

쿨롬 법칙과 영상법을 이용한 와전류 브레이크의 제동토크 해석

論 文

50B-9-1

The Braking Torque Analysis of Eddy Current Brake with the Use of Coulomb's law and the Method of Image

李 甲 振* · 朴 起 煥**
(Kapjin Lee · Kyihwan Park)

Abstract - Since the eddy current problem usually depends on the geometry of the moving conductive sheet and the shape of the pole projection area, there is no general method to find out its analytical solution. The analysis of the eddy current in a rotating disk is performed in the case of time-invariant field to find its analytical solution. As a method to solve the eddy current problem, the concept of the Coulomb charge and image method are proposed with the consideration of the boundary condition. Firstly, the line charge is obtained from the volume charge generated in the rotating disk and Coulomb's law is applied. Secondly, the finite disk radius is considered by introducing an imaginary eddy current to satisfy the boundary condition that the radial component of the eddy current is zero at the edge of the rotating disk. Thirdly, the braking torque is calculated by applying Lorentz force law. Finally, the computed braking torque is compared with the measured one. As a result, it can be said that the proposed model presents fairly accurate results in a low angular velocity range although a large error is observed as the angular velocity of the disk increases.

Key Words : Conformal mapping, Coulomb's law, Eddy current brake, eddy current distribution and method of image

1. 서 론

시불변 자속(time-invariant magnetic flux)이 회전 도체 판을 관통하면 도체 내부에 와전류가 유도된다. 로렌츠(Lorentz) 힘의 법칙에 의하면 유도된 와전류와 자속 사이의 상호 작용에 의해 제동 토크가 발생한다. 지금까지 많은 사람들이 유도된 와전류의 분포와 제동 토크에 대한 해석적 모델을 제공하기 위해 여러가지 해석적 방법들을 제안하였다 [1]-[12].

1987년, Wiederick, Gauthier, Campbell 과 Rochon[7]은 직진하는 도체 판의 사각형 자속 투영면(rectangular pole projection area) 내의 와전류 밀도를 계산하였다. 계산상의 편의를 위해 도체 판 너비의 길이가 무한하다고 가정하였다. 자속 투영면 양단에서 발생하는 기전력(electromotive force)을 패러데이 법칙(Faraday's law)을 이용하여 계산하였으며 투영 면을 상단면으로 하는 육면체 폐곡면의 내부 및 외부를 등가 저항으로 모델하였다. 또한, 기전력과 등가 저항을 이용하여 Ohm의 법칙에 의해 와전류 밀도를 근사적으로 계산하였다.

1988년, Heald[8]는 Wiederick[7]과 동일한 시스템 및 가정 하에서 와전류 밀도 분포를 구하였다. 자속 투영면의 가장자

리에서 표면 전하 밀도(surface charge density)를 유도하였으며 쿨롬(Coulomb) 법칙을 이용하여 도체판에서의 전계의 세기(electric field intensity)를 계산하였다.

이 논문에서는 유한한 반경을 가지는 회전 도체 디스크에서의 와전류 밀도 분포와 제동 토크에 대한 해석을 수행한다. Heald[8]가 제안한 방법을 기초로 하고 등각 사상법(conformal mapping method)과 영상법(image method)을 사용하여 도체 디스크의 반경이 유한하다는 경계 조건을 만족시키는 와전류 밀도 분포를 구한다.

첫 번째 단계로 회전 도체 디스크의 반경이 무한하다고 가정하였을 경우의 와전류 밀도를 구하기 위해 Heald[8]가 제안한 방법을 이용한다. 전계의 세기가 자속 투영면 내부에서는 일정하고 자속 투영면 외부에서는 무시할 만하다는 가정 하에서 패러데이 법칙을 이용하여 전계의 세기를 계산한다. 전계의 세기를 구한 다음, 가우스 법칙(Gauss' law)을 이용하여 체적 전하 밀도(volume charge density)를 계산한다. 체적 전하로부터 선 전하 밀도(line charge density)를 유도한 뒤에, 쿨롬 법칙[12]을 이용하여 자속 투영면 내부와 외부에서 전계의 세기 분포를 계산한다. 전계의 세기 분포와 도전율을 알고 있으므로 옴의 법칙(Ohm's law)을 이용하면 와전류 밀도 분포(eddy current density distribution)를 계산하며 이를 일차 와전류 밀도 분포(primary eddy current density distribution)라고 한다.

두 번째 단계로 가상 와전류 밀도(imaginary eddy current density)를 도입함으로써 디스크의 반경이 유한하기 때문에 와전류 밀도 분포의 반경 방향 성분이 회전 디스크의 가장자리에서 영이라는 경계 조건을 고려한다. 등각 사상법을 이용

* 正 會 員 : 光州科學技術院 機電工學科 博士課程

** 正 會 員 : 光州科學技術院 機電工學科 副教授

接受日字 : 2000年 12月 20日

最終完了 : 2001年 7월 11日

하여 일차 와전류 밀도 분포를 변환시킨 다음에 영상법을 이용하여 일차 와전류 밀도 분포와 대칭인 가상 와전류 밀도 분포를 계산한다. 일차 와전류 밀도에서 가상 와전류 밀도를 빼면 순수 와전류 밀도 분포(net eddy current density distribution)를 구할 수 있다.

