부 최적화 문제의 근사적인 계산을 통한 신뢰도 최적설계 방법의 효율개선

정 도 현* · 이 병 채†

(2001년 2월 24일 접수, 2001년 7월 20일 심사완료)

Enhancement of Computational Efficiency of Reliability Optimization Method by Approximate Evaluation of Sub-Optimization Problem

Do Hyun Jung and Byung Chai Lee

Key Words : Reliability Based Optimal Design(신뢰도 최적설계), Probability Constraint(확률 제한조건), Sub-optimization Problem(부 최적화 문제), Safety Index(안전 지수)

Abstract

Alternative computational scheme is presented for reliability based optimal design using a modified advanced first order second moment (AFOSM) method. Both design variables and design parameters are considered as random variables about their nominal values. Each probability constraint is transformed into a sub-optimization problem and then is resolved with the modified Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler (HL-RF) method for computational efficiency and convergence. A method of design sensitivity analysis for probability constraint is presented and tested through simple examples. The suggested method is examined by solving several examples and the results are compared with those of other methods.

1. 서 론

70 년대 이후 제품의 품질을 높이고 가격을 낮추기 위해 산업현장에서 최적설계 방법들이 많이 이용되고 있다. 그러나 설계과정 중에 공학 모델링이나 제품 가공 중에 발생할 수 있는 불확실성(uncertainty)으로 인해 기존 최적설계 방법들의 한계가 드러나면서 신뢰도 최적설계 (reliability based optimal design) 방법이 요구되고 있다. 신뢰도 최적설계 방법의 중요한 특징은 설계변수와 설계 파라미터를 불확실성을 가진 확률변수로 설정하는 점과 확률변수로 표현되는 확률 제한조건을 다룬다는 점이다.

전통적인 신뢰도 최적설계 방법에서는 확률 제한조건을 풀기 위해 신뢰도 해석을 통해 구한 안전 지수(safety index)로 표현되는 최적설계 문제를 구성한 후 비선형 최적설계 알고리듬을 이용해서 푼다. 신뢰도 해석과정 중에 안전 지수를 정확하게 구하기 위해서는 먼저 확률 밀도 함수를 구해야 하고 복잡한 적분식을 풀어야 한다. 그러나 적분식을 정확히 푸는 것은 사실상 불가능하기 때문에 근사적인 방법을 이용한다. 몬테칼로 모의실험을 이용하여 확률값을 얻을 수 있지만 그 비용과 적용성 등의 이유로 검증하는 차원에서 이용되고 있다. 그래서 지금까지 많은 연구자들이 확률 제한조건을 처리하기위해 1 차 안전 지수를 도입한 1 차 신뢰도 방법 (first order reliability method, FORM) 을 이용해 왔다. 1 차 신뢰도 방법으로는 일반적인 제한조건에 대해 정확한 확률을 구할 수 있다. 그리고 비선형성이 강한 제한조건을 다룰 경우에는 곡률 정보를 이용하여 안전 지수를 구하는 2 차 신뢰도 방법 (second order reliability method, SORM) 을 사용하고 있지만 주로 FORM 방법의 개선에 많은 노력이 이루어지고 있다.

* 한국과학기술원 기계공학과
E-mail : s_jdh@cais.kaist.ac.kr
TEL : (042)869-3071 FAX : (042)869-3095
† 책임저자, 회원, 한국과학기술원 기계공학과

먼저 1 차 신뢰도 방법에는 위반확률의 근사 계산 방법으로 성능함수의 평균점에서 성능함수를 선형 근사화 시키는 평균 2 차 모멘트 방법(mean-value first order second moment, MVFOSM) 방법[1] 과 불변 2 차 모멘트 방법(advanced first order second moment, AFOSM) 방법[2,3] 이 있다. 평균 2 차 모멘트 방법은 비선형 제한조건 함수의 선형 근사화가 확률 변수의 평균점에서 이루지는 방법으로 근사 확률의 낮은 정확성과 불변성 결여 등의 단점이 존재한다. 따라서 좀 더 개선된 확률 근사 방법으로 제한조건 함수의 최대 위반 가능점(most probable failure point, MPP)에서 선형 근사화를 수행하는 불변 2 차 모멘트 방법이 추천되고 있다. Rackwitz[4] 등은 비정규 분포를 상당 정규 분포로 변환함으로써 비정규 분포를 포함하는 제한조건 함수의 위반확률을 구할 때, 불변 2 차 모멘트 방법을 적용할 수 있음을 보였다.

안전 지수를 이용한 신뢰도 최적설계 알고리듬을 구조 최적설계에 적용시키려는 연구들이 진행되었고[5~7] Lee 와 Kwak[8] 은 신뢰도를 고려한 최적설계 문제에서 단일 제한조건 함수의 위반확률 계산에 불변 2 차 모멘트 방법을 적용하였고 신뢰도 제한조건의 새로운 민감도 수식화를 유도했다.

