

# 역문제에 의한 스파이얼 베벨기어의 해석

박성완\*

## Analysis of Spiral Bevel Gear by Inverse Problem

Sung-Oan Park\*

### Abstract

This study proposed a technique for inverse problem, linear approximation of contact position and loading in single and double meshing of spiral bevel gear, using 2-dimension model considered near the tooth by root stress.

Determine root stress is carried out for the gear tooth by finite element method and boundary element method. Boundary element discretization near contact point is carefully performed to keep high computational accuracy.

And from those estimated results, the comparing estimate value with boundary element method value was discussed.

**Key Words :** Inverse Problem(역문제), Spiral Bevel Gear(스파이얼 베벨기어), Boundary Element Method(경계요소법), Unit Load(단위하중), Root Stress(이뿌리응력)

### 1. 서론

최근 승용차산업은 나쁜 도로지형 및 고속주행에서 안전성을 유지하는 전륜구동 시스템이 많이 채용되고 있다. 전륜구동 자동차는 서로 접촉하는 축의 동력전달용 치차로 스파이얼 베벨기어를 채용하고 있다. 스파이얼 베벨기어는 다른 베벨기어와 비교하여 진동이나 잡음이 적기 때문에 고속운전에 적합하며 자동차이외에 광범위하게 사용되고 있다. 그러나 여러분야에서 많이 사용됨에도 불구하고 구동성능에 영향을 주는 인자가 복잡하기 때문에 스

파이얼 베벨기어에 관한 연구는 많지 않은 실정이며 체계적인 연구는 최근에 시작되고 있다.

스파이얼 베벨기어는 오목면과 볼록면이 맞물리는 특징을 가지고 있으므로 그 치는 대단히 복잡하다. 또한 양치면은 대칭이 아니기 때문에 정회전, 역회전 치는 다르게 된다. 정회전과 역회전을 비교하면 정회전일때 내단에 대하여 치차를 맞물림한 상태에서 역회전을 시키면 외단이 맞물리는 상태로 된다. 또한 정회전일때 외단에 대하여 맞물림한 상태로 역회전을 시키면 내단이 맞물림하고 있으므로 물림전달오차가 많이 발생한다.

\* 시립 인천전문대학 기계설계과(sopark@icc.ac.kr)

현재 스파이얼 베벨기어는 많은 치절삭 공작기계에 의하여 치절삭방식이 존재하고 각각의 치절삭 방식에 의하여 치형이 다르게 되며 제작공정에 있어서 shaving 가공 및 열처리에 의한 변형 등으로 일반적으로 치면형상 수정을 하고 있다. Coleman<sup>(1)</sup>은 스파이얼 rack 모델을 사용하여 치의 강성을 연구하였으며, 치면형상 수정에 의한 물립 전달오차의 해석은 梅澤등<sup>(2,3)</sup>, 新井등<sup>(4)</sup>이 1매의 치를 대상으로 해석을 하였고, 久保등<sup>(5)</sup>은 계산 및 실험결과와의 비교로 물립전달오차를 연구하였다. 그러나 이들은 모두 접촉위치를 가정한 해석이었다.

물립전달오차의 원인이 되는 접촉부분의 접촉위치, 접촉하중, 처짐, 변형을 정확하게 구하는 것은 대단히 중요하며 현재 접촉하중, 접촉위치는 Hertz의 式을 사용하여 계산하는 경우가 대부분이다<sup>(6-8)</sup>. 치차접촉면의 표면력을 Hertz의 式으로 계산하는 경우 싸이클로이드곡선으로 표시되는 스파이얼 베벨기어의 접촉면을, 접촉점에 있어서 원주의 이동궤적을 근사계산하고 있으므로 반드시 정확하다고 말할 수 없다. 또한 물립률이 2이상의 치차는 보통 2점에서 접촉하고 있기 때문에 하중분담률을 알 수 없다면 Hertz의 式으로 접촉면의 응력을 계산하는 것은 가능하지 않다. 한편 유한요소법<sup>(9-12)</sup>이나 경계요소법의 수치해석법을 사용하여 치차의 접촉해석을 행한 예는 그다지 흔하지 않으며 이것은 유한요소법이나 경계요소법으로 접촉해석을 하는 경우 접촉면, 다시말하면 싸이클로이드곡선을 이산화하는 것이 용이하지 않다는 이유이다. 그래서 이들의 수치해석법에서 접촉조건을 고려하여 간단하게 2개의 물체의 접촉에 대응하는 요소의 길이를 동일하게 할 필요가 있다.