마지막으로 로렌츠 힘의 법칙을 이용하여 제동 토크를 계산한다. 제동 토크식을 해석적으로 적분하는 것이 어렵기 때문에 수치 해석적으로 적분하여 제동 토크를 계산한다. 또한, 계산된 제동 토크값을 실험 결과와 비교함으로써 와전류 해석 방법의 정확성을 검증한다.

2. 와전류 해석

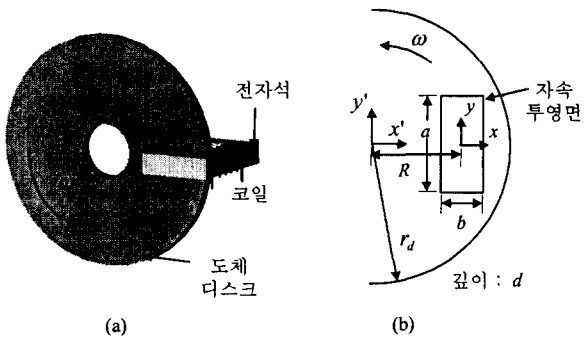


그림 1. 회전 디스크와 전자석의 구성도
Fig. 1 Configuration of the rotating conductive disk and electromagnet.

그림 1은 전자석으로부터 나오는 자기장(magnetic field)이 관통하는 회전 도체 디스크를 나타내며 제동토크 해석을 위한 대상체이다. a 와 b 는 각각 전자석의 사각형 단면의 너비와 반경방향 길이를 나타낸다. r_d , R 과 d 는 각각 디스크의 반경, 사각형 단면의 중심에서 디스크 중심까지의 거리, 그리고 디스크 두께를 나타낸다. 직류 전류가 전자석에 감겨 있는 코일에 인가된다. 도체 디스크는 반시계 방향으로 일정 회전 속도 ω 로 회전한다. 공극의 중심에 있는 고정 좌표계 (xy 좌표)의 변수들에는 '을 표시하지 않고 회전 디스크의 중심에 있는 이동 좌표계 ($x'y'$ 좌표)에 있는 변수들에는 '을 표시한다.

그림 2의 \mathbf{r} 과 \mathbf{r}' 은 고정 좌표계와 이동 좌표계로부터 점 P 까지의 변위 벡터이다. \mathbf{v} 는 이동 좌표계의 점 P 에서의 속도 벡터이고 그 크기는 $r'\omega$ 이다. 그림 2로부터 $y' = r' \sin \phi'$ 과 $R+x = r' \cos \phi'$ 인 관계를 이용하면 고정 좌표계에서의 속도 벡터 성분을 식(1)과 식(2)로 표시할 수 있다.

$$v_x = v \sin \phi' = \omega r' \sin \phi' = \omega y \quad (1)$$

$$v_y = v \cos \phi' = \omega r' \cos \phi' = \omega(R+x) \quad (2)$$

고정 좌표계의 점 P 에서의 속도 벡터 \mathbf{v} 는 $-v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j}$ 이고 \mathbf{i} 와 \mathbf{j} 는 각각 x 와 y 방향의 단위 벡터이다.

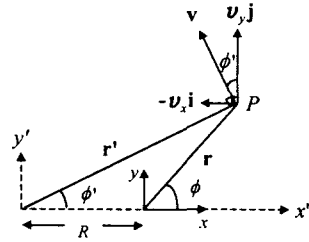


그림 2 점 P에서의 위치 및 속도 벡터.
Fig. 2 Representation of the position and velocity vectors at P.

쿨롬 법칙[12]을 이용하여 전계의 세기 \mathbf{E} 를 계산하기 위해 쿨롬 전하의 개념을 도입한다. 이를 위해 \mathbf{E} 가 자속 투영면 내부에서는 일정한 값을 가지며 자속 투영면 외부에서는 \mathbf{E} 를 무시할 수 있다고 가정한다. 도체 디스크의 회전 각속도를 선형 속도 성분 v_x, v_y 로 분리할 수 있으므로 각각의 속도 성분에 대해 별도의 쿨롬 전하가 발생한다고 할 수 있다. 그림 3에서 볼 수 있듯이 y 방향의 디스크 속도인 v_y 에 대해 Faraday 법칙을 식(3)과 같이 표현할 수 있다.

$$\int_{-b/2}^{b/2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (3)$$

여기서 s 는 경로 c 에 의해 둘러 쌓이는 면적을 나타낸다. \mathbf{B} 는 z 축 성분만 존재하며 $B_z \mathbf{k}$ 로 표시할 수 있다. 경로 c 를 x 방향에 평행하도록 선택하면 \mathbf{E} 의 x 방향 성분 E_x 를 식(4)와 같이 얻을 수 있다.

$$E_x = -\frac{1}{b} \frac{d}{dt} \{B_z b (\frac{a}{2} - y)\} = B_z v_y \quad (4)$$

그림 3의 $x = -b/2$ 에 있는 검사 체적 1에서의 체적 전하 밀도 ρ_{vx} -를 이용하면 가우스 법칙을 식(5)와 같이 표시할 수 있다.