불변 2 차 모멘트 방법을 이용할 때 도입되는 부 최적화 문제를 효율적으로 풀 수 있는 방법들도 많이 연구되고 있는데 Lee 와 Kwak[9] 은 노이만 전개 기법(Neumann expansion technique)을 이용했고 Grandhi[10] 등은 부 최적화 문제 해결 과정 중에 제한조건 함수를 2 점 근사기법을 통해 근사하고 이를 함수계산을 할 때 이용하는 방법을 제안했다. 제한조건 함수 상의 몇 점에서 실제 함수를 미리 정해진 함수 모델로 근사하고, 이를 이용하여 위반확률 값을 계산하는 반응 표면 방법(response surface method)을 부 최적화 문제 해결 과정 중에 도입한 연구도 진행되고 있다.[11]

그러나 기존의 신뢰도 최적설계 과정 중에 필요한 신뢰도 해석으로 인한 계산량이 상당히 크기 때문에 실제 현장에서 신뢰도 최적설계 방법을 이용할 때 한계가 생긴다. 따라서 이 문제를 해결하기 위해 많은 연구가 진행되고 있다. 본 연구에서는 정확한 신뢰도를 구하지 않고 미리 주어진 신뢰도에 해당하는 확률 제한조건의 근사적 해결을 통한 신뢰도 최적설계 수식화를 제안하고 그와 연계된 부 최적화 문제를 풀기 위한 효율적인 방법론을 개발했다. 또한 새로운 방법과 연계된 민감도 수식화도 제안했다. 문헌에 있는 신뢰도 최적설계 예제들에 적용하여 효율성과 수렴성을 검증하였다.

2. 안전 지수

설계변수의 수가 유한한 확정론적 최적설계 문제는 목적함수 $f(\mathbf{x},\mathbf{p})$ 와 제한조건 함수 $G_j(\mathbf{x},\mathbf{p})$ 로 구성되며 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\text{Minimize} \quad f(\mathbf{x},\mathbf{p}) \tag{1}$$

$$\text{Subject to} \quad G_j(\mathbf{x},\mathbf{p}) \geq 0 \qquad j=1,2,..,m \tag{2}$$

$$H(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{u}) = 0 \tag{3}$$

$$x_i^L \leq x_i \leq x_i^U \qquad i=1,2,\ldots,n$$

여기서, $\mathbf{x}$ 는 조정이 가능한 설계변수 벡터이고 $\mathbf{p}$ 는 조정이 불가능한 시스템 파라미터 벡터이다. 식 (3)은 상태방정식을 나타내고 $\mathbf{u}$ 는 상태 변수이다. x_i^L 과 x_i^U 는 각 설계변수의 하한 값과 상한 값이며 n 과 m 은 설계변수의 개수와 제한조건의 수를 의미한다. 확률 제한조건을 갖는 일반적인 신뢰도 최적설계 유형은 다음과 같다.

$$\text{Minimize} \quad f(\mathbf{x},\mathbf{p})$$

$$\text{Subject to}$$

$$\Pr[G_j(\mathbf{x},\mathbf{p}) \leq 0] \leq p_j \qquad j=1,2,\ldots,m \tag{4}$$

$$H(\mathbf{x},\mathbf{u}) = 0 \tag{5}$$

식 (4)의 의미는 제한조건을 위반할 확률이 확률 제한값 p_j 보다 작아야 함을 나타낸다. 확률 제한값은 설계자가 각 제한조건에 따라 결정해야 한다. 설계변수와 시스템 파라미터는 확률변수 $\boldsymbol{\alpha}$ 에 의하여 표현될 수 있으므로 제한조건 함수는 $\boldsymbol{\alpha}$ 의 함수로 볼 수 있다. 그러므로 제한조건 함수를 $G(\boldsymbol{\alpha})$ 로 나타내면 식 (4)는 단순히 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Pr[G_j(\boldsymbol{\alpha}) \leq 0] \leq p_j \tag{6}$$

식 (6)의 왼쪽 항에 대한 제한조건 함수의 위반확률 값을 계산하기 위하여 안전지수 β^* 를 이용하여 다음과 같은 결정론적 제한조건으로 변환시킬 수 있다.

$$1 - \Phi(\beta_j^*) \leq p_j \tag{7}$$

식 (7)에서 $\Phi(*)$ 는 누적 표준 정규 분포함수를 나타낸다. 현재 설계점에서 각 제한조건에 대한 안전지수 β^* 를 구하는 방법으로는 평균 2 차 모멘

트 방법과 불변 2 차 모멘트 방법들이 많이 쓰여지고 있지만 좀 더 효율적인 방법 개발에 대한 연구가 진행되고 있다.