지금까지 평치차나 헬리칼치차의 치면하중과 치의 맞물림과의 관계가 명확하게 되어있지만 스파이얼치는 치폭 방향으로 이높이 모듈의 비가 변화하고 있기 때문에 처짐 해석을 하지 않았다. 따라서 본 연구에서는 스파이얼 베벨기어의 처짐을 해석하기 위한 기초로 1치의 맞물림의 치차에 대하여 경계요소법으로 싸이클로이드곡선을 요소를 일정길이로 이산화하여 임의의 치에 하중을 가할 때 인접치차의 이뿌리응력과 그 하중위치와의 관계를 선형 근사화하고 실험 및 유한요소법으로 계산한 이뿌리응력을 보조정보로하여 처짐을 해석하는 역문제<sup>(13)</sup>를 도입한다. 또한 스파이얼치를 rack 모델화하여 3차원 경계요소법으로 치면에 집중하중을 작용하여 발생하는 치의 처짐특성을 조사하고 치의 처짐 근사식을 유도한다. 더욱더 스파이얼 베벨기어의 형상에 대하여 역해석에 의한 추정된 치

의 처짐값과 근사식에 의한 값들을 비교검토하여 그 타당성을 조사한다.

## 2. 경계요소법에 의한 접촉문제의 정식화

물체력이 작용하지 않는 2차원 등방탄성체의 경계적분 방정식은 다음과 같이 된다.

$$c^i u_i + \int_{\Gamma} u_k t_k^* d\Gamma = \int_{\Gamma} t_k u_k^* d\Gamma \quad (1)$$

여기서  $c$ 는 경계의 기하형상에 의하여 결정된다.  $u_k, t_k (k=1,2)$ 는 변위 및 표면력성분,  $u_k^*, t_k^*$ 는 크기 1의 물체력이 작용하는 무한탄성체의 解를 표시하고 있으며 Kelvin 解<sup>(14-16)</sup>이다. 뒀첨자  $i$ 는 式(1)에서 고려하는 경계점을 표시하고 있다. 式(1)은 평면변형률 문제로 정식화하여 접촉하는 2물체에 대하여 각각 성립한다.

## 3. 역문제에 의한 접촉하중 및 접촉위치, 처짐식의 추정

### 3.1 접촉하중 및 접촉위치의 추정

Fig. 1에 스파이얼 베벨기어의 각부 명칭을 표시한다. 스파이얼 베벨기어의 이뿌리응력 및 하중, 치의 위치의 관계를 Coleman<sup>(1)</sup>의 모델을 사용하여 Fig. 2와 같이 표시한다. 여기서 단위하중  $F$ 를 이끝으로부터 이뿌리로 하중을 작용하는 경우 각 이뿌리응력을  $\sigma_a \sim \sigma_d$ 로 설정한다. 또한 집중하중  $F_1, F_2$ 가 치면에 작용할 때 2매, 1매 맞물림때의 각 이뿌리응력은  $\sigma_1 \sim \sigma_4$ 로써 그때의 치의 위치