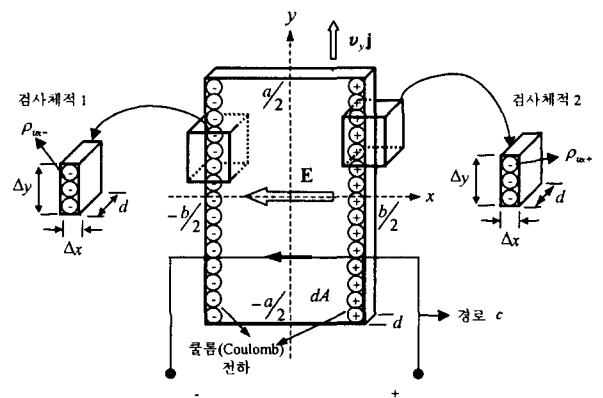


그림 3 자속 투영면의 가장자리에서의 체적 전하 밀도 분포.

Fig. 3 The volume charge density distribution at the edge of the pole projection area.

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \rho_{vx} \Delta x \Delta y \quad (5)$$

여기서 s 는 체적 $\Delta x \Delta y d$ 를 감싸는 폐곡면이다. 식(5)의 좌변이 식(6)과 같이 표시되므로

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = -\epsilon E_x \Delta y, \quad (6)$$

식(5)와 (6)의 우변을 등가시키면 체적 전하 밀도 ρ_{vx} -를 식(7)로 표시할 수 있다.

$$\rho_{vx} = -\epsilon B_z \omega (R - b/2) / \Delta x. \quad (7)$$

$x = b/2$ 에 있는 검사 체적 2에서 식(5)의 좌변을 식(8)로 표시할 수 있으므로

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \epsilon E_x \Delta y, \quad (8)$$

식(5)와 (8)의 우변을 등가시키면 검사 체적 2에서의 체적 전하 밀도 ρ_{vx+} 를 식(9)로 표시할 수 있다.

$$\rho_{vx+} = \epsilon B_z \omega (R + b/2) / \Delta x. \quad (9)$$

x 방향의 디스크 속도인 v_x 에 대해 적분 경로를 y 방향에 평행하도록 선택한다. 앞에서와 같은 과정을 거치면 $y = \mp a/2$ 에서의 체적 전하 밀도 $\rho_{vy\mp}$ 를 식(10)과 같이 얻을 수 있다.

$$\rho_{vy\mp} = \mp \epsilon B_z \omega y / \Delta y. \quad (10)$$

앞에서 구한 체적 전하 밀도를 이용하여 그림 4의 자속 투영면으로 둘러 쌓인 체적의 옆면에서의 표면 전하 밀도를 정의한다. 표면 전하 밀도의 단위는 C/m^2 이다. 그림 4에서

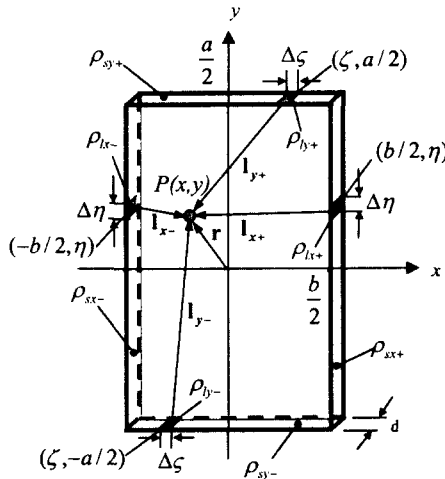


그림 4 표면 및 선 전하 밀도 분포.

Fig. 4 The surface and the line charge distributions.

볼 수 있듯이 ρ_{sx-} 를 $x = -b/2$ 에 있는 yz 평면에 평행한 평면에서의 표면 전하 밀도라고 하면 식 (11)과 같이 표시할 수 있다.

$$\rho_{sx-} = \rho_{vx-} \Delta x = -\epsilon B_z \omega (R - b/2). \quad (11)$$

같은 방식으로, $x = b/2$ 에 있는 yz 평면에 평행한 평면에서의 표면 전하 밀도 ρ_{sx+} 와 $y = \pm a/2$ 에 있는 xz 평

면에서의 표면 전하 밀도 $\rho_{sy\pm}$ 를 각각 식(12)-(14)와 같이 구할 수 있다.

$$\rho_{sx+} = \epsilon \omega (R + b/2) B_z \quad (12)$$

$$\rho_{sy+} = \epsilon \omega B_z a/2 \quad (13)$$

$$\rho_{sy-} = \epsilon \omega B_z a/2 \quad (14)$$

표면 전하 밀도를 이용하여 자속 투영면의 가장자리에서의 선 전하 밀도(line charge density)를 정의한다. 선 전하 밀도의 단위는 C/m 이다. 그림 4에서 볼 수 있듯이 점 $(b/2, \eta), (-b/2, \eta), (\zeta, a/2)$ 와 $(\zeta, -a/2)$ 에서 선 전하 밀도를 $\rho_{lx+}, \rho_{lx-}, \rho_{ly+}$ 와 ρ_{ly-} 라고 정의하면 식(11)-(14)에 의해 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\rho_{lx+} = \epsilon \omega (R + \frac{b}{2}) B_z \Delta \eta \quad (15)$$

$$\rho_{lx-} = -\epsilon \omega (R - \frac{b}{2}) B_z \Delta \eta \quad (16)$$

$$\rho_{ly+} = \epsilon \omega \frac{a}{2} B_z \Delta \zeta \quad (17)$$

$$\rho_{ly-} = \epsilon \omega \frac{a}{2} B_z \Delta \zeta \quad (18)$$

여기서 $\Delta \zeta$ 와 $\Delta \eta$ 는 xy 좌표계에서의 미소 길이이다.