2.1 1 차 신뢰도 방법

평균 2 차 모멘트 방법에서는 표준 독립 정규분포를 갖는 확률변수 평균점에서 식 (6)의 제한조건 함수를 선형화 시킨 후 평균값과 분산값은 다음과 같이 구한다.

$$\overline{G}=G(\mathbf{0}), \quad \sigma_G^2=\left\|\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right\|_{\alpha=0}^2 \tag{8}$$

그리고 제한조건의 위반확률을 구하기 위하여 정규분포를 갖는 확률변수의 선형 함수 역시 정규분포라는 조건으로부터 안전지수 β^*는 $\overline{G}/\sigma_G$로 표현된다. 평균 2 차 모멘트 방법은 선형 근사를 위한 근사점을 확률변수의 평균점으로 하기 때문에, 제한 함수 형태에 관계없이 미리 근사 점을 알 수 있으므로 간단하고 효율적이다. 그러나 평균 2 차 모멘트 방법은 두 가지의 단점이 있는데 하나는 제한조건 함수의 비선형성이 크고, 높은 수준의 신뢰도를 요하여 제한조건 함수가 원점으로부터 멀리 존재하게 되는 경우, 원점에서 선형 근사에 의하여 정의되는 함수는 실제 제한조건 함수와 많은 차이가 발생하기 때문에 정확한 확률값을 주지 못한다. 그리고 다음과 같이 제한조건 함수식을 다른 함수 형태로 표현했을 때 그 위반확률, $\Pr[(\alpha_1-\alpha_2)\le 0]$ 과 $\Pr[(1-\alpha_1/\alpha_2)\le 0]$ 은 실제로 같은 확률 값이나 평균 2 차 모멘트 방법에 의하여 계산하면 근사식의 계수가 다르기 때문에 두 확률값이 서로 다르게 되는 불변성 결여의 단점이 있다.

Hasofer[2,4] 등은 제한조건 함수의 표현 방법에 관계 없이, 같은 위반확률이 계산되는 불변 2 차 모멘트 방법을 제안하였다. 이 방법은 안전 지수 β^* 를 서로 독립적이고 표준 정규분포를 갖는 확률변수 $\boldsymbol{\alpha}$ 의 좌표계에서 원점으로부터 제한조건 위반 영역까지의 가장 짧은 거리로 정의하고, 최소점 $\boldsymbol{\alpha}^*$에서 선형화 된 함수를 사용하여 위반확률 값을 구할 수 있다. 일반적으로, 이 방법은 평균 2 차 모멘트 방법에 비해 보다 합리적이고 정확한 확률값을 계산할 수 있으나 확률조건 함수가 확률변수의 비선형일 경우, 최대 위반 가능점 $\boldsymbol{\alpha}^*$를 미리 알 수 없기 때문에 먼저 최대 위반 가능점을 구하는 다음과 같은 부 최적화 문제를 풀어야 한다.

$$\beta^* = \min_{\alpha\in\Gamma} \|\boldsymbol{\alpha}\| \tag{9}$$

$$\text{where} \quad \Gamma = \{\, \boldsymbol{\alpha} \mid G(\boldsymbol{\alpha}) \le 0 \,\}$$

최소점 $\boldsymbol{\alpha}^*$는 여러 개 존재할 수도 있으나, 구조설계에서 다루는 거의 모든 확률변수는 일반 정규분포화 할 수 있고, 분산계수(coefficient of variance)가 비교적 작은 편으로 최소화를 표현하는 식 (8)은 유일해 $\boldsymbol{\alpha}^*$ 를 갖는 것으로 가정한다. 일반적으로 이 방법을 HL-RF 방법((Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler method) 이라고 명칭한다.

3. 신뢰도 최적설계

3.1 신뢰도 최적설계 수식화

기존의 불변 2 차 모멘트 방법(AFOSM)을 이용한 신뢰도 최적설계 방법에서 만약, 위반확률이 0.00001~0.001 정도의 매우 작은 값을 갖는다면 즉, β^* 가 상당히 큰 문제가 되기 때문에 식 (8)을 그대로 사용할 경우 최적화 문제는 수치적인 면에서 불리하다. 또한 정확한 안전지수를 구한 다음, 안전지수의 상한 값과 비교해서 위반정도를 판별하기 때문에 정확한 안전지수를 구하는데 많은 노력이 들게 된다. 따라서 부 최적화 문제에서 정확한 안전지수를 구할 필요 없이 안전지수의 상한값에 해당하는 안전범위 안에서 제한조건을 만족하는 가장 작은 값을 구한 다음 그 값이 실제 제한조건을 만족하도록 최적화를 수행하는 방법을 이용함으로써 계산량을 많이 줄일 수 있다.[12] 수식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\text{Minimize} \quad f(\mathbf{x},\mathbf{p}) \tag{10}$$

$$\text{Subject to}$$

$$G_j^* \ge 0 \tag{11}$$

$$H(\overline{\mathbf{x}},\mathbf{p},\boldsymbol{\alpha}) = 0 \tag{12}$$

$$\text{where} \quad G_j^* = \min_{\alpha\in D} G_j(\boldsymbol{\alpha}) \tag{13}$$

