

論文

고무의 동탄성계수와 손실계수의 주파수 의존성을
평가하기 위한 양팔 샌드위치보 시험법의 연구

김광우*, 박진택*, 이덕보**, 최낙삼***

A Double Cantilever Sandwich Beam Method for Evaluating Frequency Dependence of
Dynamic Modulus and Damping Factor of Rubber Materials

K. W. Kim*, J. T. Park*, D. B. Lee**, N. S. Choi***

ABSTRACT

This paper proposes a double cantilever sandwich-beam method for evaluating the frequency dependence of dynamic characteristics of rubbers. The flexural vibration of a double cantilever sandwich-beam specimen with an inserted rubber layer was studied using a finite element simulation in combination with the sine-sweep test. Quadratic relationships of dynamic elastic modulus and material loss factor of rubbers with frequency were suggested employing the least square error method.

초 록

본 연구에서는 고무의 동탄성계수와 손실계수에 대한 주파수 의존성을 평가하기 위한 새로운 양팔 샌드위치보 시험법을 제안하였다. 고무층이 삽입되어 접착된 양팔샌드위치보 시험편의 횡진동 거동에 대해 유한요소 모달변형을 에너지법을 조합한 사인스윕 시험을 이용하여 분석하고 동적 점탄성해석시험 및 단순공진시험 결과와 비교 검토하였다. 양팔 샌드위치보의 횡진동 모드에 따라 고무층의 주파수별 동탄성계수와 재료감쇠계수를 측정하고, 이들을 최소자승오차법에 의거하여 주파수의 이차함수로 회귀시켜 평가할 수 있었다.

1. 서 론

기계구조물을 제진하기 위해 복합화 설계를 하여 적용하는 기술 중에서 주된 것은 고무 재질을 보강층(constraining stiff layer)에 접착하여 흡진재로 사용함으로써 구조물계(structural system)의 방진 또는 흡진 특성을 극대화하는 것이다. 이는 동적하중을 받아 구조물이 공진할 때 그 진폭을 크게 감소시킬 수 있으므로 구조물설계 시에 매우 중요하다고 볼 수 있다.

점탄성재료로 접합한 단일 겹침이음부를 가진 보의 경우, Saito와 Tani[1]는 양단 고정지지조건에서 이 보가 횡진동을 할 때 겹침이음부의 길이를 변수로 하여 계의 공진주파수와 손실계수를 구하는 이론식을 제안하였다. Rao와 Crocker[2]는 겹침이음부를 갖는 단순지지 보에서 겹침이음부의 길이변화에 따른 고유진동수, 손실계수 및 진동모드를 이론적으로 구하고 실험에 의한 결과와 비교하였다. Johnson과 Kienholz[3]는 구속 강성층(constraining stiff layer)과 피구속 점탄성층(constrained viscoelastic layer)을 갖는 복

* 한양대학교 대학원 기계설계학과

** 한양대학교 기계정보경영공학부

*** 한양대학교 기계정보경영공학부, 교신저자(E-mail:nschoi@hanyang.ac.kr)

합구조물계의 손실계수(system loss factor)를 구하기 위한 유한요소 모달변형에너지법을 제안하였다. 박과 최[4,5]는 단일접점 이음부(single-lap-joint)를 갖는 양단 고정지지된 보에 국부적 층댐퍼를 기하학적 대칭형태로 부착·추가하여 계의 공진주파수와 손실계수를 이론식으로 유도하였으며, 이 결과를 유한요소법에 의한 모달 변형에너지의 결과와 비교하였다.

그렇지만 위의 연구에서는 점탄성층의 동탄성계수와 손실계수를, 주파수의 함수가 아닌, 일정한 상수로 취급하였으며, 이에 따른 수치해석결과는 실험결과와 적지않은 차이를 주고 있었다. 또한 점탄성 고무류의 동탄성계수와 손실계수의 기존측정법은 한 개의 주파수에서 시험하도록 되어 있어 다양한 공진주파수를 갖는 기계구조물의 흡진 해석을 위해서는 데이터의 한계를 보여왔다. 따라서, 동적 물성에 대한 주파수 의존성을 한 개의 시험편으로 구할 수 있는 방법이 필요하겠다.