$\mathbf{l}_{x+}, \mathbf{l}_{x-}, \mathbf{l}_{y+}$ 와 \mathbf{l}_{y-} 가 각각 점 $(b/2, \eta), (-b/2, \eta), (\zeta, a/2)$,와 $(\zeta, -a/2)$ 에서 임의의 점 $P(x, y)$ 까지의 변위 벡터라고 하면 선 전하 밀도에 의해 점 P 에서 발생하는 전기장의 세기[12]는 식(19)-(22)와 같다.

$$\mathbf{E}_{x+} = \int \frac{\rho_{lx+}}{2\pi\epsilon} \frac{\mathbf{l}_{x+}}{|\mathbf{l}_{x+}|^2} \quad (19)$$

$$\mathbf{E}_{x-} = \int \frac{\rho_{lx-}}{2\pi\epsilon} \frac{\mathbf{l}_{x-}}{|\mathbf{l}_{x-}|^2} \quad (20)$$

$$\mathbf{E}_{y+} = \int \frac{\rho_{ly+}}{2\pi\epsilon} \frac{\mathbf{l}_{y+}}{|\mathbf{l}_{y+}|^2} \quad (21)$$

$$\mathbf{E}_{y-} = \int \frac{\rho_{ly-}}{2\pi\epsilon} \frac{\mathbf{l}_{y-}}{|\mathbf{l}_{y-}|^2} \quad (22)$$

중첩의 원리를 이용하면 총 전기장의 세기 \mathbf{E} 는 식 (23)과 같다.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{x+} + \mathbf{E}_{x-} + \mathbf{E}_{y+} + \mathbf{E}_{y-}. \quad (23)$$

식(19)-(22)를 전개하면 다음과 같다.

$$\mathbf{E}_{x+} = \frac{\omega B_z}{2\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \left\{ \frac{(R + b/2)(x - b/2)}{(x - b/2)^2 + (y - \eta)^2} \mathbf{i} + \frac{(R + b/2)(y - \eta)}{(x - b/2)^2 + (y - \eta)^2} \mathbf{j} \right\} d\eta \quad (24)$$

$$\mathbf{E}_{x-} = -\frac{\omega B_z}{2\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \left\{ \frac{(R - b/2)(x + b/2)}{(x + b/2)^2 + (y - \eta)^2} \mathbf{i} + \frac{(R - b/2)(y - \eta)}{(x + b/2)^2 + (y - \eta)^2} \mathbf{j} \right\} d\eta \quad (25)$$

$$\mathbf{E}_{y+} = \frac{\omega B_z}{2\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ \frac{a/2(x - \zeta)}{(x - \zeta)^2 + (y - a/2)^2} \mathbf{i} + \frac{a/2(y - a/2)}{(x - \zeta)^2 + (y - a/2)^2} \mathbf{j} \right\} d\zeta \quad (26)$$

$$\mathbf{E}_{y+} = \frac{\omega B_z}{2\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ \frac{a/2(x-\zeta)}{(x-\zeta)^2 + (y+a/2)^2} \mathbf{i} + \frac{a/2(y+a/2)}{(x-\zeta)^2 + (y+a/2)^2} \mathbf{j} \right\} d\zeta \quad (27)$$

총 전계의 세기 \mathbf{E} 는 $E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j}$ 로 표시할 수 있다. E_x 와 E_y 는 각각 식(24)-(27) 의 x 와 y 성분의 합이며 E_x 와 E_y 는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$E_x = \frac{\omega B_z}{4\pi} \left[-(2R+b) \tan^{-1} \frac{2y-a}{2x-b} + (2R-b) \tan^{-1} \frac{2y-a}{2x+b} + (2R+b) \tan^{-1} \left(\frac{2y+a}{2x-b} \right) - (2R-b) \tan^{-1} \frac{2y+a}{2x+b} + \frac{a}{2} \ln \frac{\{(2x+b)^2 + (2y-a)^2\}}{\{(2x-b)^2 + (2y-a)^2\}} + \frac{a}{2} \ln \frac{\{(2x+b)^2 + (2y+a)^2\}}{\{(2x-b)^2 + (2y+a)^2\}} \right] \quad (28)$$

$$E_y = -\frac{\omega B_z}{8\pi} \left[b \ln \frac{\{(2x-b)^2 + (2y-a)^2\}}{\{(2x-b)^2 + (2y+a)^2\}} + b \ln \frac{\{(2x+b)^2 + (2y-a)^2\}}{\{(2x+b)^2 + (2y+a)^2\}} + 2R \ln \frac{\{(2x-b)^2 + (2y-a)^2\}}{\{(2x+b)^2 + (2y-a)^2\}} + 2R \ln \frac{\{(2x+b)^2 + (2y+a)^2\}}{\{(2x-b)^2 + (2y+a)^2\}} + 2a \left(\tan^{-1} \frac{2x+b}{2y-a} + \tan^{-1} \frac{2x+b}{2y+a} - \tan^{-1} \frac{2x-b}{2y-a} - \tan^{-1} \frac{2x-b}{2y+a} \right) \right] \quad (29)$$

