

## 회전 외팔보의 유한요소 해석

정진태<sup>†</sup> · 유홍희\* · 김강성\*\*  
(2001년 1월 31일 접수, 2001년 8월 8일 심사완료)

### A Finite Element Analysis for a Rotating Cantilever Beam

Jintai Chung, Hong Hee Yoo and Kang Sung Kim

**Key Words :** Rotating Cantilever Beam(회전외팔보), Stretch Deformation(인장변위), Finite Element Method(유한요소법), Natural Frequency Variation(고유진동수)

#### Abstract

A finite element analysis for a rotating cantilever beam is presented in this study. Based on a dynamic modeling method using the stretch deformation instead of the conventional axial deformation, three linear partial differential equations are derived from Hamilton's principle. Two of the linear differential equations show the coupling effect between stretch and chordwise deformations. The other equation is an uncoupled one for the flapwise deformation. From these partial differential equations and the associated boundary conditions, two weak forms are derived: one is for the chordwise motion and the other is for the flapwise motion. The weak forms are spatially discretized with newly defined two-node beam elements. With the discretized equations or the matrix-vector equations, the behaviors of the natural frequencies are investigated for the variation of the rotating speed.

#### 1. 서론

회전외팔보는 터빈 블레이드, 비행기 회전날개와 같은 실용적인 분야에 응용되기 때문에 회전외팔보의 동역학적 특성들을 분석할 필요가 있다. 회전외팔보의 고유진동수 계산에 대한 초기 해석적 모델은 Southwell 과 Gough 에 의해서 제안되었고 Rayleigh 의 에너지정리에 기초하여 보의 회전진동수에 대해서 고유진동수에 관련한 방정식이 제안되었다.<sup>(1)</sup> 이 식은 Southwell 방정식으로 알려져 있고 많은 해석에 이용되고 있다. 이보다 더 정확한 고유진동수를 얻기 위해 Schilhans 가 회전외팔보의 굽힘진동을 지배하는 선형 편미분 방정식을 유도하였다.<sup>(2)</sup> 한편 컴퓨터의 발전으로 수치적 접근을 기초로 한 많은 논문들이 출판되어 왔

다. 예로 참고문헌<sup>(3-6)</sup>에서 회전외팔보의 모드 해석에 대한 방법이 연구되었다.

구조물의 과도해석에 있어서 가장 널리 이용된 모델링방법은 고전적 선형모델링법이다.<sup>(7-9)</sup> 이 모델링법은 직교 좌표계에서 선형변형률을 이용한다. 이 방법은 수식이 간단하고 유한요소해석에 적합하며, 자유도 축약기술의 적용이 용이하다. 하지만 이 방법은 회전운동을 하는 구조물에 적용할 때 큰 오차를 야기한다. 이런 문제점을 극복하기 위해서 몇몇 비선형 모델링법<sup>(10-12)</sup>이 소개되었다. 하지만 모델링에 비선형이 포함되어 막대한 계산시간이 요구되는 단점이 있다. 근래에 유연한 보의 동역학적 해석에 대한 새로운 선형 모델링법<sup>(13)</sup>이 소개되었다. 이 방법으로 고전적 선형 모델링법의 문제를 해결했을 뿐만 아니라 비선형모델링 방법의 비효율성을 해소할 수 있다. 하지만 이 방법은 가정모드법을 쓰기 때문에 비교 함수들이 기초함수들로 선택되어야 한다. 이런 문제를 극복하기 위해서 새로운 모델링법에 기초한 허용함수를 사용할 수 있는 유한요소해석법의 개발이 필요하다.