본 연구에서는 점탄성 고무층이 삽입된 양팔 샌드위치보(double cantilever sandwich beam, DCSB)를 횡진동 모델로 제시하고 횡진동 모드별 공진주파수에 따른 고무재료의 동탄성계수 및 재료손실계수를 실험과 수치해석을 조합하여 구함으로써, 그 결과를 기존의 동적시험법에 의한 결과와 비교하여 검토하고자 한다.

2. 실험

2.1 EPDM 고무재료

EPDM고무(ethylene-propylene diene rubber) 재료로는 (주)한국후코꾸-심슨에서 제작한 EPDM-Hs61, EPDM-Hs65, EPDM-Hs72를 사용하였다.

비중은 EPDM-Hs61과 EPDM-Hs65의 경우 1.06이며, EPDM-Hs72의 경우 1.10 였다. 정적탄성계수는 축변형률(axial strain)이 100%일 때 -Hs61, -Hs65, -Hs72의 경우 각각 1.59, 2.34, 3.16MPa 였다.

2.2 고무의 동적점탄성해석시험(DMA) : 저장탄성계수와 재료손실계수의 측정

동적점탄성해석장치(dynamic mechanical analyzer, DMA 2980, TA Instruments Co.)를 이용한 필름 인장형(film tension mode)동적실험을 위하여 길이 26mm, 폭 7mm, 두께 2.0mm의 필름형상의 시험편을 만들었다. 실험조건은 정적

인 인장력(static force) 1N을 가해준 상태에서 진폭 5mm(이 경우 인장-인장하중상태가 됨), 주파수 1Hz로 하였다.

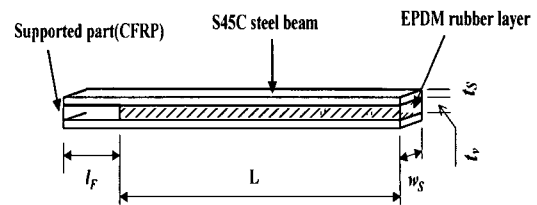


Fig. 1 Geometry of a double cantilever sandwich beam specimen.

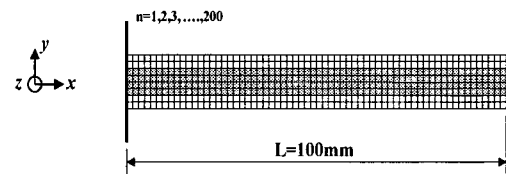


Fig. 2 Finite element analysis of a DCSB specimen.

온도범위 0 ~ 40°C에서 온도의 상승속도는 5°C/min으로 하였다. 본 실험에서는 상기 EPDM고무 단일체의 저장탄성계수(E)와 재료손실계수($n_d = \tan \delta$)를 시험 온도의 함수로서 측정하였다.

2.3 고무 삽입형 양팔 샌드위치보 시험

본 연구에서 양팔 샌드위치보(double cantilever sandwich beam, DCSB) 시험편의 보 재료는 S45C강재이며, 표면 열처리나 방청처리 없이 두께 1mm, 길이 120mm, 폭 10mm로 평평하게 가공하였다. 고무층의 재료로는 상기의 EPDM고무를 사용하였으며 DCSB시험편의 형상은 Fig. 1에 나타냈다.

고무와 금속의 접착제인 Chemlok 205/220 (Lord Co.)을 사용하여 고무층을 두 개의 금속보 사이에 삽입하여 접착하였다. 접합후에 현미경으로 관찰한 결과 접착층의 두께는 약 35 μ m였다. 고정부를 제외한 DCSB시험편의 전체유효길이(L)는 100mm이며, 시험편 장착부의 길이(l_f)는 20mm이다. 샌드위치보에 삽입된 고무층의 폭(w_s)은 강재 보와 동일한 10mm로 하고, 두께(t_r)는 2.4mm로 일정하게 하였다.

가진기(B&K vibration exciter type 4808)의 가진판에 DCSB 시험편의 한쪽부위(Fig. 1의 l_f 부위)를 장착시켰다.