전계의 세기를 구하였으므로 식(30)의[8] 관계를 이용하여 디스크에 고정된 이동 좌표계 상에서 표현되는 와전류 밀도 \mathbf{J}' 을 구할 수 있다.

$$\mathbf{J}' = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (30)$$

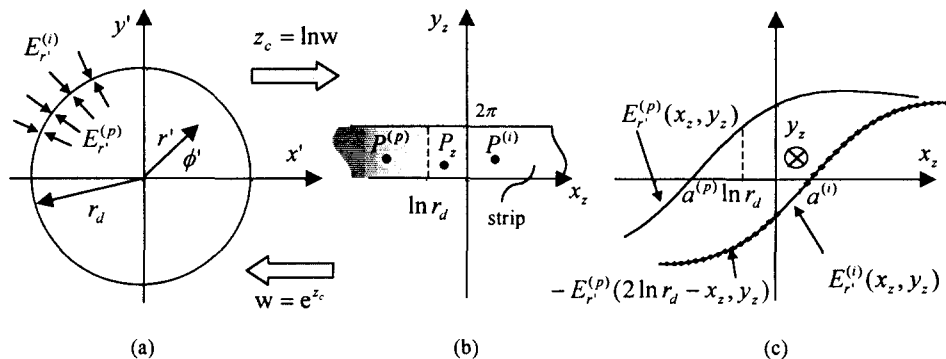


그림 5. 변환 관계 (a) w 평면 (b) z_c 평면 (c) $x_z = \ln r_d$ 인 축 중심을 기준으로 일차 및 가상 와전류 밀도의 대칭성.

Fig. 5 Representation of the relation between (a) w -plane and (b) z_c -plane, and (c) symmetric property of the primary and the imaginary eddy current densities about the axis of $x_z = \ln r_d$

식(1),(2),(28)-(30) 과 $\mathbf{J}' = \mathbf{J}[13]$ 라는 관계로부터 고정 좌표계의 자속 투영면 내부에서 와전류 밀도 성분을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$J_x = \sigma (E_x + \omega(R+x) B_z) \quad (31)$$

$$J_y = \sigma (E_y + \omega y B_z) . \quad (32)$$

자속투영면 외부에서 B_z 는 무시할 수 있으므로 자속 투영면 외부에서의 와전류 밀도는 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 로 나타낼 수 있다.

위의 해석 결과는 디스크 반경이 무한대라는 가정 하에서 수행되었으나 실제 디스크의 반경은 유한하므로 디스크의 가장 자리에서 와전류 밀도의 반경 방향 성분이 영이라는 경계 조건을 고려해야 한다. 식(31)과 (32)의 와전류 밀도 값이 이러한 경계 조건을 고려하지 않고 얻은 결과라는 것을 명시하기 위해 경계 조건을 고려하지 않고 계산한 와전류 밀도를 $J_x^{(1)}, J_y^{(1)}$ 로 표시하고 일차 와전류 밀도라고 정의한다.

경계 조건을 고려한 와전류 밀도를 구하기 위해 지금까지 직각 좌표계에서 계산하던 물리량들을 원통 좌표계로 옮긴다. 그림 2로부터 $x' = r' \cos \phi'$ 이고 $y' = r' \sin \phi'$ 라는 것을 알 수 있으므로 고정 좌표계와 이동 좌표계 사이의 관계를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x = x' - R = r' \cos \phi' - R \quad (33)$$

$$y = y' = r' \sin \phi' . \quad (34)$$

식(33)과 (34)를 이용하여 식(31)과 (32)를 원통 좌표계로 변환하면 일차 와전류 밀도의 반경 방향 성분 J_r' 을 식(35)로 표시할 수 있다.

$$J_r'^{(1)}(r', \phi') = J_x^{(1)} \cos \phi' + J_y^{(1)} \sin \phi' . \quad (35)$$

식(35)의 $J_r'^{(1)}(r', \phi')$ 을 계산해 보면 디스크의 가장자리에서 와전류 밀도의 반경 방향 성분이 영이 아니라는 것을 알 수 있다. 이러한 현상은 와전류가 디스크 외부로 흘러 나간다는 것을 의미하며 사실이 아님을 알 수 있다. 이러한 문제를 풀기 위해 순수 와전류 밀도가 경계 조건을 만족시킬 수 있도록 가상 와전류 밀도 $J_r'^{(2)}$ 을 도입한다. 일차 와전류 밀도

와 가상 와전류 밀도의 차이로 정의되는 순 와전류 밀도는 디스크 가장자리인 $r' = r_d$ 에서 다음의 식을 만족해야한다.

$$J_r(r_d, \phi') = J_r^{(1)}(r_d, \phi') - J_r^{(2)}(r_d, \phi') = 0. \quad (36)$$

가상 와전류 밀도 분포를 구하기 위한 과정이 그림 5에 도식화되어 있다. 이동 좌표계의 모든 점들을 복소 변수 (complex variable)로 표시하면 식(37)과 같다.

$$w = r' e^{i\phi'}. \quad (37)$$

등각 사상법을 이용하기 위해 복소 평면 z_c 를 $\ln w$ 로 정의하면 식(38)과 같다.

