▩ 연구논문

# 다중단계 서비스의 M/G/1 대기행렬에 대한 분석

# An analysis on the M/G/1 queueing model with multi-phase service

김 정 현*
Jeonghyun Kim,
허 선*
Sun Hur

## Abstract

In this paper, we analyze an M/G/1 two-phase gated service model with threshold. We consider compound Poisson arrival process and general service time, where the server gives two different modes of services in order, batch and individual services. Server starts his service when the number of arrived customers reaches the predetermined threshold . We find the PGF of the number of customers in system and LST of waiting time, with which we obtain the means of them.

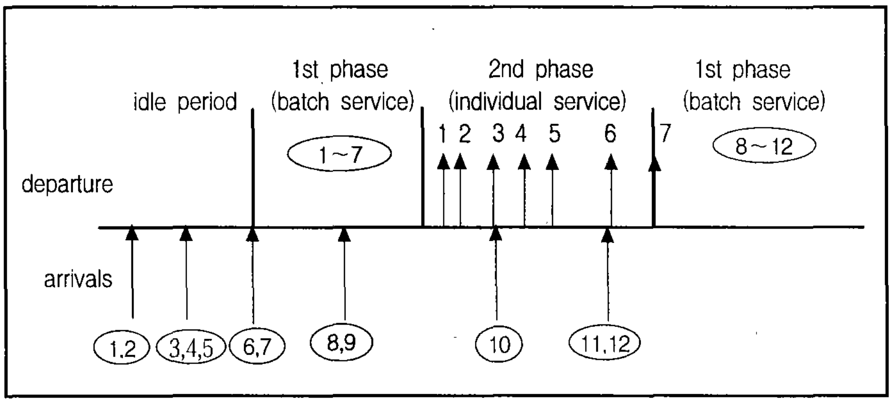
## 1. 서 론

대기모형에서 2단계 서비스란 하나의 서버가 2가지의 서비스를 순차적으로 행하는 것을 말한다. 대부분의 경우, 2단계 서비스란 첫 번째 단계에서는 대기중인 고객을 한꺼번에 서비스(예를 들면 전처리(pre-processing))한 후, 이들을 대상으로 하나씩 본처리(main-processing)하는 두 번째 단계로 이루어져 있다. 이러한 모델의 예로는, 재고 모형에서 각각의 주문이 접수되었을 때 이들을 분류, 통합하는 단계를 1단계 서비스로, 각 주문에 대한 납기 등을 2단계 서비스로 모형화할 수 있다. 또 다른 예로는 생산공정에서 선공정이 있는 경우를 들 수 있겠다. 즉 생산라인에 들어온 제품을 일차로 선가공 후 각각의 제품에 대해 재가공하는 모델 등이 있을 수 있다. 이 경우 선가공은 배치로 이루어지며, 이후 개별적인 가공이 이루어지게 된다.

이러한 2단계 서비스에 대한 기존연구를 살펴보면, Krishna 와 Lee[7] 가 연구한 도착과 서비스가 지수 분포인 2단계 서비스가 있었고 이를 확장한 서비스시간이 일반적인 분포를 따르는 Doshi[6]의 논문이 있었다. 그리고 여기에 복수 휴가를 고려한 모델로는 Selvam과 Sivasankaran[9]의 논문이 있었으며, 이를 확장한 일반적인 휴가 모델과 1단계 서비스에 gate가 있는 모델을 김태성과 채경철[1]이 연구하였다. 최근에는 Threshold 와 1단계 서비스에 gate가 있는 모형을 김태성[2]이 연구하였다.

본 연구에서는 M/G/1 모형에서 김태성[2], 김태성과 채경철[1]의 연구결과를 고객들의 도착이 집단으로 이루어지는 모형으로 확장하였다. 즉, 도착이 집단으로 발생하고, threshold와 1단계 서비스에 gate가 있는 모델을 분석한다. 배치로 도착한 고객의 수가 일정한 Threshold가 넘으면 서비스를 시작하는 모델로 첫 번째 단계 서비스는 배치서비스를, 두 번째 단계 서비스는 개별서비스를 하나의 서버가 순차적으로 한다. 시스템의 모든 고객은 배치서비스와 개별서비스를 모두 받고 나간다. 개별 서비스가 끝났을 때 시스템에 고객이 없으면 서버는 서비스를 중단

하고, threshold가 넘을 때까지 기다린다. 그러나, 개별서비스가 끝났을 때 시스템에 고객이 있으면 다시 배치서비스를 수행한 후 개별서비스로 가는 사이클을 시스템에 고객이 없을 때까지 반복한다. 이때 배치서비스나 개별 서비스 중에 도착한 고객은 서비스에 합류하는 것이 아니라 다음 배치서비스를 기다려야 한다. 배치서비스 시간은 고객수와 독립적인 분포를 따르며 개별서비스 시간도 모두 i.i.d한 확률 분포를 따른다. 본 모형의 이해를 돕기 위해 threshold가 6인모형에 대해 다음 <그림 1>과 같이 예를 들어 보기로 한다.