이 장착부위를 가진함으로써 시험편의 유효길이 부분(Fig. 1의 L부위)에 횡방향 진동을 주어 1~2kHz 범위의 사인 스위프(sine sweep)실험을 수행하고 동적신호분석기 (HP 35670A, dynamic signal analyzer)를 통해 주파수 응답함수 (frequency response function, FRF)를 측정하였다. FRF선도의 피크값에 대응하는 각 모드의 공진주파수를 구하고 half power bandwidth방법[6]으로 계의 점성감쇠계수(system viscous loss factor, ζ)를 구하였다. 즉 FRF선도에서 피크값의 3dB만큼의 저점값에 대응하는 주파수(f_1, f_2)를 이용하여 계의 손실계수(η_s)를 다음 식(1)로 구하였다.

$$\eta_s = 2\zeta_s = 2 \times \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1} \quad (1)$$

2.4 단순공진시험편을 이용한 진동실험

단순공진 시험편(simple resonant specimen)은 질량, 스프링, 댐퍼를 가진 1자유도 단순계를 모델링하여 제작하였다. 폭 10mm, 길이 10mm의 S45C강판(두께 1mm) 과 고무(두께 2.4mm) 를 층상으로 접합하여 가진판에 장착하였다. 실험방법은 주파수1~50kHz범위에서 시험편의 두께방향으로 가진하여 사인 스위프(sine sweep)실험을 수행하였다. 이 경우, 고무층의 동탄성계수 E_d 는

$$E_d = (2\pi f_0)^2 \frac{M t_v}{A} \quad (2)$$

로 구하며, 여기서 M 은 강판의 질량, A 는 고무층의 면적, t_v 는 고무층의 두께, f_0 는 계의 공진주파수이다.

3. DCSB시험편의 유한요소 모사해석

Fig.2와 같이 y방향으로 일정한 폭을 갖고 한 쪽 끝단을 완전고정한 대칭형 양팔 샌드위치보 2차원 시험편 모델에 대해 상용 유한요소해석 프로그램인 Ansys Ver. 5.3을 사용하여 횡진동해석을 수행했다. 보와 고무층의 유효 길이(L)는 100mm로 일정하다고 가정하였다. 4절점요소(Plane42)로 구성된 유한요소 메쉬는 각 절점에서 2개의 자유도(변위 u,v)를 가지며 각 보의 요소 개수는 x축방향 200개, y축방향 2개로 하여 총 400개로 하였다. 보와 고무층의 한 개 요소의 x축방향 길이를 일정값 0.5mm로 하였으며 고무층의 y방향 개수는 4개로 하였다. 양팔강보의 굽힘변형시에 탄

성계수가 매우 낮은 고무삽입층에서 큰 전단변형이 발생하므로 유한요소 수치해석상의 오차를 적게 하기 위해서 고무층의 y방향 요소 개수를 강보 보다 많게 한 것이다. 따라서, L=100mm일 경우 고무층의 요소 개수는 800개 (200×

Table 1 Experimental values of dynamic elastic modulus obtained from a cantilever steel beam

Mode	1st mode	2nd mode	3rd mode
Resonant frequency (Hz)	83.45	522.76	1462.92
Dynamic elastic modulus (GPa)	225.4	206.8	200.9

400)가 된다. 여기서 보의 푸아송비는 0.30으로 입력하였고, 탄성계수는 유한요소해석과 실험을 조합하여 각 모드별 단일 강보의 동탄성계수 값(Table 1)을 다음의 4절에 설명한 바와 같은 보간법으로 구하고 DCSB 수치 모델에 입력하였다.

4. 고무의 동탄성 계수 측정

EPDM고무재료의 주파수별 동탄성계수를 정확히 구하기 위해서, 우선 고무를 정적 인장시험(JIS K 6301)하여 축변형률 100%에서 구한 탄성계수(Youngs modulus)를 상기 DCSB시험편의 유한요소 모사해석 시에 초기값으로 입력하였다. 모달해석을 수행하여 구한 각 유한요소 모사해석상의 모드별 공진주파수값 f_0^{elem} 과 DCSB시험편을 사인스위프 시험하여 구한 각 모드별 공진주파수의 실험값 f_0^{exp} 을 비교하고, 식(3)과 같이 f_0^{elem} 값이 오차(ϵ) 0.01%를 넘지 않도록 f_0^{exp} 값에 근사시키기 위해 보간법을 이용하여 고무이층의 동탄성계수 E_d 를 구하였다.