$$D = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \|\boldsymbol{\alpha}\| = \beta_j^w\}$$

$$\beta_j^w = \Phi^{-1}(1-p_j)$$

$$x_i^L \le x_i \le x_i^U \qquad i=1,2,\ldots,n$$

3.2 부 최적화 문제 해결방법

불변 2 차 모멘트 방법을 기반으로 하는 신뢰도 최적설계 방법들에서 가장 계산 노력이 많이 드는

부분은 부 최적화 문제 해결 부분, 즉 최대 위반 가능점 탐색 부분이다. Liu[13]의 논문에서 기존의 부 최적화 문제 해결 방법들이 비교되었다. 순차적 이차 계획법(sequential quadratic programming, SQP)과 민감도 투영 방법(gradient projection method)이 우수한 결과를 보였고 그들이 제안한 HL-RF 방법도 좋은 결과를 보였다는 결론을 내렸다. 그러나 이런 방법들은 수렴성에 좋은 결과를 보였지만 계산량에 있어서는 여전히 많은 노력이 들기 때문에 HL-RF 방법이 아직도 많이 이용되고 있다. HL-RF 방법은 설계공간을 정규분포를 갖는 변수공간으로 전환한 후 다른 방법과는 달리 임의 설계점에서 제한조건의 민감도 정보만을 가지고 식 (14)와 같은 방향 벡터를 결정하고 그 방향으로 1 차원 탐색을 하여 제한조건 값이 '0' 이 되는 최대 위반 가능점을 찾는 방법으로서 비교적 적은 계산노력으로 좋은 결과를 보여주는 방법이다. 여기서 방향벡터 v^* 는 다음과 같다.

$$v^* = \left.\frac{\dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\alpha}}}{\left\|\dfrac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right\|}\right|_{\alpha^*} \tag{14}$$

본 연구에서는 제안된 부 최적화 문제를 풀기 위해 변형된 HL-RF 방법을 제안했다. HL-RF 방법은 제한조건 표면이 설계점에서 볼록한 경우 최대 위반 가능점으로 접근하지 못하고 진동하는 단점이 있기 때문에 이를 해결하기위해 기존의 HL-RF 방법과 비선형 최적설계 알고리듬을 결합하여 변형된 HL-RF 방법을 제안했다. 먼저, 기존의 HL-RF 방법처럼 식 (14)를 이용하여 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\beta^w$ 인 표면에 있는 설계점을 얻은 후 그 값을 시작점으로 설정해서 수정 가용방향 방법(modified feasible direction method, MFD)과 같은 비선형 최적설계 알고리듬을 통해 제한조건 값이 최소가 되는 설계점을 찾아냄으로써 진동 특성을 보이는 문제에서 효율을 좀더 높일 수 있다. 이 방법은 식 (15)을 이용하여 최대 위반 가능점으로 수렴하는 점들의 진동 경향을 판단하여 만약 ξ 값이 '0' 보다 작을 경우 진동하는 경우로 보고 변형된 HL-RF 방법을 이용한다.

$$\xi=(X^{k+1}-X^k)^T(X^k-X^{k-1}) \tag{15}$$

식 (15)의 X^{k+1} , X^k 을 상, 하한 값으로 정한 후 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\beta^w$ 인 표면에서 제한조건 값이 가장 작은 값을 찾는 식 (13)과 같은 부 최적화 문제를 풀 때 항상 가용영역을 탐색하면서 제한조건 경계면을 따라 해를 찾아가는 장점이 있는 수정가용방향 방법을 이용한다.

3.3 민감도 해석

전체적인 최적설계를 수행하기 위해서는 위반 확률을 구하는 부 최적화 문제의 민감도 해석이 필요하다. 부 최적화 문제는 설계변수($\mathbf{x}$), 상태변수($\mathbf{u}$), 그리고 확률변수($\boldsymbol{\alpha}$)로 이루어져 있고 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$G_j^* = \underset{\alpha}{\text{Minimize}}\ G_j(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) \tag{16}$$

$$\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0} \tag{17}$$

$$S(\boldsymbol{\alpha}) = 0 \tag{18}$$

where

$$S = \|\boldsymbol{\alpha}\| - \beta_j^w$$

$$\beta_j^w = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(1-p_j)$$

설계변수는 평균값 $\bar{\mathbf{x}}$ 에서 고정되어 있고 부 최적화 문제의 해를 $(\mathbf{u}^*,\boldsymbol{\alpha}^*)$ 라고 할 때 Kuhn-Tucker 필요조건에 의하여 다음 식이 성립한다.[8]

$$\frac{\partial G_j}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\lambda}_1^T \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \lambda_2 \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0} \tag{19}$$

$$\frac{\partial G_j}{\partial \mathbf{u}} + \boldsymbol{\lambda}_1^T \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \tag{20}$$

$$\mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\alpha}^*) = \mathbf{0} \tag{21}$$

$$S(\boldsymbol{\alpha}^*) = 0 \tag{22}$$

여기서, $\boldsymbol{\lambda}_1$와 λ_2는 각각 상태방정식과 확률 규정식에 대한 라그랑지 승수이다. 식 (21) 과 (22)의 변분량을 구하면 다음과 같다.