<그림1> Threshold가 6일 때 모형의 예

위 <그림 1>에서 보면 threshold가 6이므로 3번째 도착집단이 도착하는 순간 대기고객수가 6명을 넘어 서비스가 시작된다. 이들 7명의 고객들을 서비스하는 중에 도착한 고객들 (8,9,10,11,12)은 현재 진행중인 서비스를 받는 것이 아니라 다음번에 시작되는 첫 번째 단계 서비스를 기다리게 된다. 첫 번째 단계 배치서비스가 끝난 후 두 번째 단계 서비스인 개별서비스가 시작되어 서비스를 받은 고객은 시스템을 이탈한다. 7번째 고객의 서비스가 종료된 후 서버는 다시 첫 번째 단계 서비스로 돌아가 첫 번째 및 두 번째 서비스 동안 도착한 고객을 서비스한다. 이 경우 대기고객은 8~12로, 5명이 첫 번째 단계 배치서비스 및 이어지는 두 번째 단계 개별서비스를 받게 된다. 이러한 과정은 개별서비스가 종료된 후 시스템에 고객이 없을 때까지 반복된다. 2절에서는 용어를 정의하고 임의시점 고객수 분포를 구하고 3절에서는 대기시간에 대한 분포를 유도한다. 또한 이를 통한 각각의 평균을 구한다.

## 2. 고객수 분석

### 2.1 변수 정의

본 논문에서 사용할 확률변수들과 각종 변수들을 다음과 같이 정의한다.

$\lambda$ : 포아송과정으로 도착하는 고객집단들의 도착률

$P$ : 배치서비스 시작시점에서 안정상태 고객수

$P_2$ : 개별서비스 종료시점에서 안정상태 고객수

$P_{20} = \Pr(P_2 = 0)$ (개별서비스 종료시 고객이 없을 확률)

$g_k$ : 도착집단 고객수가 $k$ 명일 확률

$X(z) = \sum_{i}^{\infty} g_i z^i, (g_0 = 0)$ : $g_k$의 PGF(Probability generating function)

$N$ : threshold
$B$ : 배치서비스 시간, $B^*(\theta)$: B의 LST(Laplace-Stieltjes transform)
$S$ : 개별서비스 시간, $S^*(\theta)$ : S의 LST
$\alpha_N$ : threshold가 $N$일 경우 유휴기간 종료시점에서 시스템내의 고객수
이에 따라 $P, P_2$ 는 다음과 같은 관계가 있다.
$P_2$ =배치서비스 시작시점의 고객을 개별서비스하는 동안 도착한 고객수 + 배치서비스 동안 도착한 고객수

$$P = \begin{cases} P_2 & \text{if } P_2 > 0 \\ \alpha_N & \text{if } P_2 = 0 \end{cases}$$

## 2.2 각 시점 고객수 PGF

우선 $\alpha_N$의 분포를 구하면, $\alpha_N = k$ (정의에 의해서 $\alpha_N \geq N$ 이어야 함)이기 위해서는첫번째 도착집단의 크기가 $k$이거나, 첫 번째 도착집단의 크기가 $j$ $(1 \leq j < N)$이고 이후 나머지 유휴기간동안 총 $k-j$명이 도착하면 되므로 $\Pr(\alpha_N = k) = g_k + \sum_{j=1}^{N-1} g_j \Pr(\alpha_{N-j} = k-j)$이고 $\alpha_N$의 PGF인 $\alpha_N(z)$는 $\alpha_N(z) = \sum_{j=1}^{N-1} g_j z^j (\alpha_{N-j}(z) - 1) + X(z)$이 된다.