$$\text{오차} \quad \epsilon = \left| \frac{f_{(r)}^{elem} - f_{(r)}^{exp}}{f_{(r)}^{exp}} \right| \leq 0.01\% \quad (3)$$

5. 고무의 손실계수 측정

고무의 재료손실계수 η_d 를 모달변형에너지법[3-5]을 통해 구했다. 모달변형에너지법은 댐핑이 없는 경우의 모달 해석을 통해 구한 계의 각 모드에서의 모드형상(mode shape)과 구조물의 각 부위에서의 재료 손실계수를 이용하여 전

체 계의 손실계수 η_s 를 구하는 방법으로 구조물의 복잡한 형상에 대해서도 계의 r 번째 모드의 손실계수를 다음식 (4)로 구할 수 있다.

$$\frac{\eta_s^{(r)}}{\eta_d^{(r)}} = \frac{\{\phi^{*(r)}\}^T [K_{vR}] \{\phi^{*(r)}\}}{\{\phi^{*(r)}\}^T [K_R] \{\phi^{*(r)}\}} = \frac{U_{visco}}{U_{total}} \quad (4)$$

여기서 U_{total} 과 $\eta_s^{(r)}$ 은 r 번째 모드에서 각각 계의 전체 스트레인 에너지와 계의 손실계수이며, U_{visco} 와 $\eta_d^{(r)}$ 은 r 번째 모드에서 고무층의 스트레인 에너지와 고무의 손실계수이다. $\{\phi^{*(r)}\}$ 은 r 번째 모드의 계의 모달벡터, $[K_R]$ 은 계의 실수부 강성 매트릭스, $[K_{vR}]$ 은 고무층의 실수부 강성 매트릭스이다. 따라서 DCSB시험편 계에서 고무층의 재료손실계수는

$$\eta_d^{(r)} = \left(\frac{U_{total}}{U_{visco}} \right) \eta_s^{(r)} \quad (5)$$

로써 구할 수 있다. 여기서 $\eta_s^{(r)}$ 은 사인 스위프 실험에 의해서, U_{total} 과 U_{visco} 는 유한요소해석에 의해 구하는 값이다.

한편, 2.4절에 언급한 단순공진 시험편에서는 고무층만의 변형에너지 U_{visco} 가 계의 변형에너지 U_{total} 에 근사하므로 고무의 η_d 는 $\eta_d \approx \eta_s$ 가 됨을 식 (5)를 통해 알 수 있다.

6. 결과 및 고찰

6.1 DMA시험에 의한 EPDM 고무의 저장탄성계수와 손실계수 평가

Fig. 3은 DMA시험으로 구한 EPDM-Hs61, -Hs65, -Hs72 고무에 대한 저장탄성계수(storage modulus)의 거동을 나타내고 있으며, 온도범위 0~40°C에서 측정된 실험값이다. 이들은 주파수 1Hz에서 구한 것인데, 상온(23°C)에서 고무의 저장탄성계수의 평균값은 EPDM-Hs61, -Hs65, -Hs72 별로 각각 5.8, 13.1, 23.4 MPa 을 보이고 있다. 한편, Fig.4는 고무의 시험온도에 따른 재료손실계수($\eta_d = \tan \delta$)의 거동을 나타내고 있다. 상온에서 각 고무별 η_d 값은 각각 0.157, 0.145, 0.143였으며, 저장탄성계수의 증가에 따라 η_d 값은 감소하는 경향을 알 수 있다.

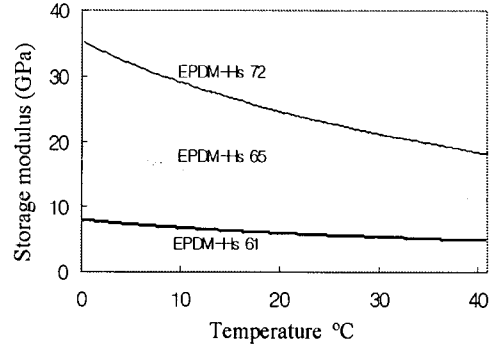


Fig. 3 Storage modulus of EPDM rubbers.