<sup>†</sup> 책임저자, 회원, 한양대학교 공학대학 기계공학과

E-mail : jchung@hanyang.ac.kr

TEL : (031)400-5287 FAX : (031)406-5550

\* 회원, 한양대학교 공과대학 기계공학부

\*\* 한양대학교 대학원 정밀기계공학과

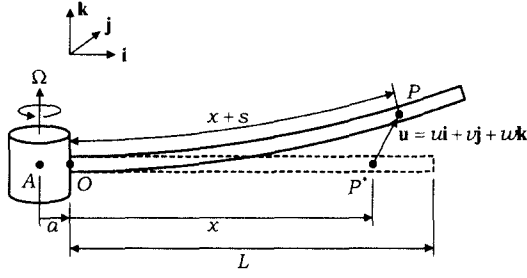


Fig. 1 Configuration of a rotating cantilever beam

본 논문에서는 회전 외팔보의 진동을 기술하기 위하여 기존의 직교좌표계의 방향과 일치하는 변위들 대신, 면내 및 면외변위, 그리고 길이방향의 인장변위를 사용하여, 기존의 비선형방정식을 대신할 수 있는 선형 편미분방정식을 유도하고 이에 대한 유한요소해석법을 제시하였다. 편미분방정식과 경계조건에서 면내방향과 면외방향 운동에 대한 변분형(weak form)을 유도하였다. 변분형을 새롭게 정의된 두 절점 요소를 이용하여 공간상에서 이산화하면 면내 및 면외방향에 대한 일련의 상미분 방정식이 얻고, 상미분 방정식들로서 회전각 속도의 변화에 따라 회전외팔보의 고유진동수의 변화와 시간응답을 분석하였다.

## 2. 운동 방정식

Fig. 1에서 길이가  $L$ 인 외팔보가 반지름이  $a$ 인 강체축의  $O$  점에 고정되어 있다. 외팔보는 Euler 보로서 재질은 균일하고 등방성이며 대칭축에 대해 회전각속도  $\Omega$ 로 회전한다. 직교단위벡터  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 는 축과 함께 회전하며 보의 변형은 점  $P^*$ 가 점  $P$ 로 이동할 때 일반적으로 축방향변위  $u$ , 면내변위  $v$  그리고 면외변위  $w$ 로 각각 표현된다.

서론에서 언급한 바와 같이 인장변위  $s$ 의 사용은 축방향변위  $u$ 의 사용보다 유리하다.  $s$ 와  $u, v$ , 그리고  $w$ 의 관계는 다음과 같다.<sup>(6)</sup>

$$u = s - h_v - h_w \quad (1)$$

$$h_v = \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx, \quad h_w = \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2)$$

회전 외팔보가  $\Omega$ 로 회전할 때 운동 에너지는 다음 식으로 주어진다.

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \mathbf{v}_P \cdot \mathbf{v}_P dx \quad (3)$$

여기서  $\mathbf{v}_P$ 는 속도벡터이며 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{v}_P = (\dot{u} - \Omega v) \mathbf{i} + [\dot{v} + \Omega(a + x + u)] \mathbf{j} + \dot{w} \mathbf{k} \quad (4)$$

한편 보의 변형에너지는

$$U = \frac{1}{2} E \int_0^L \left[ A \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 + I_z \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + I_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (5)$$

이다. 여기서  $E$ 는 영의계수,  $I_y, I_z$ 는  $y, z$ 축에 대한 면적관성모멘트이다.

운동방정식은 헤밀턴의 원리를 적용함으로써 다음과 같이 유도된다.

$$\rho A \left[ \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 s - \dot{\Omega} v + \Omega^2 (h_v + h_w) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_v + h_w) \right] - EA \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \rho A \Omega^2 (a + x) \quad (6)$$

$$\rho A \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial s}{\partial t} - \Omega^2 v + \dot{\Omega} s - 2\Omega \frac{\partial}{\partial t} (h_v + h_w) - \dot{\Omega} (h_v + h_w) \right] + EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \int_L^x \rho A \left[ \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 (a + \xi + s) - \dot{\Omega} v + \Omega^2 (h_v + h_w) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_v + h_w) \right] d\xi \right\} = -\rho A \dot{\Omega} (a + x), \quad (7)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} \int_L^x \rho A \left[ \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 (a + \xi + s) - \dot{\Omega} v + \Omega^2 (h_v + h_w) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_v + h_w) \right] d\xi \right\} = 0 \quad (8)$$

비선형 편미분방정식인 식 (6)-(8)을  $y, z$ 방향의 비보존력을 고려하고 선형화하면 다음과 같은 선형 편미분방정식들을 얻게 된다.

$$\rho A \left( \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 s - \dot{\Omega} v \right) - EA \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \rho A \Omega^2 (a + x) \quad (9)$$

$$\rho A \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial s}{\partial t} - \Omega^2 v + \dot{\Omega} s \right) + EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \rho A \Omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[ a(L-x) + \frac{1}{2}(L^2 - x^2) \right] \frac{\partial v}{\partial x} \right\} = p_v - \rho A \Omega (a + x). \quad (10)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho A \Omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[ a(L-x) + \frac{1}{2}(L^2 - x^2) \right] \frac{\partial w}{\partial x} \right\} = p_w \quad (11)$$

