한국통계학회논문집
8권 기념호, 2001
pp. 65~66

토론 : 베이지안 통계학의 과거 · 현재 · 미래

김 병 휘[1)]

먼저, 베이지안 통계학의 연구 동향 및 미래의 연구 방향에 대해 훌륭한 논문을 발표해 주신 다섯 분의 저자에게 축하를 드리며, 아울러 몇 가지 보충할 부분에 대해 논하기로 한다.

베이지안 분석에 있어서 가장 비판을 많이 받고 있는 부분은 사전분포를 사용함에 있어서 분석가의 신념이나 의지가 반영된다는 것이다. 따라서 이러한 비판을 어느 정도 해소시키기 위한 객관적인 베이지안 분석을 위해서는 사전분포에 분석가의 의지나 신념이 전혀 반영되지 않는 무정보적 사전분포(noninformative prior)를 사용하게 된다.

기존에 광범위하게 사용되어온 무정보적 사전분포의 하나인 Jeffreys의 사전분포는 장애모수(nuisance parameter)가 있는 경우 대부분의 상황에서 심각한 문제점을 일으키므로, Jeffreys의 사전분포의 이러한 문제점을 극복하기 위해서 Bernardo(1979)에 의해 처음 제안된 준거사전분포(reference prior)와 Welch와 Peers(1963)에 의해 처음 제안된 확률대응 사전분포(probability matching prior)와 같은 무정보적 사전분포에 대한 연구가 활발히 진행되고 있고 이들의 적용에 대한 많은 좋은 결과가 얻어지고 있다.

본 토론에서는 모수 벡터 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\cdots,\theta_k)$에서 θ_1이 관심 모수(parameter of interest)이고 $\boldsymbol{\theta}_2=(\theta_2,\cdots,\theta_k)$가 장애모수일 때 정보행렬(information matrix)로부터 준거사전분포와 확률대응 사전분포를 직접 구하는 것은 많은 계산상의 어려움에 부딪치게 되므로 이러한 어려움을 어느 정도 해소하기 위한 한가지 방법인 Cox와 Reid(1987)에 의해 제안된 직교 재모수화 (orthogonal reparameterization)방법을 다음에 간단히 논해보기로 한다.

$\boldsymbol{\theta}$의 정보행렬을 $I_1(\boldsymbol{\theta})=\begin{pmatrix} I_{\theta_1\theta_1} & I_{\theta_1\boldsymbol{\theta}_2} \\ I_{\boldsymbol{\theta}_2\theta_1} & I_{\boldsymbol{\theta}_2\boldsymbol{\theta}_2}\end{pmatrix}$와 같이 분할하고 $\boldsymbol{\theta}$로부터 $(\psi,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$로의 변환 $\theta_1=\psi$, $\boldsymbol{\theta}_2=\boldsymbol{\phi}=(\phi_2,\cdots,\phi_k)$을 생각한다. 여기서 $I_{\theta_1\boldsymbol{\theta}_2}=(I_{\theta_1\theta_2},\cdots,I_{\theta_1\theta_k})=I^T_{\boldsymbol{\theta}_2\theta_1}$ (T는 전치행렬을 나타냄)이고 $\phi_i=\phi_i(\psi,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$, $i=2,\cdots,k$이다. $I_1(\psi,\phi_2,\cdots,\phi_k)$을 $(\psi,\phi_2,\cdots,\phi_k)$로 표현된 $I_1(\boldsymbol{\theta})$라고 하고 $I_1(\psi,\phi_1,\cdots,\phi_k)=\begin{pmatrix} I_{\psi\psi} & I_{\psi\boldsymbol{\phi}} \\ I_{\boldsymbol{\phi}\psi} & I_{\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}}\end{pmatrix}$라고 나타낸다. 여기서 $I_{\psi\boldsymbol{\phi}}=(I_{\psi\phi_2},\cdots,I_{\psi\phi_k})=I^T_{\boldsymbol{\phi}\psi}$ 이고 $I_{\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\phi}}=(I_{\phi_i\phi_j})$, $i,\ j=2,\cdots,k$ 는 $(k-1)\times(k-1)$행렬이다. 다음으로 편미분 방정식

1) 한양대학교 자연과학대학 수학과

$$\sum_{i=2}^{k} I_{\phi_i\phi_j} \frac{\partial \phi_i}{\partial \psi} = -I_{\psi\phi_j}, \ j=2,\cdots,k$$

을 구성하고 $\boldsymbol{\phi}=(\phi_2,\cdots,\phi_k)$에 대한 해를 구한다. 위의 편미분 방정식은 $\boldsymbol{\phi}$ 의 ψ에의 의존성을 결정하나 $(\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$에의 의존은 상당한 임의성을 내포하고 있다. 위의 주어진 방정식이 해 $\boldsymbol{\phi}=(\phi_2,\cdots,\phi_k)$를 갖는다면 $(\psi,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$에 대한 정보행렬은

$$I_2(\psi,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)=block\ diagonal\{i_{\psi\psi}, I_{\lambda\lambda}\}$$

이 되므로 $\psi=\theta_1$과 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$는 Cox와 Reid(1987)의 관점에서 직교하다. 이와 같이 $\psi=\theta_1$이 관심모수일 때 위의 $(\psi,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$에 대한 정보 행렬을 이용하여 $(\psi,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)$ 에 대한 준거사전분포와 확률대응 사전분포를 구하는 것은 원래의 $\boldsymbol{\theta}$에 대한 정보행렬 $I_1(\boldsymbol{\theta})$을 이용하여 구하는 것보다 많은 경우에 쉽게 할 수 있다. 그러나 Datta와 Ghosh(1996)에 의해 밝혀졌듯이 확률대응사전분포는 일대일 재모수화(one to one reparameterization)에 의해 불변(invariance)이나 준거사전분포는 일반적으로 그렇지 않다는 점과 Berger와 Bernardo(1989, 1992)에 의해 고안된 준거사전분포를 구하는 알고리즘에서 Compact set들의 열에 따라 준거사전분포는 다르게 나타난다는 점에 유의해야한다.

참고문헌

[1] Cox, D. R. and Reid, N. (1987). Orthogonal parameters and approximate conditional inference (with discussion). *J. Roy. Statist.* Soc. Ser. B 49, 1-39.

[2] Datta, G. S. and Ghosh, M. (1996). On the invariance of noinformative priors. *Annals of Statistics* 24, 141-149.

[3] Berger, J. and Bernardo, J. M. (1989). Estimating a product of means : Bayesian analysis with reference priors. *J. Amer. Statist. Assos.* 84, 200-207.

[4] Berger, J. and Bernardo, J. M. (1992). On the development of reference priors(with discussion). In Bayesian Statistics 4 (J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. P. Dawid and A. F. M. Smith. eds.). Oxford Univ. Press. 35-60.