며, 특히 계산 소요시간도 크게 감소시키면서 좋은 결과를 얻을 수 있었다. 여기서 계산 소요시간은 CPU가 Pentium III 866 MHz이고 램(ram)이 128 Mbyte인 컴퓨터에서 해석시 소요된 시간이다. 절점과 요소의 수를 비교한 것을 Fig. 11에, 계산

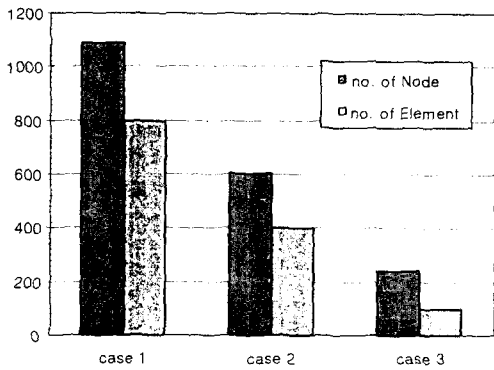


Fig. 11 Comparison of the number of node and element for three case in verification model II

소요시간 비교를 Fig. 12에 각각 도시하였다.

4. 결론

온도장과 변위장이 연성된 적층 복합재료의 연성장 해석인 본 연구에서 얻은 결론은 다음과 같다.

(1) 온도장과 변위장의 연성장 해석을 위한 3차원 적층 육면체 요소를 개발하였다. 그리고 이 요소는 요소당 8개의 절점을 가지며, 각 절점에서 온도장에 대한 1개의 자유도와 변위장에 대한 3개의 자유도를 가진다.

(2) 개발된 요소와 연성장 해석시 사용된 분리기법의 유효성을 검증하기 위하여, 등방성 재료 구조물을 연성장 해석하고, 그 결과를 상용 패키지 ANSYS의 연성요소를 이용한 해석 결과와 비교 검토하였다. 그 결과 유효한 결과를 얻었다.

(3) 개발된 요소를 이용할 경우, 하나의 요소에 여러 개의 물성치를 포함시킴으로써, 절점(node)과 요소(element)의 수 뿐만 아니라 계산시간도 감소시킬수 있었다. 그리고 해의 정확성도 떨어지지 않으면서, 효율적으로 온도장과 변위장의 연성장 해석 결과를 얻을 수 있었다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계신기술 연구센터와 한양대학교 BK21 기계분야 사업단의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

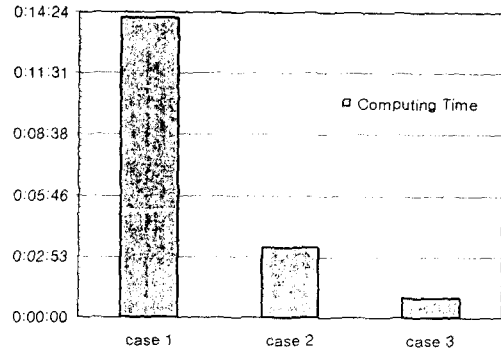


Fig. 12 Comparison of the computing time for three case in verification model II

참고문헌

- (1) 안병규, 1995, "3차원 적층 육면체 요소를 이용한 복합재 구조물의 응력 해석," 석사학위논문, 한양대학교, 서울.
- (2) Mukherjee, Nilanjan and Shina, P. K., 1994, "3 D Thermostructural Response in Thick Laminated Composites: A Finite Element Approach," *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 13, pp. 977~997.
- (3) Zienkiewicz, O. C., 1984, "Coupled Problems and their Numerical Solution," *Numerical Methods in Coupled Systems*, John Wiley & Son Ltd., pp. 35~58.
- (4) Lewis, R. W. and Bass, B. R., 1976, "The Determination of Stresses and Temperatures in Cooling Bodies by Finite Elements," *Transaction of the ASME Series C, Journal of Heat Transfer*, Vol. 98, No. 3, pp. 478~484.
- (5) Wood, W. L., 1987, "Some Transient and Coupled Problems - A State-of-the-Art Review," *Numerical Methods for Transient and Coupled Problems*, John Wiley & Son Ltd., pp. 149~177.
- (6) Felippa, C. A. and Park, K. C., 1980, "Staggered Transient Analysis Procedures for Coupled Mechanical Systems: Formulation," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 24, pp. 61~111.
- (7) Tay, T. E., 1992, "Finite Element Analysis of Thermoelastic Coupling in Composites," *Computer*

- & *Structures*, Vol. 43, No. 1, pp. 107~112.
- (8) Cesari, F., 1994, "Simple Programmes on Thermoelastic Analysis of Composite Laminated Materials," *Computer & Structures*, Vol. 53, No. 3, pp. 551~567.
- (9) Wanthal, S. P. and Yang, H. T. Y., 1991, "Three-Dimensional Finite Element Formulation for Laminated Plates," *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 10, pp. 330~355.
- (10) Wang, A. S. D. and Crossman, F. W., 1978, "Calculation of Edge Stresses in Multilayered Laminates by Sub-Structuring," *Journal of Composites Materials*, Vol. 12, pp. 76~82.
- (11) Kant, T and Menon, M. P., 1991, "Estimation of Interlaminar Stresses in Fiber Reinforced Composite Cylindrical Shells," *Computer & Structures*, Vol. 38, No. 2, pp. 131~147.
- (12) 조성수, 하성규, 1999, "온도-엔탈피 관계를 이용한 응고과정의 유한요소 해석," 대한기계학회논문집, 제23권, 제10호, pp. 1213~1222.
- (13) Holman, J. P., 1992, *Heat Transfer*, 7th Edition, McGraw-Hill Book Co.
- (14) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., 1989, *The Finite Element Method*, Fourth Edition, Vol. 1, McGraw-Hill Book Co.
- (15) Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., 1989, *The Finite Element Method*, Fourth Edition, Vol. 2, McGraw-Hill Book Co.
- (16) Ha, S. K. and Jeong, J. Y., 1996, "Design Optimization of Hip Prosthesis of Thick Laminated Composites by Developing Finite Element Method and Sensitivity Analysis." *KSME Journal*, Vol. 10, No. 1, pp. 1~11.
- (17) Tsai, S. W. and Hahn, H. T., 1980, *Introduction to Composites Materials*, Technomic Publishing Company.
- (18) Desalvo, G. J. and Swanson, J. A., 1994, *ANSYS(Engineering Analysis System) User's Manual*, Swanson Analysis System.