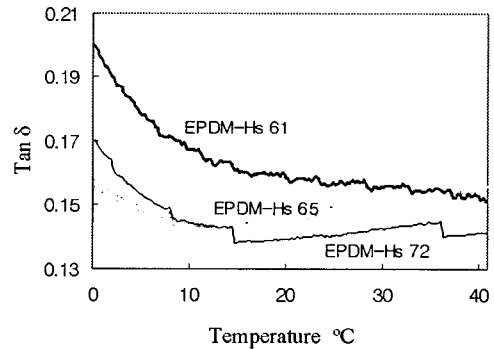


Fig. 4 Loss factor($\eta_d = \tan \delta$) of EPDM rubbers.

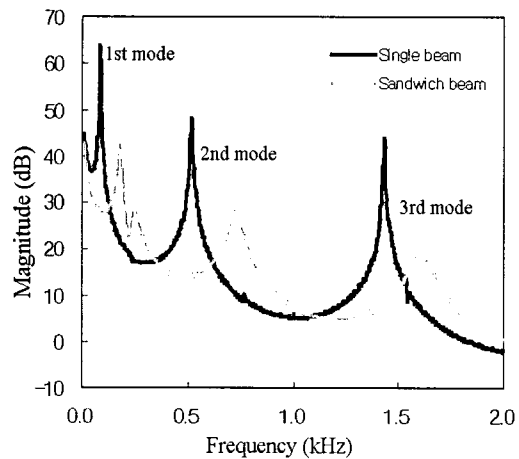


Fig. 5 Experimental frequency responses of a single steel beam specimen and a DCSB specimen inserted with EPDM-Hs72 rubber.

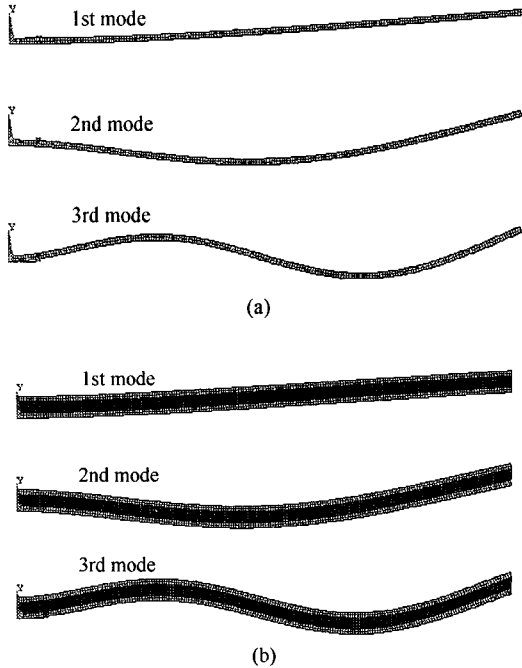


Fig. 6 Simulated mode shapes of a single cantilever beam (a) and a double cantilever sandwich beam (b).

6.2 DCSB시험편을 이용한 고무의 동탄성계수와 재료손실계수 평가

6.2.1 DCSB시험편의 횡진동 주파수 응답거동

고무층이 접촉되지 않은 단일외팔강보(single cantilever steel beam)와 EPDM-Hs72 고무층이 삽입 접촉된 양팔 샌드위치보(DCSB)시험편에 대해서 사인 스위프(sine sweep) 실험을 수행하여 구한 주파수응답거동 결과를 Fig. 5에 나타낸다. 이 주파수응답곡선에서 DCSB시험편은 극값의 주파수인 각 모드별 고유진동수(공진주파수)가 단일보의 고유진동수보다 오른쪽으로 이동하여 커졌으며, 극값의 강도(intensity)가 낮아지고 완만해져서 댐핑효과가 커졌음을 보였다.

각 모드의 횡진동 형상을 가시적으로 관찰하기위해서 상기의 단일외팔강보와 고무층삽입 DCSB시험편에 대해 유한요소 시뮬레이션한 결과를 각각 Fig. 6(a)와 (b)에 나타낸다. 양팔 샌드위치보의 횡진동은 1차, 2차, 3차모드에서 반대칭 모드형상(anti-symmetric mode shape)을 보여 각 모드에서 단일외팔강보의 횡진동 형상을 따르고 있음을 알 수

있다.