한편, $P$와 $P_2$의 PGF $P_2(z), P(z)$는 정의에 의해 다음과 같다.

$$P_2(z) = P[S^*(\lambda - \lambda X(z))]B^*(\lambda - \lambda X(z)) \tag{1}$$

$$P(z) = P_2(z) - P_{20} + P_{20}\alpha_N(z) \tag{2}$$

식 (1)을 식 (2)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$P(z) = P(S^*(\lambda - \lambda X(z)))B^*(\lambda - \lambda X(z)) - P_{20}(1 - \alpha_N(z)) \tag{3}$$

여기서 미지의 값 $P_{20}$을 구하기 위해 다음과 같은 변환을 정의한다.

$$s^{(0)}(z) = z,\ \ s^{(1)}(z) \equiv s(z) = S^*(\lambda - \lambda X(z)),\ \ s^{(2)}(z) = s^{(1)}(s^{(1)}(z)) = S^*[\lambda - \lambda X[S^*(\lambda - \lambda X(z))]],\ \cdots,$$
$$s^{(k)}(z) = s^{(k-1)}(s^{(1)}(z)),\ \cdots \tag{4}$$

$$b^{(0)}(z) = z,\ \ b^{(1)}(z) \equiv b(z) = B^*(\lambda - \lambda X(z)),\ \ b^{(2)}(z) = b^{(1)}(b^{(1)}(z)) = B^*[\lambda - \lambda X[B^*(\lambda - \lambda X(z))]],\ \cdots,$$
$$b^{(k)}(z) = b^{(k-1)}(b^{(1)}(z)),\ \cdots \tag{5}$$

$$L(z) = 1 - \alpha_N(z),\ \ L(s(z)) = 1 - \alpha_N(s(z)),\ \cdots,\ L(s^{(k)}(z)) = 1 - \alpha_N(s^{(k)}(z)),\ \cdots \tag{6}$$

위 식들에 대한 해석은 다음과 같다. $s^{(0)}(z) = z$에 해당되는 수(1명의 고객)를 개별서비스 하는 동안 도착하는 고객수의 PGF는 $S^*(\lambda - \lambda X(z))$이고 이를 $s^{(1)}(z)$ 또는 $s(z)$라 표현한다. $s^{(1)}(z)$에 해당하는 고객을 모두 개별 서비스 하는 동안 도착한 고객수의 PGF는 $s^{(1)}(s^{(1)}(z)) = S^*[\lambda - \lambda X[S^*(\lambda - \lambda X(z))]]$이고 이를 $s^{(2)}(z)$라고 표현한다. 이런 식으로 $s^{(n)}(z) = s(s^{(n-1)}(z)) = s^{(n-1)}(s(z))$의 관계를 정의한다. $b^{(n)}(z)$, $L(s^{(n)}(z))$에 대해서도 마찬가지로 정의한다.

위 변환들을 이용하면 식 (3)은 다음과 같이 표현된다.

$$P(z) = P(s(z))b(z) - P_{20}L(z) \tag{7}$$

식 (7)에 $z = s(z)$를 대입해서 얻은 식을 다시 식 (7)에 대입하여 정리하면 다음 식과 같다.

$$P(z) = P(s^{(2)}(z))b(s^{(1)}(z))b(z) - P_{20}L(s(z))b(z) - P_{20}L(z) \tag{8}$$

식 (7)에 $z = s(z)$를 대입한 식에 다시 $z = s(z)$을 대입하여 얻은 식을 식 (8)에 대입한 후 정리하면 식 (9)를 얻는다.

$$P(z) = P(s^{(3)}(z))b(s^{(2)}(z))b(s^{(1)}(z))b(z) - P_{20}L(s^{(2)}(z))b(s^{(1)}(z))b(z) - P_{20}L(s(z))b(s(z)) - P_{20}L(z) \tag{9}$$

이와 같은 방법을 반복하여 $P(z)$를 다시 쓰면 식 (10)과 같이 쓸 수 있다.

$$P(z)=\Pi_{j=0}^{\infty}b(s^{(j)}(z))-P_{20}\sum_{k=0}^{\infty}L(s^{(k)}(z))\Pi_{j=0}^{k-1}b(s^{(j)}(z)) \tag{10}$$