여기서  $p_v, p_w$  는  $y, z$  방향에서의 단위길이 당 작용력이고, 식 (9)와 (10)은 서로 연성되어 있는 반면 식 (11)은 다른 방정식과 연성되어 있지 않다. 식 (9)와 (10)으로 묘사되는 운동은 면내방향 운동 그리고 식 (11)으로 표현되는 운동은 면외방향 운동이다. 식 (9)-(11)에 상응하는 경계조건들은 다음과 같다.

$$s = v = w = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \text{at } x = L \quad (13)$$

### 3. 유한요소해석

본 논문에서 편미분방정식 (9)-(11)로 부터 해를 구하기 위해 유한요소법을 이용하였다. 편미분방정식과 경계조건으로부터 변분형이 유도되고 표준 유한요소해석에 의해 변분형을 공간상에서 이산화하여 일련의 상미분 방정식과 초기조건으로 이루어진 초기치문제를 유도한다. 변분형을 유도 하기 전에 시도함수와 가중함수를 정의할 필요가 있다. 일차원 문제에서 Hilbert 공간은 다음과 같이 정리 된다.

$$H^1 = \left\{ v \mid v \text{ is continuous on } [0, L], \partial v / \partial x \text{ is piecewise continuous, and } \int_0^L (\partial v / \partial x)^2 dx < \infty \right\} \quad (14)$$

시도함수는  $H^1$  공간에 포함되어 있고 모든 경계조건, 즉 기하학적 경계조건과 하중에 대한 경계조건을 만족하는 함수로 정의된다. 이는 시도함수가 일종의 비교함수라는 것을 의미하며 식 (9)-(13)을 만족하는 각각의 변위에 대한 시도함수는 다음과 같이 정의 된다.

$$s \in V_s = \left\{ s \mid s \in H^1, s(0) = \partial s / \partial x|_{x=0} = 0 \right\} \quad (15)$$

$$v, w \in V_{uv} = \left\{ v \mid v \in H^1, \partial v / \partial x \in H^1, v(0) = \partial v / \partial x|_{x=0} = \partial^2 v / \partial x^2|_{x=L} = \partial^3 v / \partial x^3|_{x=L} = 0 \right\} \quad (16)$$

한편,  $H^1$  공간에서 정의되는 가중함수는 기하학적 경계조건이 규정된 곳에서 경계값들이 0 이 된다. 따라서 인장, 면내 그리고 면외변위에서의 가중함수는 다음 식으로 표현된다.

$$\bar{s} \in \bar{V}_s = \left\{ \bar{s} \mid \bar{s} \in H^1, \bar{s}(0) = 0 \right\} \quad (17)$$

$$\bar{v}, \bar{w} \in \bar{V}_{uv} = \left\{ \bar{v} \mid \bar{v} \in H^1, \partial \bar{v} / \partial x \in H^1, \bar{v}(0) = \partial \bar{v} / \partial x|_{x=0} = 0 \right\} \quad (18)$$

변분형은 지배방정식으로부터 유도된다. 식 (9)와 (10)은 서로 연성되어 있는 반면 식 (11)은 연성되어 있지 않기 때문에, 본 논문에서는 면내방향, 면외방향 운동에 대해 독립적인 두 가지의 변분형을 유도하였다. 즉, 가중함수  $\bar{s}, \bar{v}$  를 각각 식 (9)와 (10)에 곱하고 이들 방정식들을 더하여 얻어진 방정식을 길이  $L$ 에 대하여 부분적분을 수행하여 면내방향의 운동에 대한 변분형을 얻는다. 그리고 비슷한 방법으로 면외방향의 운동에 대한 변분형을 얻을 수 있다. 이들 변분형은 다음 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} & \rho A \int_0^L \left[ \bar{s} \left( \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial v}{\partial t} - \Omega^2 s - \dot{\Omega} v \right) + \bar{v} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial s}{\partial t} - \Omega^2 v + \dot{\Omega} s \right) \right] dx \\ & + \int_0^L \left( EA \frac{\partial \bar{s}}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + EI_z \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx \\ & + \rho A \Omega^2 \int_0^L \left[ a(L-x) + \frac{1}{2}(L^2 - x^2) \right] \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx \\ & = \int_0^L \left\{ \rho A \Omega^2 (a+x) \bar{s} + [p_v - \rho A \Omega (a+x)] \bar{v} \right\} dx. \end{aligned} \quad (19)$$