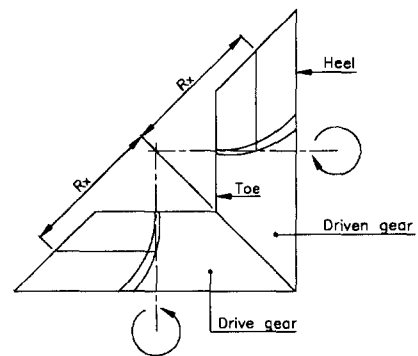


Fig. 1 Configuration of spiral bevel gear

는 피치(pitch)원을 기준으로 이끝에서 맞물림을 하는 경우는  $h_1$ , 이뿌리에서 맞물림을 하는 경우는  $h_2$ 로 설정하여 Fig. 3에 표시한다. Fig. 4에 표시한 것 같이 스파이럴 rack 모델 및 스파이럴 베벨기어의 치의 횡방향으로 단위 하중을 작용하여, 스파이럴 베벨기어 및 스파이럴 rack 모델의 이뿌리응력과 하중 작용점의 관계를 최소자승법을 사용하여 일차근사화하고 또한 2매 맞물림의 이뿌리응력은 1매 맞물림의 치에 단위하중을 작용할때 중첩의 원리에 의하여 계산하면  $\sigma_1 \sim \sigma_4$ 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (c_1 h_1 + c_2) F_1 + (a_1 h_2 + a_2) F_2 \\ \sigma_2 &= (d_1 h_1 + d_2) F_1 + (b_1 h_2 + b_2) F_2 \\ \sigma_3 &= (e_1 h_1 + e_2) F_1 + (c_1 h_2 + c_2) F_2 \\ \sigma_4 &= (f_1 h_1 + f_2) F_1 + (d_1 h_2 + d_2) F_2 \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)의 계산을 간단하게 하기 위하여  $F_3 = h_1 F_1$ ,  $F_4 = h_2 F_2$ 와 같이 연립 1차방정식을 만들어서 계수행렬을 [A], 미지수로 이루어지는 벡터 [F], 2매 맞물림때의 이뿌리응력 벡터 [σ]로써

$$[\sigma] = [A][F] \quad (3)$$

式(3)를 행렬 [F]에 대하여 정리하면

$$[F] = [A]^{-1}[\sigma] \quad (4)$$

式(4)로부터 式(3)의 미지 벡터 [F]는 구하여 진다.

### 3.2 치집식의 추정

굽힘에 의한 치의 치집식은 평치차에 있어서 미분방정식이나 차분방정식을 사용하여 구한 것이 대부분이다. 그러나 스파이럴 베벨기어(spiral bevel gear)에 대한 치의 치집을 구하지 않았다. Coleman<sup>(1)</sup>의 실험식은 Fig. 2에 표시하는 치폭 방향으로 일정한 곡율을 가지는 등고치의 rack 모델의 시험편을 사용하여 임의 하중조건으로 rack 치의 모서리 얇은 부분의 응력분포를 계산하여 그결과로부터 도입한 것이다. 이 경우 rack 모델값의 이뿌리응력분포는 치폭방향으로

$$\sigma = a \exp\{b(l+c)^2\} \quad (5)$$

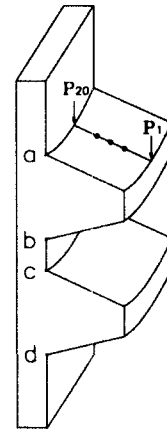


Fig. 2 Determination of root stress name and loading point at spirial rack gear model

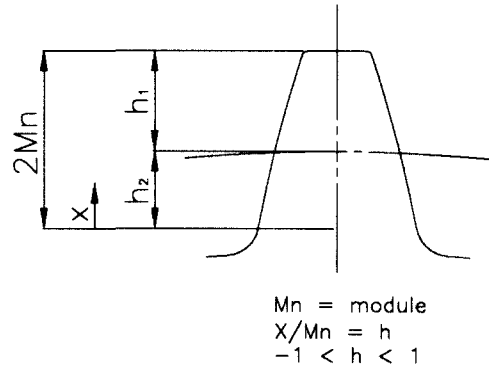


Fig. 3 Determination of h axis from tip to root

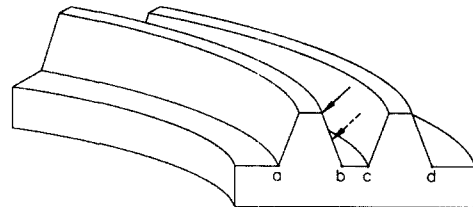


Fig. 4 Relation between position and root stress of double meshing

으로 된다. 여기서  $\sigma$ : 이뿌리응력,  $l$ : 치폭방향 내단부를 기준으로한 좌표,  $a, b, c$ : 상수 이다.