$$\delta\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}}\delta\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}}\delta\mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\delta\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \tag{23}$$

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\delta\boldsymbol{\alpha} = 0 \tag{24}$$

식 (19), (20)과 (23)을 이용해서 확률제한 조건식의 변분량을 구해보면 다음과 같다.

$$\delta G_j^* = \underset{\delta\alpha}{Min}\left\{\frac{\partial G_j}{\partial \mathbf{x}}\delta\mathbf{x} + \frac{\partial G_j}{\partial \mathbf{u}}\delta\mathbf{u} + \frac{\partial G_j}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\delta\boldsymbol{\alpha}\right\} \tag{25}$$

$$= \underset{\delta\alpha}{Min}\left\{\frac{\partial G_j}{\partial \mathbf{x}}\delta\mathbf{x} + \lambda_1^T\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}}\delta\mathbf{x} - \lambda_2\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\delta\boldsymbol{\alpha}\right\}$$

식 (24)를 이용하면 식 (25)의 세 번째 항은 다음과 같다.

$$\underset{\delta\alpha}{Min}\left\{-\lambda_2\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\delta\boldsymbol{\alpha}\right\} = 0 \qquad (26)$$

결국 식 (25)를 정리하면 확률 제한조건의 설계변수에 대한 민감도는 결국 식 (27)과 같다.

$$\delta G^* = \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\lambda}^T\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\mathbf{x}^*}\delta\mathbf{x} \qquad (27)$$

식 (27)의 의미는 '설계변수가 변하는 경우 확률 제한조건의 최적해 G* 가 얼마나 변하는 가'를 의미하며 설계변수 평균값에서의 민감도 값을 구하기 위해서는 부 최적화 해 x*, 즉 최대 위반 가능점이 필요한데 이 값은 제한조건 값을 계산할 때 구한 값을 이용할 수 있다.

4. 수치예제와 검토

4.1 최대 위반 가능점 탐색 예제

확률조건 해결을 위해 본 연구에서 제안한 근사방법의 수렴성을 보이기 위해 볼록한 특성을 가지는 다음과 같은 수학적 예제를 채택하였다.[15]

$$G(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 18 \qquad (28)$$

여기서 x_1, x_2 는 정규분포를 갖는 랜덤 변수로서 평균은 (10,9.9) , 표준편차는 각각 5.0 이다. 목표 안전지수는 2.22 로 확률변수를 정규화 변수로 변환시킨 후 식 (13)과 같은 부 최적화 문제를 풀었다. 푸는 방법으로는 HL-RF 방법, 순차적 이차 계획법(SQP), 본 논문에서 제안한 변형된 HL-RF 방법을 이용하고 그 결과값들을 비교했다. 기존의 HL-RF 방법은 Fig. 1 에서 보는 것처럼 함수의 볼록한 특징으로 인해 최대 위반 가능점으로 수렴하지 못하고 ⑤, ⑥ 설계점 사이에서 진동하는 특성을 보임으로써 이런 단점을 극복할 수 있는 새로운 방법이 필요하게 되었다. 계산 결과를 Table 1 에 나타내었다. Table 에서 보는 바와 같이 순차적 이차 계획법과 수정 HL-RF 방법이 진동 특성을 보이지 않았지만 수정 HL-RF 방법이 비교적 적은 계산량으로 최대 위반 가능점에 접근함을 알 수 있다.

4.2 민감도 검증 예제

3 절에서 유도한 민감도 수식 (27)을 검증하기 위해 Fig. 2 와 같은 길이 L=76.2 cm 빔의 변위에 대한 민감도를 유한 차분법과 비교했다. 설계변수는 단면적의 폭과 높이로서 빔의 최대 변위량(δ_a) 은 0.38 cm 로 설정했다. 변위 제한조건 식을 써보면 다음과 같다.[9]

$$1 - \frac{4PL^3}{Ex_1x_2^3\delta_a} \geq 0 \qquad (29)$$

식 (29)에서 E 는 탄성계수, P 는 하중이고 x_1, x_2 는 빔의 폭과 높이이다. 이 예제에서는 설계변수, 탄성계수와 하중을 정규분포를 갖는 확률변수로 가정하였다. 설계변수의 표준편차는 0.02 cm 로 설정하였고 탄성계수의 평균은 206 GPa , 표준편차는 20.6 GPa 이며 하중의 평균은 1.779 kN , 표준편차는 0.533 kN 이다. 확률 제한조건의 목표 안전지수를 3.0 으로 설정했다. 평균 설계값은 x=(1.6,2.3)