$$z_c = \ln w = \ln r' + \phi' i = x_2 + y_2 i. \quad (38)$$

그림 5(a)에서 $0 \leq r' \leq r_d$ 와 $0 \leq \phi' \leq 2\pi$ 를 만족하는 모든 점들은 그림 5(b)의 음영 영역으로 사상된다. 다시 말하면 그림 5(a)의 원 내부가 그림 5(b)의 음영 영역으로 사상되고 그림 5(a)의 반경이 r_d 인 원은 $x_2 = \ln r_d$ 인 점선에 해당된다. 그림 5(b)의 점선을 중심으로 띠(strip)가 대칭이므로 복소 평면 z_c 에서 원 안의 모든 점들은 원 밖의 모든 점들에 대해 대칭이라고 말할 수 있다. 그림 5(c)에서 나타나듯이 복소 평면 z_c 에서 $x_2 = \ln r_d$ 인 축을 중심으로 가상 와전류 밀도 분포가 일차 와전류 밀도 분포에 대칭이라고 가정하면 식(39)와 같이 $J_r^{(1)}$ 을 이용하여 $J_r^{(2)}$ 을 표시할 수 있다.

$$J_r^{(2)}(x_2, y_2) = J_r^{(1)}(2 \ln r_d - x_2, y_2). \quad (39)$$

식(38)을 이용하여 점 $(2 \ln r_d - x_2, y_2)$ 를 다시 복소 평면 w 로 사상하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$w = \frac{r_d^2}{r'} e^{i\phi'}. \quad (40)$$

식(39)와 (40)은 임의의 점 (r', ϕ') 에서의 가상 와전류 밀도가 점 $(\frac{r_d^2}{r'}, \phi')$ 에서의 일차 와전류 밀도와 같다는 것을 의미하며 식(41)로 표현할 수 있다.

$$J_r^{(2)}(r', \phi') = J_r^{(1)}(\frac{r_d^2}{r'}, \phi'). \quad (41)$$

그러므로 식(36)에 의해 순 와전류 밀도는 다음과 같이 표시된다.

표 1 매개 변수

Table 1 Parameters.

명칭	변수명	값	단위
자속 투영면의 너비	a	20	mm
자속 투영면의 반경 방향 길이	b	20	mm
공극의 길이	l_g	5	mm
디스크의 반경	r_d	50	mm
디스크의 두께	d	3	mm
디스크의 도전율	σ	3.57×10^7	$1/\Omega m$
자속 투영면 중심에서 디스크 중심까지의 거리	R	32.3	mm
인가된 자속밀도	B_z	0.3	T

$$J_r(r', \phi') = J_r^{(1)}(r', \phi') - J_r^{(1)}(\frac{r_d^2}{r'}, \phi'). \quad (42)$$

식(42)를 전개한 식은 매우 복잡하지만 간단히 얻을 수 있다. 로렌츠 힘의 법칙[12]을 이용하면 자속 투영면 아래의 체적에서 발생하는 단위 부피당 힘 ΔF 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\Delta F = J \times B = \Delta F_\phi a_\phi + \Delta F_r a_r \quad (43)$$

여기서 a_ϕ 와 a_r 은 각각 접선 방향과 반경 방향의 단위 벡터이고 ΔF 의 접선 방향 성분 ΔF_ϕ 은 다음과 같다.

$$\Delta F_\phi = -J_r B_z \quad (44)$$

ΔF_ϕ 를 이용하면 식(45)의 제동 토크 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} T_b &= \int_v r' \times \Delta F_\phi dv \\ &= -dB_z \int_s r' J_r ds \hat{k} = \int_s \Delta T_b ds \end{aligned} \quad (45)$$

여기서 v 와 ΔT_b 는 각각 자속 투영면 아래의 체적과 단위 면적 당 제동 토크를 의미한다.

그림 6은 식(35),(41),(42)와 (45)를 이용하여 이동 좌표계

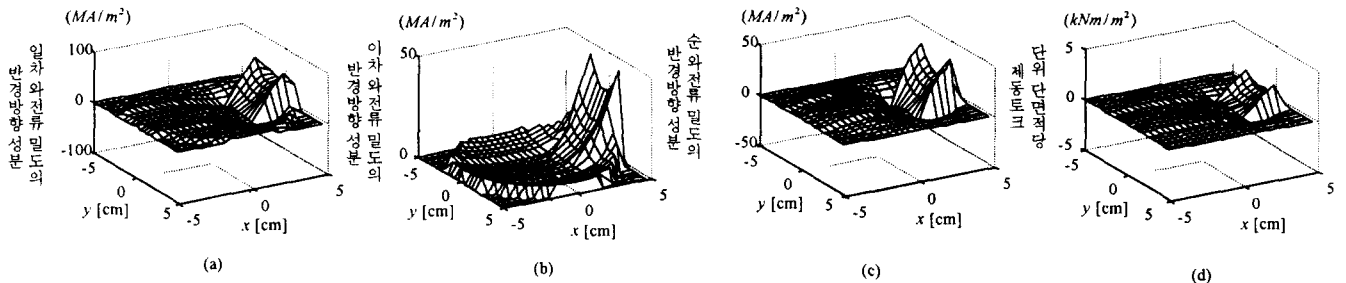


그림 6. 와전류 밀도 및 제동토크 분포 (a) 일차 와전류 밀도 (b) 가상 와전류 밀도 (c) 순 와전류 밀도 (d) 단위 단면적 당 제동토크.