식 (7)에 $z$=0을 대입하고 $\alpha_N(0)=0$, $P_2(0)=P_{20}$, $P(0)=0$인 사실과 식 (10)를 이용하여 정리하면 $P_{20}$에 대한 다음 식을 얻을 수 있고

$$P_{20}=P(s(0))b(0)=b(0)[\Pi_{j=0}^{\infty}b(s^{(j+1)}(0))-P_{20}\sum_{k=0}^{\infty}L(s^{(k+1)}(0))\Pi_{j=0}^{k-1}b(s^{(j+1)}(0))]$$

$$=\Pi_{j=0}^{\infty}b(s^{(j)}(0))-P_{20}\sum_{k=0}^{\infty}L(s^{(k+1)}(0))\Pi_{j=0}^{k}b(s^{(j)}(0))$$

이를 $P_{20}$에 대해 다시 정리하면 다음과 같다.

$$P_{20}=\frac{\Pi_{j=0}^{\infty}b(s^{(j)}(0))}{1+\sum_{k=0}^{\infty}L(s^{(k+1)}(0))\Pi_{j=0}^{k}b(s^{(j)}(0))} \tag{11}$$

## 2.3 이탈 시점 고객수 PGF

이탈 시점 고객수는 gate가 없는 모델과는 달리 배치서비스 종료시점이 아닌 배치서비스 시작시점의 고객수에 조건을 취하여 구할 수 있다. 다음의 용어들을 정의하자.

$M$: 이탈 시점 고객수,
$P'$ : 시험고객이 속한 집단의 크기
$K$ : 집단내에서 임의고객의 위치
그러면 이탈시점의 고객수 $M$의 PGF $M(z)$는 다음과 같다.

$$M(z)=E(z^M)=E(E(z^M\mid P'))=\sum_{n=1}^{\infty}E(z^M\mid P'=n)\Pr(P'=n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}E(z^M\mid P'=n,K=k)\Pr(P'=n)\Pr(K=k\mid P'=n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}b(z)z^{n-k}s(z)^k\frac{n\Pr(P=n)}{nE(P)}$$

$$=\frac{s(z)b(z)[P(z)-P(s(z))]}{E(P)(z-s(z))}, \tag{12}$$

여기서 식 (1), (2)에서부터 구한 기대값을 풀면 $E(P)=\dfrac{\gamma+P_{20}E(\alpha_N)}{1-\rho}$이고, $\gamma=\lambda E(B)E(X)$ , $\rho=\lambda E(S)E(X)$를 나타낸다.

## 2.4 임의 시점 고객수 PGF

본 모델에서는 도착이 집단으로 발생하기 때문에 Burke의 정리, 즉 임의시점 고객수의 분포와 이탈 시점 고객수의 분포가 같다는 정리를 사용할 수 없다. 그러나 입력시점의 고객수를 변환하면 Burke의 정리가 성립하게 할 수 있다. 즉 집단으로 도착한 고객들을 하나씩 입력시킨다고 보고 이때 시간은 정지한다고 보면 Burke의 정리가 성립한다.[4,5] 이를 바탕으로 임의시점 고객수의 PGF를 다음과 같이 구할 수 있다. 다음의 용어를 정의하자.

$\overline{\Pi}^{(X)}(z)$ : 도착집단내 고객이 보는 시스템 고객수의 PGF
$\overline{\Pi}(z)$ : 임의의 고객이 입력시 보는 고객수의 PGF
$M(z)$ : 이탈시점의 고객수의 PGF
$R(z)$ :임의시점 고객수의 PGF

$K(z) = \frac{1-X(z)}{E(X)(1-z)}$ 라고 두면 이는 도착집단내 임의고객의 위치 $K$의 PGF이다. 따라서

$\overline{\Pi}(z) = \overline{\Pi}^{(X)}(z) \cdot K(z)$이 되고 Burke의 정리에 의해 $\overline{\Pi}(z) = M(z)$이 된다. 또한 집단들의 도착은 포아송과정이므로 PASTA에 의해 집단들의 도착시점의 고객수는 임의시점 고객수와 동일한 분포를 가지므로 $R(z) = \overline{\Pi}^{(X)}(z)$가 성립한다. 따라서 임의시점 고객수의 PGF는 다음과 같다.

$$R(z) = \frac{s(z)b(z)[P(z) - P(s(z))]}{E(P)(z - s(z))} \frac{E(X)(1-z)}{1-X(z)} \tag{13}$$