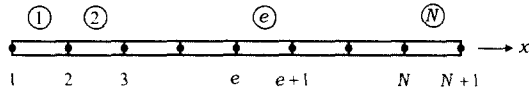


Fig. 2 Element and node numbers of a finite element model

$$\begin{aligned} & \rho A \int_0^L \bar{w} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx + EI_y \int_0^L \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \\ & + \rho A \Omega^2 \int_0^L \left[ a(L-x) + \frac{1}{2}(L^2 - x^2) \right] \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx \quad (20) \\ & = \int_0^L \bar{w} p_w dx. \end{aligned}$$

외팔보는 Fig. 2와 같이  $N$  개의 두 절점 요소로 이산화되고 보의 위와 아래의 숫자들은 각각 요소와 절점 번호를 나타낸다. 즉, 요소  $e$ 에서는 절점 수  $e$ 와  $e+1$ 로 정의된다. 인장, 면내, 면외변위는 식 (21)과 같다.

$$\begin{aligned} s &= a_1 + a_2 x, \quad v = a_3 + a_4 x + a_5 x^2 + ca_6 x^3 \\ w &= a_7 + a_8 x + a_9 x^2 + ca_{10} x^3 \end{aligned} \quad (21)$$

여기서  $a_i$  는 인장, 면내, 면외변위와 절점에서의 기울기에 의해서 결정되는 계수이다. 절점에서의 각각의 변위와 기울기를

$$\begin{aligned} s(x_e) &= s_e, \quad v(x_e) = v_e, \quad w(x_e) = w_e, \\ v_{,x}(x_e) &= \theta_e, \quad w_{,x}(x_e) = \psi_e \end{aligned} \quad (22)$$

로 표시하면 식 (21)의 인장, 면내, 면외변위는 다음과 같이 벡터로 표현될 수 있다.

$$s = \mathbf{N}_s^T \mathbf{d}_e^{sv}, \quad v = \mathbf{N}_v^T \mathbf{d}_e^{sv}, \quad w = \mathbf{N}_w^T \mathbf{d}_e^w \quad (23)$$

여기서,  $\mathbf{d}_e^{sv}, \mathbf{d}_e^w$  은 요소변위벡터이며

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_e^{sv} &= \{s_e, v_e, \theta_e, s_{e+1}, v_{e+1}, \theta_{e+1}\}^T, \\ \mathbf{d}_e^w &= \{w_e, \psi_e, w_{e+1}, \psi_{e+1}\}^T \end{aligned} \quad (24)$$

과 같이 쓰였고, 형태함수벡터인  $\mathbf{N}_s, \mathbf{N}_v, \mathbf{N}_w$  는

$$\mathbf{N}_s = \{(x_{e+1} - x)/h_e, 0, 0, (x - x_e)/h_e, 0, 0\}^T$$

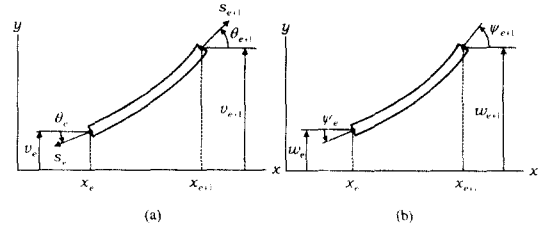


Fig. 3 Finite elements for (a) the chordwise motion and (b) the flapwise motion

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_v &= \left\{ 0, (x - x_{e+1})^2(2x - 3x_e + x_{e+1})/h_e^3, \right. \\ & \quad (x - x_e)(x - x_{e+1})^2/h_e^2, 0, \\ & \quad \left. -(x - x_e)^2(2x + x_e - 3x_{e+1})/h_e^3, \right. \\ & \quad \left. (x - x_e)^2(x - x_{e+1})/h_e^2 \right\}^T \\ \mathbf{N}_w &= \left\{ (x - x_{e+1})^2(2x - 3x_e + x_{e+1})/h_e^3, \right. \\ & \quad (x - x_e)(x - x_{e+1})^2/h_e^2, \\ & \quad \left. -(x - x_e)^2(2x + x_e - 3x_{e+1})/h_e^3, \right. \\ & \quad \left. (x - x_e)^2(x - x_{e+1})/h_e^2 \right\}^T \\ h_e &= x_{e+1} - x_e \end{aligned} \quad (25)$$

로 주어진다. 여기서  $h_e$  는 요소의 크기이다.