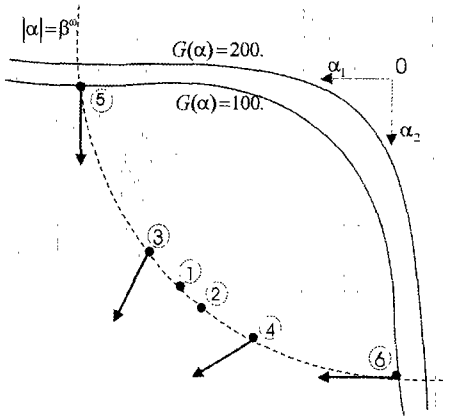

Fig. 1 Fluctuating iteration for MPP search process

Table 1 Comparison of methods for MPP search problems

	Exact HL-RF Method	SQP Method	Modified HL-RF Method
MPP Optimum Design	Not converged	$\begin{pmatrix}2.065\\2.137\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2.154\\2.047\end{pmatrix}$
Constraint Value G*		0.5802	0.587
No. of Function Evaluations		31	7
No. of Gradient Evaluations		2	1
No. of Iterations		7	4

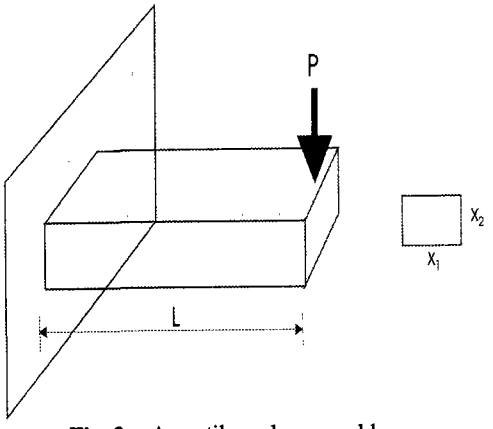

Fig. 2 A cantilever beam problem

Table 2 Sensitivities compared with the finite difference results for the cantilever beam problem

	x_1	x_2
ΔG^*	-1.029E-3	-2.945E-3
$\delta_1 G^*$	-1.030E-3	-2.947E-3
$\Delta G^* / \delta_1 G^*$	99.91 %	99.93 %

이고 값을 고정시킨 후 부 최적화 문제를 풀게 된다. 설계변수의 유한 차분량은 평균 설계값의 0.1 % 로 설정했다. Table 2 에서 보듯이 식 (27)과 같은 민감도 수식을 이용한 부 최적화 문제의 해에서의 제한조건 값의 변동량($\delta_1 G^*$)과 유한 차분법을 이용해서 구한 부 최적화 문제의 제한조건 값의 변동량(ΔG^*)이 거의 차이가 없음을 알 수 있다.

4.3 신뢰도 최적설계 예제

4.3.1 3 요소 트러스 예제

신뢰도 최적설계의 첫번째 예제로서 3 요소 트러스를 선택하였다. 목적함수는 중량이고 설계변수는 트러스의 단면적으로서 1 번과 3 번 요소의 단면적은 동일하다는 가정 하에 모두 2 개이다. 하중은 Fig. 3 처럼 45^0 의 방향으로 작용하고 있다. 하중이 작용하는 절점의 변위와 각 요소의 응력을 제한하였다. 변위 상한값(δ_a)은 0.5 cm, 응력 상한값(σ_a)은 103.4 MPa 로 정하였다. 각 제한조건은 확률제한조건이며 목표 안전지수를 3.0 으로 설정하였다.

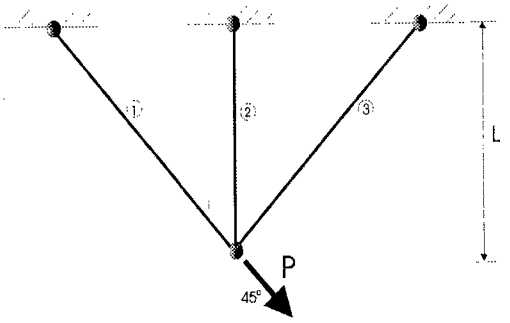

Fig. 3 A three bar truss problem

Table 3 Sensitivities compared with the finite difference results for the three bar truss problem

	x_1	x_2
ΔG^*	-10.088E-4	-1.8138E-4
$\delta_1 G^*$	-9.4961E-4	-1.8013E-4
$\Delta G^* / \delta_1 G^*$	106.22 %	100.69 %

Minimize $L(2\sqrt{2}x_1 + x_2)$ (30)