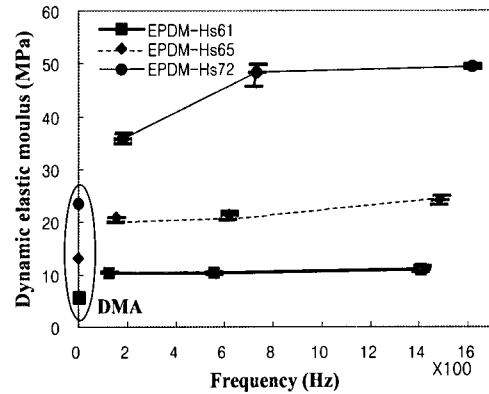


Fig. 7 Dynamic elastic modulus of the various rubbers evaluated by DCSB specimens fully inserted with rubber layer.

이 경우 윗 보의 밑면과 아래보의 윗면이 반대 위상으로 변형하므로, 샌드위치보에 삽입된 고무층에서는 주로 전단형 변형(shear deformation)이 일어나게 된다

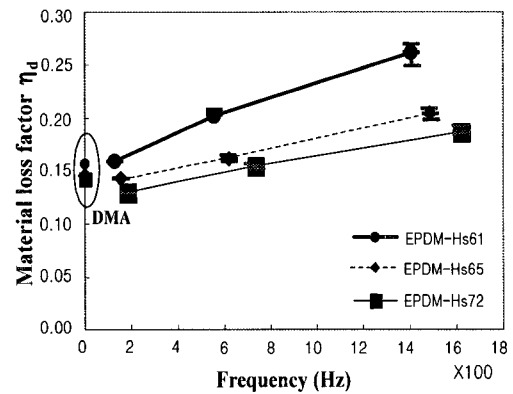


Fig. 8 Material loss factor of the various rubbers evaluated by DCSB specimens fully inserted with rubber layer.

6.2.2 EPDM 고무의 동탄성계수와 재료손실계수

Fig. 7은 DCSB시험편으로 구한 고무층의 동탄성계수를 나타낸 것이다. EPDM-Hs61 고무의 동탄성계수와 비교하여 -Hs65 고무는 평균적으로 약 2배, -Hs72 고무의 경우는 약 4.5배 증가했다.

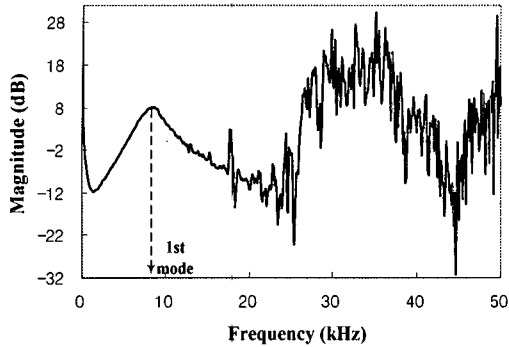


Fig. 9 Experimental frequency response of a simple resonant specimen (EPDM-Hs 65).

또한 각 고무별 동탄성계수는 1Hz에서 측정한 DMA시험 결과보다 1.6배 이상 컸으며, 주파수가 커질수록 동탄성 계수가 커짐을 나타내고 있다. -Hs72 고무의 동탄성계수는 1차에서 2차 모드로 갈 때 크게 증가하고 2차에서 3차 모드로 갈 때는 증가율이 둔화되었으나, -Hs61, -Hs65 고무의 경우는 1차에서 3차에 이르기까지 점진적으로 증가하였다. 이는 동탄성계수의 주파수 의존성이 고무재료의 종류에 따라 다름을 가르킨다.

Fig. 8은 위의 DCSB시험편으로 평가한 고무의 재료손실계수를 공진주파수의 함수로서 나타낸 것이며, 1차 공진주파수(약 128 Hz)에서의 n_d 값은 어느 고무에서나 DMA 실험에 의한 주파수 1Hz에서의 n_d 값과 비슷한 수준에 있었다. 그렇지만, n_d 는 공진주파수의 증가에 따라 상당히 증가하는 경향을 보였다. 한편, 고무재료의 종류가 EPDM-Hs61, -Hs65, -Hs72으로 갈수록 각 모드별 재료손실계수는 감소하였으며, 이는 DMA실험을 통한 주파수 1Hz에서의 재료손실계수를 고무의 종류별로 비교한 경향과 일치하였다. 또한 동탄성계수가 상대적으로 낮은 EPDM-Hs61 고무의 경우에 n_d 값이 가장 컸으며 주파수의 강한 의존성을 나타냈다.