Fig. 3 은 면내방향, 면외방향 운동에 대한 유한요소를 보여준다. 기존 유한요소와 본 논문의 유한요소의 차이는 기존의 요소가 축방향 변위를 사용하는 데 반해, 본 논문의 요소는 인장 변위를 사용하였다.

인장, 면내, 면외변위에 대한 가중함수는 다음 식으로 표현된다.

$$\bar{s} = (\boldsymbol{\eta}_e^{sv})^T \mathbf{N}_s, \quad \bar{v} = (\boldsymbol{\eta}_e^{sv})^T \mathbf{N}_v, \quad \bar{w} = (\boldsymbol{\eta}_e^w)^T \mathbf{N}_w \quad (26)$$

여기서  $\boldsymbol{\eta}_e^{sv}$ 와  $\boldsymbol{\eta}_e^w$  는  $6 \times 1$ 과  $4 \times 1$ 의 임의의 열 벡터이다.

유한요소법의 해, 즉 근사하는 유한차원 함수공간에 존재하고 엄밀해는 무한차원 함수공간에 존재한다. 따라서, 운동방정식 (9)-(11)에 대한 근사해를 변분형인 식 (19)와 (20)을 2 절점 요소로 이산화한 식으로부터 구한다. Fig. 2 에서처럼 영역  $[0, L]$ 에서 부영역  $[x_e, x_{e+1}]$ ,  $e = 1, 2, \dots, N$  으로 이산화한 후에 식 (23)과 (26)을 식 (19)와 (20)에 대입하면 이산화된 방정식을 얻을 수 있다. 면내방향 운동에 대한 이산화된 방정식은 식은

$$\sum_{e=1}^N (\eta_e^{sv})^T \left\{ \mathbf{m}_e^{sv} \ddot{\mathbf{d}}_e^{sv} + 2\Omega \mathbf{g}_e^{sv} \dot{\mathbf{d}}_e^{sv} + \left[ \mathbf{k}_e^{sv} + \Omega^2 (\mathbf{s}_e^{sv} - \mathbf{m}_e^{sv}) + \dot{\Omega} \mathbf{g}_e^{sv} \right] \mathbf{d}_e^{sv} \right\} \quad (27)$$

$$= \sum_{e=1}^N (\eta_e^{sv})^T \mathbf{f}_e^{sv}$$

로 표현되는데, 여기서

$$\mathbf{m}_e^{sv} = \rho A \int_{x_e}^{x_{e+1}} (\mathbf{N}_s \mathbf{N}_s^T + \mathbf{N}_v \mathbf{N}_v^T) dx,$$

$$\mathbf{g}_e^{sv} = \rho A \int_{x_e}^{x_{e+1}} (\mathbf{N}_v \mathbf{N}_s^T - \mathbf{N}_s \mathbf{N}_v^T) dx,$$

$$\mathbf{k}_e^{sv} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left( EA \frac{d\mathbf{N}_s}{dx} \frac{d\mathbf{N}_s^T}{dx} + EI_z \frac{d^2 \mathbf{N}_v}{dx^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_v^T}{dx^2} \right) dx,$$

$$\mathbf{s}_e^{sv} = \rho A \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left[ a(L-x) + \frac{1}{2}(L^2 - x^2) \right] \frac{d\mathbf{N}_v}{dx} \frac{d\mathbf{N}_v^T}{dx} dx,$$

$$\mathbf{f}_e^{sv} = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left\{ \rho A \Omega^2 (a+x) \mathbf{N}_s + [\rho_v - \rho A \dot{\Omega} (a+x)] \mathbf{N}_v \right\} dx \quad (28)$$

한편, 면외방향 운동에서 이산화된 방정식은

$$\sum_{e=1}^N (\eta_e^w)^T \left[ \mathbf{m}_e^w \ddot{\mathbf{d}}_e^w + (\mathbf{k}_e^w + \Omega^2 \mathbf{s}_e^w) \mathbf{d}_e^w \right] = \sum_{e=1}^N (\eta_e^w)^T \mathbf{f}_e^w \quad (29)$$