Fig. 6 The eddy current density distributions and the braking torque distribution : (a) the primary eddy current density (b) the imaginary eddy current density (c) the net eddy current density (d) the braking torque per unit area.

에서 와전류 밀도 분포의 반경방향 성분과 단위 면적 당 제동 토크 분포를 계산한 결과를 나타낸다. 모든 매개 변수들은 표 1에 표시된다. 단, 와전류가 자속 투영면의 y 방향으로 집중되는 경향을 확연히 보기 위해 a 값을 40mm로 설정하였으며 와전류가 집중되는 곳에서 최대 제동 토크가 발생하는 것을 관찰할 수 있다. 이러한 와전류 분포에 대한 정보



그림 7 실험 장치.
Fig. 7 Fig. Experimental setup.

로부터 더욱 정확한 제동 토크를 계산할 수 있을 것이다.

3. 실험

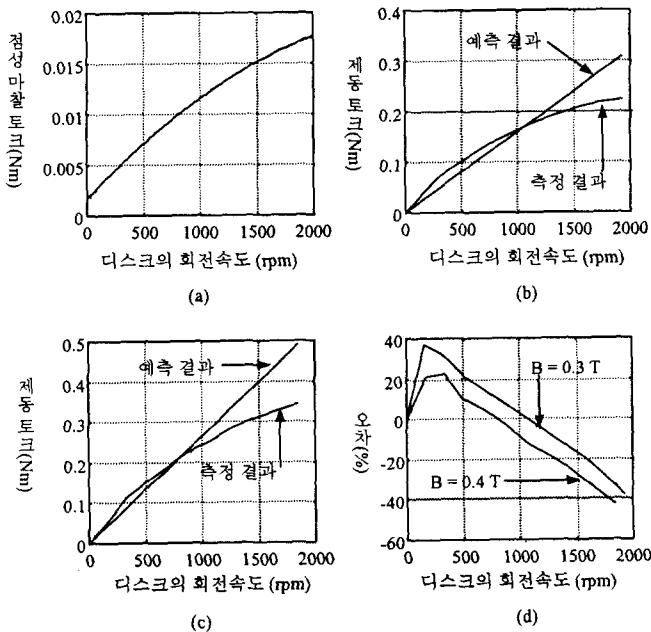


그림 8. 실험 결과 (a) 점성 마찰 토크 (b) $B_z = 0.3$ T 일때의 제동토크 (c) $B_z = 0.4$ T 일때의 제동토크 (d) 측정결과와 예측결과의 오차.

Fig. 8 Experimental results of (a) the viscous-friction torque, (b) the braking torque when B_z is 0.3T, (c) the braking torque when B_z is 0.4 T, and (d) errors between the measured result and estimated one.

제안된 해석 모델을 검증하기 위해 제동 토크를 실험적으로 측정한다. 그림 7은 회전 디스크 및 전자석과 전기 모터로 구성된 실험 장치를 나타낸 것이다. 디스크를 일정한 속도로 회전시키기 위해 전기 모터를 사용한다. 실험 장치의 기계적 동역학 식은 다음과 같다.

$$J_s \dot{\omega} + b_s \omega = k_i i_a - T_b \quad (46)$$

여기서 J_s, b_s, k_i 와 i_a 는 각각 회전계의 관성, 점성 마찰 계수, 토크 상수와 모터의 전기자 전류이다.

첫 번째로, 점성 마찰에 의한 점성 마찰 토크 $b_s \omega$ 를 구하기 위해 전자석에 전류를 인가하지 않은 상태에서 실험을 수행한다. 제동 토크가 없으므로 정상 상태에서 식(46)은 식(47)로 표시할 수 있다.

$$b_s \omega = k_i i_a \quad (47)$$

k_i 는 전기 모터의 사양으로부터 알 수 있으므로 전기자 전류값을 측정함으로써 간접적으로 점성 마찰 토크 $b_s \omega$ 를 측정할 수 있다. 그림 8(a)는 커브 피팅(curve fitting)법을 이용하여 디스크의 회전 속도에 대한 측정된 점성 마찰 토크를 나타낸 곡선이다.

두 번째로, 전자석에 전류를 인가하여 실험을 수행한다. 정상 상태에서 식(46)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$T_b = k_i i_a - b_s \omega \quad (48)$$

식(48)의 우변에 있는 각 항의 값들을 모두 알고 있으므로 제동 토크 T_b 값을 알 수 있다. 그림 8(b)와 (c)는 서로 다른 전류를 전자석에 인가했을 때 디스크의 회전 속도에 대한 제동 토크 측정 결과와 해석 결과를 비교한 것이다. 회전 속도가 증가함에 따라서 제동 토크가 특정 값으로 수렴하고 일정 속도 이상에서는 해석적으로 계산된 값보다 커지는 것을 관찰할 수 있다. 이러한 특성으로 볼 때 본 논문에서 제안된 해석 모델은 일정 속도 이상에서는 오차가 증가하는 경향이 있지만 저속 영역에서는 비교적 정확한 계산 결과를 제공한다는 것을 알 수 있다. 고속 영역에서 오차가 증가하는 현상은 자속 투영면을 관통하는 순수 자속(net magnetic flux)을 감소시키는 유도 자속(induced magnetic flux)때문이라고 여겨진다. 저속 영역에서는 유도 자속이 전자석으로부터 발생하는 자속보다 작다. 그렇기 때문에 해석 결과가 실험 결과와 잘 맞지만 회전 속도가 증가할수록 유도 자속이 증가로 인해 오차가 증가하는 것으로 여겨진다. 저속과 고속의 기준은 전자석에서 인가된 자속 밀도와 와전류에 의해 유도된 자속 밀도의 비율에 의해 결정된다. 이 비율이 1보다 크면 고속이라고 말할 수 있다. 이 비율은 디스크의 크기, 재질, 회전 속도에 의해 결정되며 시스템의 사양이 고정된다면 회전속도(rpm)에 의해서 결정된다. 그러므로 고속과 저속의 기준을 정확히 알기 위해서는 유도 자속밀도를 고려해야 할 것이다.