식(13)을 미분하여 $z$에 1을 대입하면 임의시점에서의 시스템내 평균 고객수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E(R) = \frac{\lambda^2 E(B^2)E(X)^2}{2[\gamma + P_{20}E(\alpha_N)]} + \rho + \frac{\lambda^2 E(S^2)E(X)^2}{2(1-\rho)} + \frac{\gamma}{(1-\rho)} \frac{P_{20}E[\alpha_N(\alpha_N - 1)]}{2[\gamma + P_{20}E(\alpha_N)]} + \frac{E[X(X-1)]\lambda E(S)}{2(1-\rho)} - \frac{P_{20}E(\alpha_N)E[X(X-1)]}{2E(X)[\gamma + P_{20}E(\alpha_N)]} \tag{14}$$

## 3. 대기시간 분석

대기시간은 임의의 시험고객이 시스템 내에 들어온 후 배치서비스를 받고 개별서비스를 받기 전까지 기다리는 시간을 말한다. 시험고객을 포함한 집단고객 도착시점을 다음과 같이 3부분으로 나누어 구한다. 배치서비스, 유휴기간, 개별서비스 기간에 고객이 도착할 확률은 각각 $\frac{\gamma(1-\rho)}{\gamma + P_{20}E(\alpha_N)}$, $\frac{P_{20}E(\alpha_N)(1-\rho)}{\gamma + P_{20}E(\alpha_N)}$, $\rho$ 인데 각각의 확률값은 지체 사이클, 재생과정[2]이론에 의해 구할 수 있지만, 다음과 같이 생각할 수도 있다. 서버는 개별서비스와 배치서비스를 수행하지만, 실제적인 서비스는 개별서비스라고 가정하면, 시스템은 일량보존성에 의해 고객이 개별서비스때 도착할 확률은 $\rho$이고 그 외 상태에 도착할 확률은 1-$\rho$임을 알 수 있다. 개별서비스 이외 시점에 도착한다는 조건 하에 유휴기간, 배치서비스기간이 차지하는 확률은 각각 $\frac{P_{20}E(\alpha_N)}{\gamma + P_{20}E(\alpha_N)}$, $\frac{\gamma}{\gamma + P_{20}E(\alpha_N)}$ 이므로 1-$\rho$를 곱하여 유휴기간, 배치서비스 기간에 도착할 확률을 구할 수 있다. 위에서 구한 확률 값들과 시험고객이 도착하는 시점에 따른 대기시간을 조사하여 대기시간 분포를 구할 수 있다.

1) idle할 때 도착한 고객의 대기시간은 다음 ①~④의 시간들의 합으로 구성된다

① 도착해서 j 명이 있다면 j 명의 개별 서비스 시간 (j≤N-1)
② 배치서비스 시간
③ 시험고객을 포함한 도착 집단내에서 시험고객 앞에 있는 고객의 개별 서비스 시간
④ j 명에서 N 명이 넘을 때까지의 잔여 유휴시간

①,②,③는 서로 독립이 아니므로 ①+②+③의 LST를 다음과 같이 구한다. 우선, threshold가 $N$이고 유휴 할 때 도착한 집단이 보는 고객수를 $A_N$이라 할 때, $A_N = j$일 확률은 식 (15)와 같다 [3,8].

$$\Pr(A_N = j) = \pi_j / \sum_{n=0}^{N-1} \pi_n, \quad \pi_j = \sum_{k=1}^{j} g_k \pi_{j-k} \tag{15}$$

여기서 $\pi_j$ 는 유휴한 기간동안 j 상태를 방문할 확률이다. 이제 $T_N$을 threshold가 N일 때 유휴기간이라고 하고 $T_N^*(\theta)$를 $T_N$의 LST라 하면 $T_N$은 첫 번째 도착집단에 조건을 취하여 다음과 같

이 구한다.

$$\Pr(T_N=t)dt=\lambda e^{-\lambda t}dt\sum_{k=N}^{\infty}g_k+\int_0^t\left[\lambda e^{-\lambda x}\sum_{k=1}^{N-1}g_k\cdot\Pr(T_{N-k}=t-x)\right]dx\;dt$$

여기서 우변의 첫항은 첫 번째 도착집단의 크기가 $N$을 넘는 경우이고 두 번째 항은 그렇지 않은 경우를 나타낸다. 따라서 $T_N^*(\theta)=\frac{\lambda}{\lambda+\theta}[1+\sum_{k=1}^{N-1}g_k(T_{N-k}^*(\theta)-1)]$ 이 된다.