Subject to

$$1 - \frac{PL}{Ex_1\delta_a} \geq 0$$

$$1 - \frac{P}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{(x_1 + \sqrt{2}x_2)}\right)\frac{1}{\sigma_a} \geq 0$$

$$1 - \left(\frac{P}{(x_1 + \sqrt{2}x_2)}\right)\frac{1}{\sigma_a} \geq 0$$

위 식에서 E 는 탄성계수, P 는 하중이고 L 은 25.4 cm 이며 x_1 과 x_2 는 트러스의 단면적이다. 이 예제에서는 설계변수, 탄성계수와 하중을 정규분포를 갖는 확률변수로 가정하였다. 설계변수의 표준편차는 0.04 cm 로 설정하였고 탄성계수의 평균은 68.95 GPa, 표준편차는 3.44 GPa 이며 하중의 평균은 88.96 kN, 표준편차는 4.44 kN 이다. 1 번 요소의 응력 제한조건에 대한 민감도를 유한 차분법과 비교한 결과를 Table 3 에 나타냈다. 또한 부 최적화 문제를 푸는 방법을 달리하며 최적설계한 결과를 Table 4 에 나타내었다. 역시 세 방법 모두 비슷한 목적함수와 설계값을 보였지만 확률 제한조건의 부 최적화 문제를 풀 때 요구되는 평균 함

Table 4 Comparison of sub-optimization problem methods for truss reliability problem

	Exact HL-RF Method	SQP Method	Modified HL-RF Method
Reliability Optimum Design (cm^2)	$\begin{pmatrix}7.37\\3.69\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7.36\\3.65\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}7.34\\3.71\end{pmatrix}$
Object Function (cm^3)	6.23	6.21	6.22
No. of Iterations	4	4	3
No. of Function Evaluations			
G_1	4	10	8
G_2	4	23	9
G_3	2	14	12

수 계산량이 HL-RF 방법이 가장 적었고 수정 HL-RF 방법, 순차적 이차 계획 방법(SQP) 순으로 계산량이 적었다. 따라서 볼록한 특성이 없는 제한조건 일 경우 HL-RF 방법이 적은 계산량으로 부 최적화 문제를 해결하여 좋은 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

4.3.2 수학적 예제

부 최적화 문제를 풀 때 진동특성이 보이는 예제로서 다음과 같은 수학적 예제를 다뤘다.

$$\text{Minimize} \quad x_1 + x_2 \tag{31}$$

Subject to

$$1 - \frac{3x_1^2 + 4x_2}{48} \geq 0$$

$$1 - \frac{10x_2^3 - x_1^2 x_2 - 2x_1}{10} \geq 0$$

$$1 - \frac{80}{x_1^2 + 8x_2 + 5} \geq 0$$

각 확률 제한조건의 목표 안전지수를 2.0 으로 설정하였고 설계변수는 정규분포를 갖는 확률변수로 설정하여 그 표준편차는 각각 0.5, 0.4 이다. 설계영역은 Fig. 4 에 나타냈고 그 결과를 Table 5 에 표시했는데 세 가지 방법은 트러스 예제와 동일하다. 일반적인 HL-RF 방법을 이용해서 최적설계한 결과는 해로 수렴하지 못하는 결과를 보였는데 이는 첫번째와 두 번째 제한조건의 볼록한 함수 특성으로 인한 것이다. 본 연구에서 제안한 방법으로 설계를 하였을 경우 기존의 HL-RF 방법의 진동특성을 안 보이면서 적은 계산량으로 수렴함

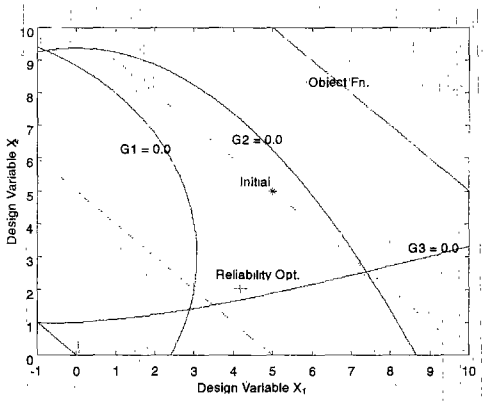

Fig. 4 A convergence test problem of reliability optimization

Table 5 Comparison of sub-optimization problem methods for mathematical reliability problem

	Exact HL-RF Method	SQP Method	Modified HL-RF Method
Reliability Optimum Design	Not converged	$\begin{pmatrix}4.55\\2.61\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4.14\\2.08\end{pmatrix}$
Object Function		7.162	6.229
No. of Iterations		4	3
No. of Function Evaluations			
G_1		17	4
G_2		29	5
G_3		18	3

을 알 수 있다. 수정 HL-RF 방법이 순차적 이차 계획 방법(SQP) 보다 적은 계산량을 필요로 하였다.