이뿌리응력분포의 식에 의하여 스파이럴 베벨기어의 치의 치집식은 식(5)와 밀접한 관계를 가지는 것을 알 수 있

으며 스파이얼 베벨기어의 임의점에 집중하중을 작용시키는 경우 치폭방향에 있어서 치의 처짐식은

$$\delta = a' \exp(b'(l + c')^2) \quad (6)$$

으로 된다. 여기서  $\delta$ : 처짐량,  $l$ : 치폭방향 내단부를 기준으로한 좌표,  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$ : 상수이다.

본 연구에서는 부하 맞물림에 의한 치폭방향의 이뿌리 응력분포가 이미 계산되고 있는 경우에 접촉선상의 일점에 집중하중을 작용시킬때의 이뿌리 응력 분포로부터 이뿌리 응력의 영향계수를 구할 수 있다. 따라서 식(4)에 의하여 접촉선상의 하중분포는 구하여진다. 다음에 변형을 구하는 것은 강성 매트릭스가 필요하게 된다. 정적계산에서 단위집중하중을 치면상의 임의의 점에 작용할 때 처짐량을 구하므로 강성매트릭스는 계산가능하다. 그러나 구동시에 치면상의 처짐량은 다음식으로 구하여진다.

$$\{\delta\} = [K^{-1}]\{F\} \quad (7)$$

여기서  $\{\delta\}$ : 치면상의 처짐분포의 열벡터  
 $[K^{-1}]$ : 강성매트릭스  
 $\{F\}$ : 치면상의 하중분포의 열벡터

치의 강성을 구하기 위하여 치의 처짐식이 필요하다. 그래서 치의 처짐분포식의 검토가 중요하게 된다. 치폭방향에 대하여 Coleman<sup>(1)</sup>의 식이 충분히 적용가능한 것을 알 수 있다. 이높이 방향에 대하여 일반적으로 3차식을 사용한다. 또한 치폭방향에 따라서 이끝과 피치선상의 처짐의 비가 거의 일정인 것을 고려하면 치의 처짐의 분포식은 다음식으로 표시하는 것이 가능하다.

$$\delta = (a''y^3 + b''y^2 + c''y + d'') \exp\{f''(x + g'')^2\} \quad (8)$$

여기서  $\delta$ : 처짐량,  $x$ : 치폭방향 내단부를 기준으로한 좌표,  $y$ : 이높이 방향에 있어서 이뿌리를 기준으로한 좌표,  $a'' \sim g''$ : 상수이다. 또한 이뿌리의 처짐 및 기울기가 0으로 있는 것을 고려하면 식(8)은 다음과 같이 간단하게 된다.

$$\delta = (a''y^3 + b''y^2) \exp\{f''(x + g'')^2\} \quad (9)$$

## 4. 수치해석 및 고찰

본 논문에서는 스파이얼 베벨기어에 하중을 작용시킬때 인접치차의 이뿌리 응력과 그 하중위치와의 관계를 선형 근사화하고 실험 및 유한요소법으로 계산한 이뿌리 응력을 보조정보로하여 경계요소법으로 치의 처짐특성을 조사하고 치의 처짐근사식을 유도하는 역문제이다.