로 표현되며

$$\mathbf{m}_e^w = \rho A \int_{x_e}^{x_{e+1}} \mathbf{N}_w \mathbf{N}_w^T dx,$$

$$\mathbf{k}_e^w = EI_y \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{d^2 \mathbf{N}_w}{dx^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_w^T}{dx^2} dx,$$

$$\mathbf{s}_e^w = \rho A \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left[ a(L-x) + \frac{1}{2}(L^2 - x^2) \right] \frac{d\mathbf{N}_w}{dx} \frac{d\mathbf{N}_w^T}{dx} dx,$$

$$\mathbf{f}_e^w = \int_{x_e}^{x_{e+1}} p_w \mathbf{N}_w dx \quad (30)$$

식 (27)과 (29)를 전체자유도 관점에서 전체변위벡터와 전체행렬로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{M}_{sv} \ddot{\mathbf{d}}_{sv} + 2\Omega \mathbf{G}_{sv} \dot{\mathbf{d}}_{sv} + [\mathbf{K}_{sv} + \Omega^2 (\mathbf{S}_{sv} - \mathbf{M}_{sv}) + \dot{\Omega} \mathbf{G}_{sv}] \mathbf{d}_{sv} = \mathbf{f}_{sv} \quad (31)$$

$$\mathbf{M}_w \ddot{\mathbf{d}}_w + (\mathbf{K}_w + \Omega^2 \mathbf{S}_w) \mathbf{d}_w = \mathbf{f}_w \quad (32)$$

**Table 1** Convergence characteristics of the dimensionless natural frequencies for the chordwise motion when  $\delta = \gamma = 0$  and  $\alpha = 70$

No. of element	Bending modes			
	1 <sup>st</sup>	2 <sup>nd</sup>	3 <sup>rd</sup>	4 <sup>th</sup>
20	3.516	22.035	61.697	120.769
40	3.516	22.035	61.697	120.902
60	3.516	22.035	61.697	120.903
80	3.516	22.035	61.697	120.844
100	3.516	22.035	61.697	120.902
Exact	3.516	22.035	61.697	120.902
No. of element	Stretching mode			
	1 <sup>st</sup>	2 <sup>nd</sup>		
20	110.395	417.773		
40	109.963	387.057		
60	109.959	331.418		
80	109.958	363.817		
100	109.957	330.880		
Exact	109.956	329.867		

여기서

$$\mathbf{d}_{sv} = \{s_2, v_2, \theta_2, s_3, v_3, \theta_3, \dots, s_{N+1}, v_{N+1}, \theta_{N+1}\}^T \quad (33)$$

$$\mathbf{d}_w = \{w_2, \psi_2, w_3, \psi_3, \dots, w_{N+1}, \psi_{N+1}\}^T \quad (34)$$

#### 4. 고유 진동수

논의를 간단히 하기 위해서 보에서  $x, y$  축에 대한 면적관성모멘트는 같다고 가정하고 다음과 같은 무차원 변수를 정의하였다.

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \delta = \frac{a}{L}, \quad \gamma = T\Omega,$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{AL^2}{I_z}}, \quad \lambda = T^2 \dot{\Omega} \quad (35)$$

여기서

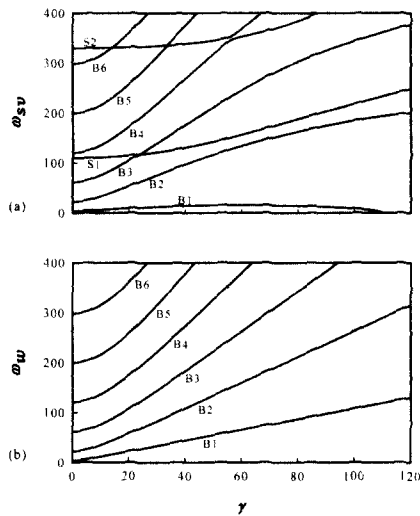
$$T = \sqrt{\frac{\rho AL^4}{EI_y}} \quad (36)$$

면내방향과 면외방향 운동에 대한 무차원화된 고유진동수의 수렴특성을 먼저 살펴보자.  $\gamma = 0$  이고  $\delta$  와  $\alpha$  값이 0 과 70 일 때의 수렴특성을 Table 1 에 나타내었다. Table 1 에서 볼 수 있는 바와 같이 굽힘모드와 인장모드에 대한 고유진동수가 요소수가 증가함에 따라 엄밀해로 수렴한다.