4. 결론

자속(magnetic flux)이 관통하는 회전 디스크에서 발생하는 와전류 밀도 분포와 제동 토크에 대한 해석을 수행하였다. 첫 번째로, 디스크의 반경이 무한하다고 가정한 상태에서 자속 투영면의 가장자리에서 선 전하 밀도를 정의하여 쿨롱

법칙을 적용함으로써 전계의 세기를 유도하였다. 옴의 법칙을 이용하여 전계의 세기로부터 일차 와전류 밀도 분포를 유도하였으며 디스크 가장자리에서의 경계 조건(boundary condition)을 고려하기 위해 가상 와전류 밀도 분포를 정의하였다. 제안된 해석 모델을 검증하기 위해 해석 결과의 제동 토크를 실험적으로 측정된 제동 토크와 비교하였다. 제안된 해석 모델은 일정 속도 이상에서는 오차가 증가하는 경향이 있지만 저속 영역에서는 비교적 정확한 계산 결과를 제공한다는 것을 알 수 있다. 이러한 오차는 자속 투영면을 관통하는 순수 자속을 감소시키는 유도 자속때문이라고 여겨진다. 그러므로, 유도 자속이 증가하는 고속 영역에서의 정확한 해석 결과를 유도하기 위해서는 해석 모델에서 유도 자속에 의한 현상을 고려해야 할 것이다.

참 고 문 헌

[1] W. R. Smythe, "On eddy currents in a rotating disk," Trans. AIEE, Vol. 61, pp. 681-684, September 1942.

[2] J. H. Wouterse, "Critical torque and speed of eddy current brake with widely separated soft iron poles," IEE. Proc. B, Vol. 138, No. 4, pp. 153-158, July 1991.

[3] L. Barnes, J. Hardin, and C. A. Gross, "An Eddy Current Braking System," IEEE, pp. 58-62, 1993.

[4] E. Simeu and D. Georges, "Modeling and control of an eddy current brake," Control Eng. Practice, Vol. 4, No. 1, pp. 19-26, 1996.

[5] H. C. Louis, "Magnetic damping: Analysis of an eddy current brake using an airtrack," Am. J. Phys., Vol. 64, No. 7, pp. 917-923, July 1996.

[6] K. Lee and K. Park, "잠김 방지 기능을 가지는 비접촉식 와전류형 제동 장치의 건설제어," 제어.자동화.시스템공학 논문지, Vol. 4, No. 4, pp. 525-533, August 1998.

[7] H. D. Wiederick, N. Gauthier, D. A. Campbell, and P. Rochon, "Magnetic Braking: Simple Theory and Experiment," American Journal of Physics, Vol. 55, No. 6, pp. 500-503, June 1987.

[8] M. A. Heald, "Magnetic Braking: Improved Theory," American Journal of Physics. Vol. 56, No. 6, pp. 521-522, June 1988.

[9] D. Schieber, "Unipolar induction braking of thin metal sheets," Proc. IEE., Vol. 119, No. 10, pp. 1499-1503, Oct. 1972.

[10] D. Schieber, "Braking torque on rotating sheet in stationary magnetic field", Proc. IEE., Vol. 121, No. 2, pp. 117-122, Feb. 1974.

[11] D. Schieber, Electromagnetic induction phenomena, Springer Series in Electrophysics, Vol. 16, 1986.

[12] W. H. Hayt, Engineering electromagnetics, McGraw-Hill, 5th. ed., ISBN 0-07-100488-2, 1989.

[13] H. H. Woodson and J. R. Melcher, Electromechanical dynamics Part I: Discrete systems, Krieger pub. co., Malabar, Florida, 1990.

저 자 소 개



이 갑 진 (李 甲 振)
 1973년 7월 25일 생. 1996년 고려대 제어계측공학과 졸업. 1998년 광주과학기술원 기전공학과 석사 졸업. 1998년~광주과학기술원 기전공학과 박사과정 재학중
 Tel : 062-970-2411, Fax : 062-970-2384
 E-mail : kap@kjist.ac.kr



박 기 환 (朴 起 煥)
 1961년 1월 14일 생. 1985년 서울대 기계설계공학과 졸업. 1987년 서울대 기계설계공학과 석사 졸업. 1993년 The University of Texas at Austin 박사과정 졸업. 1995년 광주과학기술원 기전공학과 부교수
 Tel : 062-970-2391, Fax : 062-970-2384
 E-mail : khpark@kjist.ac.kr