6.3 단순공진시험편을 이용한 고무의 동탄성 계수와 재료손실계수 평가

Fig. 9는 EPDM-Hs65고무가 삽입된 단순공진시험편에 대한 1 Hz에서 50 kHz까지의 주파수응답거동을 나타내고 있다. 상당히 높은 주파수(8.5 kHz)에서 1차 공진주파수를 관찰할 수 있었으며, 15 kHz이상의 주파수부터는 기계적 노

이즈에 의하여 주파수응답거동의 관찰이 어려웠다.

Fig. 10(a)는 단순공진시험편의 1차 공진주파수를 측정하여 구한 고무재료의 종류별 동탄성계수값을 나타내고 있으며, Fig. 10(b)는 이에 대응하는 재료손실계수를 나타낸다. EPDM-Hs61부터 -Hs72로 갈수록, 동탄성계수가 증가하였으며 재료손실계수는 이와 반대로 감소하는 경향을 보였다. 이들 값은 각 고무종류별로 DCSB시험편으로 구한 값보다 더 컸으며 이는 단순공진시험편의 공진주파수가 DCSB시험편에서의 3차 공진주파수인 약 1.4 kHz보다 훨씬 커서, 고주파수의 효과가 나타났던 것으로 생각된다.

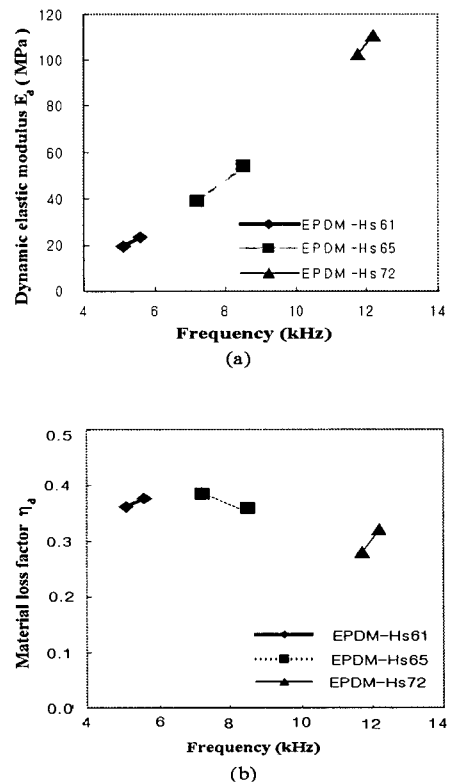


Fig. 10 Dynamic elastic modulus (a) and material loss factor of a simple resonant specimen (b).

6.4 EPDM 고무의 동특성의 주파수 의존성

Fig. 11은 DCSB 시험편을 사용한 사인 스위프 실험, 단순공진시험편을 사용한 사인 스위프 실험을 통하여 구한 각 EPDM 고무의 동탄성계수 값을 주파수의 함수로 나타

내고 있다. 또한 Fig. 12는 각 실험으로 구한 고무의 재료 손실계수를 주파수의 함수로 나타내고 있다. 주파수별로 구한 실험결과를 바탕으로 최소자승오차법(least square error method)을 사용하여 재료의 동탄성계수와 재료손실계수를 주파수의 함수로써 가정하여 이차식으로 근사화하고 Table 2에 제시하였다. 회귀계수 r_c^2 은 전반적으로 높게 나왔는데, 고무의 동탄성계수가 작을수록 재료손실계수는 커졌으며 주파수가 커질수록 동탄성계수와 재료손실계수는 증가하는 거동을 나타냈다. 또한 고무종류에 따라 동탄성계수와 재료손실계수는 다른 주파수 의존성을 보여 주었다.