회전하는 경우 제시된 유효요소법은 본 논문과 참고문헌(6)에서 계산된 고유진동수를 비교함으로써 입증할 수 있다. 모든 계산에서 면내방향과 면

**Table 2** Comparison of the first dimensionless natural frequencies for the chordwise motion when  $\alpha = 70$

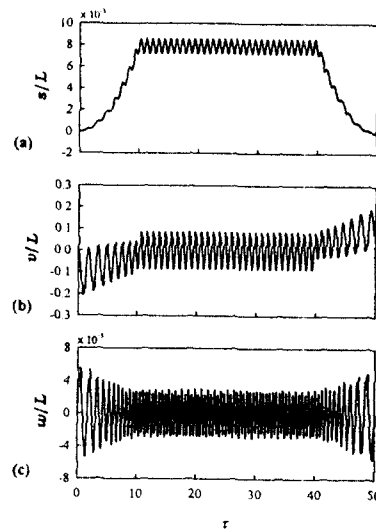
$\delta$	$\gamma$	( $N = 100$ )	Ref. (6)
0	2	3.620	3.620
	10	4.970	4.970
	50	7.334	7.554
1	2	4.398	4.398
	10	13.048	13.049
	50	41.228	41.379
5	2	6.643	6.643
	10	27.266	27.276
	50	74.003	74.195



**Fig. 4** Variation of the dimensionless natural frequencies for the dimensionless rotating speed  $\gamma$  when  $\lambda = 0$ ,  $\delta = 0.1$  and  $\alpha = 70$ : (a) the chordwise motion and (b) the flapwise motion

외방향 운동, 각각의 이산화된 모형에서 100 개의 요소를 사용한다. Table 2 에서  $\alpha = 70$  그리고  $\delta$  와  $\gamma$  의 다양한 값들에 대해서 계산된 첫번째 면내변위의 고유진동수는 Yoo 와 Shin<sup>(6)</sup>에서의 값들과 거의 일치함을 알 수 있다.

Fig. 4 는  $\lambda = 0$ ,  $\delta = 0.1$  와  $\alpha = 70$  일 때 무차원 회전각속도에 대한 무차원 고유진동수의 변화를 보여준다. Fig. 4 에서 볼 수 있듯이 면내방향과 면외방향 운동에서의 가장 큰 차이점은 면내방향 운동에서 인장모드가 존재하고 동적 불안정성이 존재할 수 있다는 사실이다. Fig. 4(b)에서처럼 면외방향 굽힘 운동의 고유진동수들은 회전각속도와 함께 단조 증가하지만, Fig. 4(a)의 면내방향 운동에서 인장모드(S1 과 S2)가 굽힘모드(B1 과 B2)와 연성되어 있다. 이런 인장모드와 굽힘모드사이의 연성 작용은 Fig. 4(a)와 같이 잘 알려진 비어링(veering)



**Fig. 5** Deformation time histories at  $\xi = 1$  for the rotating speed profile: (a) the the stretch deformation, (b) the chordwise deformation, and (c) the flapwise deformation

현상을 야기한다. 또한 B1 으로 표시된 면내방향 굽힘모드의 첫번째 고유진동수가 특정한 회전각속도에서 0 이 되는데 이때 보가 불안정하게 되어 이 속도를 임계속도라 한다.

## 5. 시간응답

회전속도가 주어졌을 경우,  $\delta = 0.1$  과  $\alpha = 70$  인 회전외팔보를 100 개의 요소로 분할하여 시간 응답을 generalized- $\alpha$ <sup>(14)</sup>법을 사용해 계산했다. 회전속도는 다음과 같이 주어졌다고 생각하자.

$$\gamma = \begin{cases} \tau, & \text{if } 0 \leq \tau \leq 10, \\ 10, & \text{if } 10 \leq \tau \leq 40, \\ 50 - \tau, & \text{if } 40 \leq \tau \leq 50. \end{cases} \quad (37)$$

면내, 면외방향의 운동들의 초기 조건이 다음과 같다고 가정하자.

$$\mathbf{d}_{sv}(0) = \mathbf{d}_w(0) = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{d}}_{sv}(0) = \dot{\mathbf{d}}_w(0) = \mathbf{0} \quad (38)$$

그리고 보 전체에 걸쳐 시간 0 에서 단위 충격 압력이 가해졌을 경우에 자유단, 즉  $\xi = 1$  에서의 시간응답을 Fig. 5 에 도시하였다.

Fig. 5 는 회전속도선도의 시간에 따른 변형을 나타낸다. Fig. 5(c)는 면외방향의 진폭이 회전속도

크기에 반비례함을 나타낸다. 또한 진동주기가 회전 속도에 반비례함을 알 수 있다.