$W_j^*(\theta)$를 유휴기간 때 도착해서 j명이 있어 기다리게 되는 대기시간의 LST라 하면 다음 식 (16)와 같이 정리된다.

$$W_j^*(\theta)=[S^*(\theta)]^j\left[\sum_{r=1}^{N-j-1}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{r}\frac{rg_r}{E(X)}[S^*(\theta)]^{i-1}[T_{N-j-r}^*(\theta)]+\sum_{r=N-j}^{\infty}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{r}\frac{rg_r}{E(X)}[S^*(\theta)]^{i-1}\right] \tag{16}$$

여기서 우변 둘째 대괄호 속의 첫째 항은 시험고객이 속한 고객집단의 도착으로 인해서도 threshold를 넘지않은 경우이고 두 번째 항은 threshold를 넘은 경우이다.
①+②+③와 ④는 서로 독립이므로 LST성질에 의해 곱으로 표현하여 식 (17)을 얻는다.

$$\begin{aligned}W^*(\theta\mid idle)&=\sum_{j=0}^{N-1}\Pr(A_N=j)\;W_j^*(\theta)\;B^*(\theta)\\&=\frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1}\pi_n}\sum_{j=0}^{N-1}\pi_j[S^*(\theta)]^jB^*(\theta)\left[\frac{1-X(S^*(\theta))}{E(X)(1-S^*(\theta))}+\sum_{r=1}^{N-j-1}\frac{g_r[1-(S^*(\theta))^r][T_{N-j-r}^*(\theta)-1]}{E(X)[1-S^*(\theta)]}\right]\end{aligned} \tag{17}$$

2) 배치서비스 때 도착고객의 대기시간은 다음 ①~⑤ 시간의 합으로 구성된다.

① 잔여 배치서비스시간
② 경과 배치서비스 시간동안 도착한 고객의 개별 서비스 시간,
③ 배치서비스 시작시 고객의 개별서비스 시간
④ 다음 배치서비스 시간
⑤ 시험고객을 포함한 도착 집단내에서 시험고객 앞에 있는 고객의 개별 서비스 시간

①+②는 서로 독립이 아니므로 재생과정에 경과시간과 잔여시간의 결합 LST를 이용하여 구한다[4]. ③~⑤는 서로 독립이므로 LST의 성질에 의해 서로 곱으로 표현된다. 배치서비스 때 도착한 고객의 대기시간 LST는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}W^*(\theta\mid batch\ service)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B^*[\lambda-\lambda X(S^*(\theta))]-B^*(\theta)}{[\theta-\lambda+\lambda X(S^*(\theta))]E(B)}B^*(\theta)\frac{1-X(S^*(\theta))}{E(X)(1-S^*(\theta))}S^*(\theta)^n\Pr(P=n)\\&=\frac{B^*[\lambda-\lambda X(S^*(\theta))]-B^*(\theta)}{[\theta-\lambda+\lambda X(S^*(\theta))]E(B)}B^*(\theta)\frac{1-X(S^*(\theta))}{E(X)[1-S^*(\theta)]}P(S^*(\theta))\end{aligned} \tag{18}$$

3) 개별서비스 때 도착고객의 대기시간은 다음 ①~⑤ 시간들의 합으로 구성된다.

먼저 Q를 배치서비스 시작시점의 고객을 모두 개별서버스 하는데 걸리는 시간(총개별 서비스시간)이라 하면, $Q^*(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}[S^*(\theta)]^n\Pr(P=n)\;=P(S^*(\theta))$이 된다.

① 도착시점에서의 Q의 잔여시간
② 도착시점에서 Q의 경과시간 동안 도착한 고객의 개별서비스 시간
③ 배치서비스 동안 도착한 고객의 다음 개별 서비스 시간,
④ 다음 배치 서비스 시간
⑤ 시험고객을 포함한 도착 집단내에서 시험고객 앞에 있는 고객의 개별서비스 시간

①+②는 역시 서로 독립이 아니므로 2)에서와 같이 경과시간과 잔여시간의 결합 LST를 이용하여 구하며, ③~⑤도 2)에서와 같이 구할 수 있다. 개별서비스 때 도착한 고객의 대기시간 LST는 다음과 같다.

$$W^*(\theta \mid individual\ service) = \frac{Q^*[\lambda-\lambda X(S^*(\theta))]-Q^*(\theta)}{[\theta-\lambda+\lambda X(S^*(\theta))]E(Q)} B^*[\lambda-\lambda X(S^*(\theta))] \cdot B^*(\theta)\frac{1-X(S^*(\theta))}{E(X)[1-S^*(\theta)]} \qquad (19$$

여기서 $E(Q)=E(P)E(S)$ 이다.