실험 및 유한요소법에 의한 해석과 경계요소법에 의한 치의 처짐을 계산하기 위하여 Fig. 2 와 Fig. 4에 표시하는 스파이얼 rack 모델 및 스파이얼 베벨기어의 형상을 KS규격에 따라 모델은 이높이를 일정( $h=5.625$ )으로, 기본 모델은 치폭방향으로 치직각 모듈 일정으로 치직각 모듈이  $M_n=7.5$ , 잇수( $z_1=22, z_2=24$ )까지 등비율로 변화시켜 해석을 하였다. 또한 치폭방향으로 단면형상을 변화시킨 모델을 사용하였으며 clearance를 일정 ( $0.625mm$ )으로, 곡율은 치폭방향으로 일정으로 하였다. 여기서 곡률반경은 곡률중심에서부터 모델의 치직각 단면 중앙까지의 반경으로 표시한다.

### 4.1 계수행렬 [A]의 계산

strain gage법에 의한 스파이얼 베벨기어의 이뿌리 응력을 측정하기 위하여 Fig. 2와 같이 스파이얼 rack 모델을 사용하였다. 치차의 치는 이끝에서 이뿌리 방향으로 작용선상에서 회전을 반복하여 동력을 전달하므로, 스파이얼 rack 모델 실험도 이끝에서 이뿌리로 단위하중을 가하기 위하여 스파이얼 rack 모델의 치측면을 엔드밀로 5개의 계단가공을 하였다. Photo. 1은 실험장치의 사진으로 strain gage(日本: 共和電業社, gage rate 2.15, type: KFG-IN-120-C1-11)는 rack 모델의 Hofer의 30° 접선법에 의한 위험단면위치를 기준으로 28° ~ 36° 까지 각각의 위치에 strain gage를 붙여서 UTM의 하부 그립(grip)에 치면이 정면을 향하도록 고정하고, 상부 그립에는 십자모양의 핀을 고정하여 rack 모델의 계단부분에 순차적으로 이끝에서 이뿌리로 하중을 반복작용 시켜서 각 이뿌리의 strain을 검출하고, 이것을 bridge box(scanner)에 연결하여 data logger에 기록하고 printer로 출력했다. 해석결과는 동일한 조건으로 유한요소법과 경계요소법에 의한 결과들과 비교하기로 하였다.

유한요소법에 의한 해석은 범용 유한요소해석 패키지 (ALGOR)를 사용하여 정적상태의 스파이얼 rack 모델 및 스파이얼 베벨기어의 이뿌리 응력을 계산 하였다. 요소는 2차원 평면요소로 8-node isoparametric요소를 사용하였으



Photo. 1 Experimental apparatus for root stress

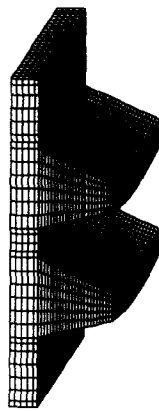


Fig. 5 Mesh pattern of rack model by FEM and BEM

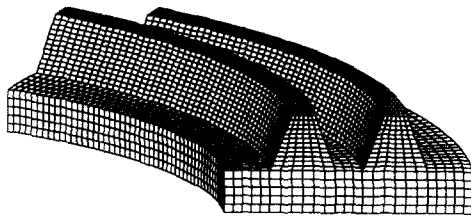


Fig. 6 Mesh pattern of spur gear model by FEM and BEM

며 계산정도, 계산시간 등을 고려하여 최적의 요소분할을 하였다. Fig. 5는 스파이얼 rack 모델, Fig. 6은 스파이얼 베벨기어의 유한요소해석 요소분할도이다. 스파이얼 rack