회전속도가 일정 시 면내, 면외 진동의 주기는 면내, 면외운동에 대한 고유진동수와 밀접한 관계가 있다. 회전속도가 일정할 때  $10 \leq \tau \leq 40$  동안의 시간응답을 유심히 보면 Fig. 5(a)와 5(b)에 나타난 것과 같이 1.0017의 평균 무차원 주기를 가진다. 반면에 Fig. 5(c)와 같이 면외운동에 대한 진동은 0.5299의 주기를 가진다. 이런 주기들로부터 면내와 면외운동에 대한 첫번째 고유진동수가 계산될 수 있다.  $\alpha = 70^\circ$ ,  $\delta = 0.1$  과  $\gamma = 0.1$  일때 Fig. 4에서 읽어 들인 첫번째 무차원 고유진동수는 면내 운동에서 6.2726 이고 면외운동에서 11.8578 이다. 또한 이런 값들은  $2\pi$ 를 각각의 무차원 주기들로 나눠 얻을 수 있다.

## 6. 결론

유한요소해석을 수행하여 종래의 축방향 변위 대신에 인장변위를 이용하여 회전 외팔보에 대한 선형 편미분방정식을 유도하였다. 유도된 편미분방정식에서 인장과 면내변위는 서로 연성되어 있지만 면외변위는 연성되어 있지 않다는 사실을 확인하였다. 편미분방정식과 경계조건으로부터 면내 방향과 면외방향의 운동에 대한 변분형을 유도하였고, 본 논문에서 정의된 두 절점 요소로 변분형을 공간상에서 이산화하여 행렬-벡터방정식을 유도하였다. 그리고 본 논문에 제시한 선형방정식을 바탕으로 한 유한요소법은 기존의 비선형방정식을 바탕으로 한 유한요소해석에 비해 계산시간이 비교할 수 없을 정도로 짧다.

유도된 행렬-벡터 방정식을 바탕으로 고유치 해석을 수행한 결과, 면내방향 운동과 면외방향 운동사이에서의 차이점인 Veering 현상과 발산의 불안정성은 인장변위로부터 기인함을 알 수 있었다. 그리고 시간응답을 통하여 회전속도가 커짐에 따라 면외방향의 진폭과 주기가 줄어드는 사실을 알 수 있었다.

## 후 기

이 논문은 2000년 한양대학교 교내연구비 지원으로 연구 되었음

## 참고문헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," *British A.R.C. Reports and Memoranda*, No. 766.
- (2) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 25, pp. 28~30.
- (3) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 56, pp. 175~185.
- (4) Bauer, H. F., 1980, "Vibration of a Rotating Uniform Beam," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 72, pp. 177~189.
- (5) 유흥희, 1992, "회전 외팔보의 굽힘 진동해석," 대한기계학회논문집, 제 16 권 제 5 호, pp. 891~898.
- (6) Yoo, H. H. and Shin, S. H., 1998, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 212, pp. 807~828.
- (7) Hfrisch, H., 1975, "A Vector-Dyadic Development of the Equations of Motion for N-Coupled Flexible Bodies and Point Masses," *NASA TN D-8047*.
- (8) Ho, J., 1977, "Direct Path Method for Flexible Multibody Spacecraft Dynamics," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 14, pp. 102~110.
- (9) Bodley, C., Devers, A., Park, A., and Frisch, A., 1978, "A Digital Computer Program for the Dynamic Interaction Simulation of Controls and Structure," *NASA TP-1219*.
- (10) Belytschko, T. and Hsieh, B., 1973, "Non-Linear Transient Finite Element Analysis with Conveccted Coordinates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 7, pp. 255~271.
- (11) Simo, J. and Vu-Quoc L., 1987, "On the Dynamics of Flexible Beams Under Large Overall Motions-the Plane Case : Part I and Part II," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, pp. 849~863.
- (12) Christensen, E. and Lee, S., 1986, "Non-Linear Finite Element Modelling of the Dynamic System of Unrestrained Flexible Structures," *Computers & Structures*, Vol. 23, pp. 819~829.
- (13) Yoo, H. H., Ryan, R. R., and Scott, R. A., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motion," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 181, pp. 261~278.
- (14) Chung, J. and Hulbert, G. M., 1993, "A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics with Improved Numerical Dissipation: the Generalized- $\alpha$  Method," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, pp. 371~375.
- (15) Kane, T. R., Ryan, R. R. and Banerjee, A. K., 1987, "Dynamics of a Cantilever Beam Attached to a Moving Base," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 10, pp. 139~151.