일반적으로 확률 제한조건의 부 최적화 문제를 푸는 방법으로 HL-RF 방법을 많이 이용하고 있지만 제한조건의 민감도 정보를 이용하는 방법의 특성상 설계점에서 볼록한 특성을 갖는 문제의 경우 진동하게 되어 수렴성이 나빠지게 된다. 예제를 통해서 알 수 있듯이 제한조건의 함수특성이 좋을 경우 HL-RF 방법이 좋은 수렴을 보였지만 볼록한 성질을 갖는 함수의 경우 진동하는 특성이 존재하므로 이를 해결하기 위한 방법이 필요하게 되었다. 본 연구에서는 부 최적화 문제를 풀 때 진동특성이 발생하면 수정 가용방향 방법과 같은 비선형 알고리듬을 이용하여 해결하는 방법을 제안했고 수렴성을 좋게 하기위해 평균점에서 먼저 HL-RF

방법을 수행하여 목표 안전지수의 경계면에 존재하는 설계값을 구한 후 이를 비선형 최적설계 알고리듬의 초기값으로 이용하였다.

5. 결 론

신뢰도 최적설계 방법이 실제 현장에서 이용되기 위해서는 확률 제한조건을 푸는 계산량을 줄이면서 안정된 수렴특성을 갖는 알고리듬이 필요하다. 본 연구에서는 신뢰도 최적설계 방법의 개선을 위해 정확한 안전지수를 구하는 방법 대신 목표 안전지수를 설정하여 신뢰도 최적설계를 수행하는 방법과 설정된 안전지수에 해당하는 부 최적화 문제를 풀 때 기존방법이 보일 수 있는 진동특성을 해결할 수 있는 새로운 방법을 제안했다. 또한 새로운 방법론에 맞는 민감도 수식을 유도했다.

예제로서 빔과 트러스의 변위와 응력제한조건에 대한 민감도 수식을 검증하였고 트러스 신뢰도 최적설계 예제와 진동특성을 갖는 수학적 예제를 통해 본 연구에서 제안한 방법과 기존 방법의 결과를 비교, 검토했다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계 신기술 연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

(1) Melchers, R. E., 1987, *Structural Reliability Analysis and Prediction*, Ellis Horwood Limited.

(2) Hasofer, A. M. and Lind, N. C., 1974, "Exact and Invariant Second Moment Code Format," *J. Eng. Mech., ASCE*, Vol. 100, pp.111~121.

(3) 최진호, 이세정, 최동훈, 1998, "불확정성을 고려한 기계 시스템의 공차해석 및 신뢰도 해석에 관한 연구," 대한기계학회논문집 A, 제 22 권, 제 1 호, pp. 215~226.

(4) Rackwitz, R. and Fiessler, B., 1978, "Structural Reliability Under Combined Random Load Sequences," *Computers & Structures*, Vol. 9, pp.489~494.

(5) Frangopol, D. M., 1985, "Structural Optimization Using Reliability Concepts," *J. Structural Eng., ASCE*, Vol. 111, pp.2288~2301.

(6) Nikolaidis, E. and Burdisso, R., 1988, "Reliability Based Optimization: A Safety Index Approach," *Computers & Structures*, Vol. 28, pp.781~788.

(7) Yang, J. S. and Nikolaidis, E., 1990, "Design of Aircraft Wings Subjected to Gust Loads: A Safety Index Based Approach," *AIAA* , Vol. 29, pp.804~812.

(8) Kwak, B. M. and Lee, T. W., 1987, "A Reliability-Based Optimal Design Using Advanced First Order Second Moment Method," *Mech. Struct. & Mach.*, Vol. 15, No. 4, pp. 523~542.

(9) Lee, J. H. and Kwak, B. M., 1995, "Reliability Based Structural Optimal Design Using Neumann Expansion Technique," *Computers & Structures*, Vol. 55, No. 2, pp. 287~296.

(10) Grandhi, R. V. and Wang, L., 1998, "Reliability-Based Structural Optimization Using Improved Two-Point Adaptive Nonlinear Approximations," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 29, pp. 35~48

(11) Bucher C. G. and Bourgund U., 1990, "A Fast and Efficient Response Surface Approach for Structural Reliability Problems," *Structural Safety,* Vol. 7, pp. 57~66.

(12) 정도현, 이병채, 2000, "확률조건의 근사화를 통한 효율적인 강건최적설계 기법의 개발," 대한기계학회논문집 A, 제 24 권, 제 12 호, pp. 3053~3060.

(13) Liu, P. L. and Kiureghian, A. D., 1990, " Optimization Algorithms for Structural Reliabilty," *Structural Safety*, Vol. 9, pp. 161~177.

(14) Bjerager, P. and Krenk S., 1989, "Parametric Sensitivity in First Order Reliability Index," *J. of Structural Eng., ASCE*, Vol. 115, No. 7, pp. 1577~1582.

(15) Wang, L. and Grandhi, R. V., 1994, "Efficient Safety Index Calculation for Structural Reliability Analysis," *Computers & Structures*, Vol. 52, No. 1, pp. 103~111.