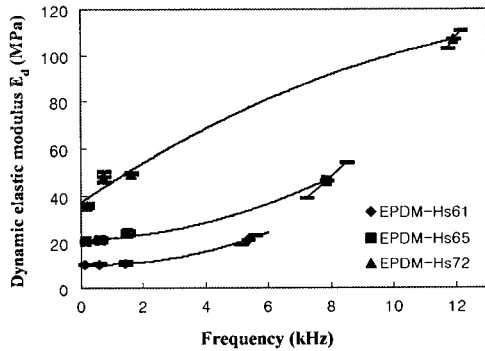


Fig. 11 Quadratic frequency dependence of dynamic elastic modulus of Rubbers.

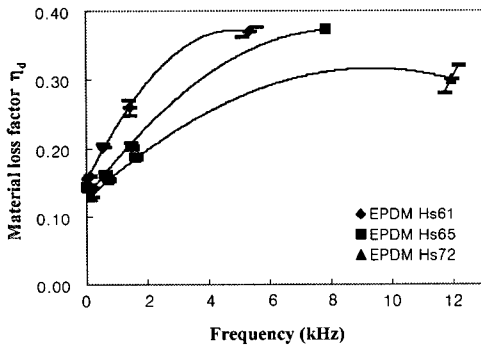


Fig. 12 Quadratic frequency dependence of material loss factor of rubber.

7. 결 론

본 논문에서는 고무의 동탄성계수와 손실계수의 주파수

의존성을 평가할 수 있는 새로운 양팔 샌드위치보 시험법을 고안하여 검토하였다.

고무층이 삽입된 양팔 샌드위치보의 공진주파수는 각 모드별로 단일외팔 강보의 공진주파수보다 약간 크게 나타났다. 이와 같은 양팔 샌드위치보의 횡진동특성을 모드별로 측정하고 유한요소모사해석을 이용한 모달변형에너지법을 조합함으로써 삽입된 고무의 주파수별 동탄성계수와 재료감쇠계수를 주파수의 함수로 회귀시켜 평가할 수 있었다.

후 기

이 논문은 학술진흥재단 BK21사업비 및 2001년도 한양대학교 교내연구비 지원으로 연구되었으며 이에 감사합니다.

Table 2 Coefficients for quadratic relations of dynamic elastic modulus and loss factor of rubbers with frequency

Dynamic elastic modulus		$E_d = c_0 + c_1f + c_2f^2$		
Materials	c_0	c_1	c_2	r_c^2
EPDM Hs61	1.050×10^7	-3.837×10^2	4.524×10^{-1}	0.99
EPDM Hs65	2.127×10^7	3.404×10^2	3.692×10^1	0.96
EPDM Hs72	3.725×10^7	8.819×10^3	-2.520×10^1	0.98
Material loss factor		$\eta_d = c'_0 + c'_1f + c'_2f^2$		
Materials	c'_0	c'_1	c'_2	r_c^2
EPDM Hs61	1.525×10^{-1}	9.009×10^{-5}	-9.230×10^{-1}	0.94
EPDM Hs65	1.290×10^{-1}	5.900×10^{-5}	-3.565×10^{-9}	0.96
EPDM Hs72	1.252×10^{-1}	4.086×10^{-5}	-2.188×10^{-6}	0.98

참고문헌

- 1) Saito, H., Tani, H., "Vibrations of Bonded Beams with a Single Lap Adhesive Joint," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 92, No. 2, 1984, pp. 299-309.
- 2) Rao, M. D., Crocker, M. J., "Analytical and Experimental Study of the Vibration of Bonded Beams with a Lap Joint," *Trans. of the ASME, J. of Vibration and Acoustics*, Vol. 112, 1990, pp. 444-451.
- 3) Johnson, C.D., Kienholz, D.A., "Finite Element Prediction of Damping in Structures with Constrained Viscoelastic Layers," *AIAA Journal*, Vol. 20, No. 9, 1992, pp. 1284-1290.

- 4) 박정일, 최낙삼, “접침이음부와 부분층댐퍼가 부착된 보의 진동감쇠해석,” *한국복합재료학회지*, 제 12권, 제 2호, 1999, pp. 26-35.
- 5) Choi, N.S. and Park, J.I. “Analysis of the Vibration Damping of Bonded Beams with a Single-Lap-Joint and Partial Dampers,” *JSME International Journal*, Series C, Vol. 44, No. 2, 2001, pp. 350-359.
- 6) Mario, P., *Structural Dynamics: Theory and Computation*, Chapman & Hall, New York. 1997, pp. 59-60.