각각 세 부분을 고려한 대기시간 LST는 다음과 같다.

$$W_q^*(\theta)=$$

$$(1-\rho)\frac{P_{20}E(\alpha_N)}{\gamma+P_{20}E(\alpha_N)} \frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1}\pi_n} \sum_{j=0}^{N-1}\pi_j[S^*(\theta)]^j B^*(\theta)\left[\frac{1-X(S^*(\theta))}{E(X)(1-S^*(\theta))}+\sum_{r=1}^{N-j-1}\frac{g_r[1-(S^*(\theta))^r][T^*_{N-j-r}(\theta)-1]}{E(X)[1-S^*(\theta)]}\right]$$
$$+\frac{\gamma(1-\rho)}{\gamma+P_{20}E(\alpha_N)} \frac{1-X(S^*(\theta))}{E(X)(1-S^*(\theta))}P(S^*(\theta)) \cdot \frac{B^*[\lambda-\lambda X(S^*(\theta))]-B^*(\theta)}{[\theta-\lambda+\lambda X(S^*(\theta))]E(B)}B^*(\theta)$$
$$+\rho\frac{Q^*[\lambda-\lambda X(S^*(\theta))]-Q^*(\theta)}{[\theta-\lambda+\lambda X(S^*(\theta))]E(Q)} \cdot \frac{1-X(S^*(\theta))}{E(X)(1-S^*(\theta))} \cdot B^*[\lambda-\lambda X(S^*(\theta))]B^*(\theta) \qquad (20)$$

식 (16)을 $\theta$에 대해 미분하고 0을 대입하면 평균대기시간을 구할 수 있다.

$$E(W_q)=\frac{\lambda E(B^2)E(X)}{2[\gamma+P_{20}E(\alpha_N)]}+\frac{\lambda E(S^2)E(X)}{2(1-\rho)}+\frac{E[X(X-1)]E(S)}{2(1-\rho)E(X)}+\frac{E(B)}{(1-\rho)}\frac{P_{20}E[\alpha_N(\alpha_N-1)]}{2\lambda E(X)[\gamma+P_{20}E(\alpha_N)]}$$
$$-\frac{P_{20}E(\alpha_N)E[X(X-1)]}{2\lambda E(X)^2[\gamma+P_{20}E(\alpha_N)]} \qquad (21)$$

## 4. 결 론

본 연구에서는 도착이 집단으로 일어나고 gate와 threshold가 있는 모형에 대해 분석했다. 본 연구에서 유도한 평균 대기 시간 및 평균 고객수에 배치사이즈를 1로 두고 그 값을 구해 보면 threshold와 gate가 있는 M/G/1 모델과 같음을 알 수 있다. 또한 식 (13)의 시스템내 평균 고객수에 Little의 법칙, 즉 $E(R)=\lambda E(X)(E(W_q)+E(S))$을 사용하면 식 (20)을 이용하여 구한 평균대기시간 식 (21)과 같음을 확인 할 수 있다.

## 참고 문헌


[1] 김태성, 채경철, "2단계 서비스와 일반휴가 대기행렬", *산업공학회지*, 제22권, 제1호, pp95-104, 1996

[2] 김태성, "Cycle analysis of a two-phase queueing model with threshold", *Manuscript*

[3] 이순석, " Threshold와 휴가가 있는 집단 대기행렬의 운영특성", 성균관대 박사학위 논문,1993

[4] 이호우, *대기행렬이론,* 시그마프레스 ,1998

[5] Cooper, R. B., *Introduction to Queueing Theory,* CeePress Books, 1990

[6] Doshi, B. T. , " Analysis of a Two Phase Queueing System with General Service Times" ,*OR Letters*, Vol 10, pp265-272, 1991

[7] Krishna, C. M. and Lee, Y. H., " A Study of Two-phase Service", *OR Letters*, Vol 9, pp91-97, 1990

[8] Lee, H. W. , Lee, S. S. and Chae, K. C. , "Operation characteristics of $M^X/G/1$ queue with N-policy " *Queueing Systems*, Vol 15, pp387-399, 1994

[9] Selvam, D. D. and Sivasankaran. V., "A Two- phase Queueing Systems with Server Vacations", *OR Letters*, Vol 15, pp163-168, 1994