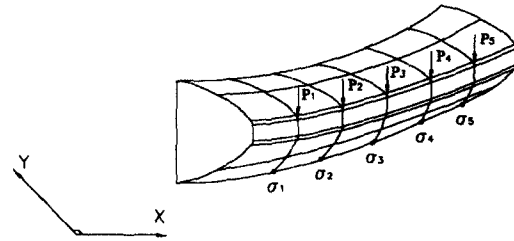


Fig. 7 Definition for the measure position of root stress

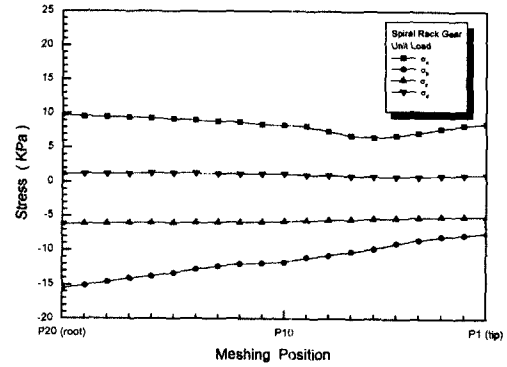


Fig. 8 Relation between position and stress by unit load at spirial rack gear model

모델의 해석방법은 하중방향을 Fig. 7과 같이 법선방향으로 이끌로부터 이뿌리로 일정한 단위하중을 작용하여 해석한다.

스파이얼 베벨기어 모델은 스파이얼 rack 모델과 같은 방법으로 이끌로부터 이뿌리로 일정한 단위하중을 작용하여 해석을 한다.

Fig. 8은 스파이얼 rack 모델의 해석한 결과를 표시하며 단위하중위치, 즉 물림점이 이끌에서 이뿌리로 이동함에 따라 이뿌리응력값  $\sigma_c$ ,  $\sigma_d$ 는 일정한 값을 유지한다. 단위하중을 직접받는  $\sigma_a$  값이 가장크고 반대편인  $\sigma_b$  값이 가장 낮은 값을 나타내고 있으며 치의 단위하중에 의한 굽힘작용으로 a 점에서는 인장, b 점에서는 압축 현상을 나타내고 있다.  $\sigma_b$ 는 굽힘작용으로 이끌에서부터 이뿌리까지 선형적으로 변화하고 있음을 알 수 있다. 따라서 전체적으로 선형성이 유지됨을 알 수 있다. Fig. 9는  $M_n=7.5$ 의 스파이얼 베벨기어의 해석결과를 표시하며 치차의 회전에 있어서 1매의 치를 주목하면 이끌로부터 이뿌리의 방향으로 접촉면을 변화시키면서 그 과정을 반

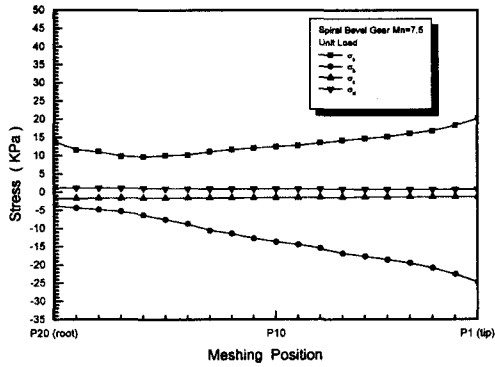


Fig. 9 Relation between position and stress by unit load at spiral bevel gear model

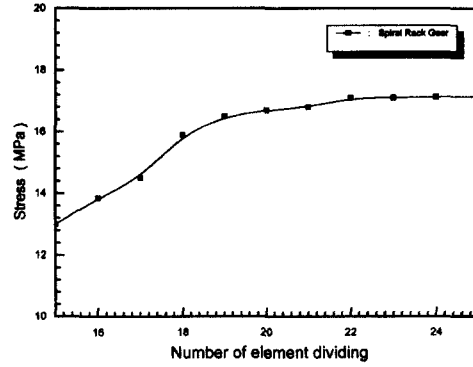


Fig. 10 Determination of element number in spiral rack gear model

복회전한다. 결국 치차의 접촉면은 구동 및 피구동의 기초 원의 접촉선상(접촉 작용선)으로 작용하고 있는 것을 고려하여 단위하중을 이끝으로부터 이뿌리의 방향으로, 치직각에서 일정하게 작용하여 해석을 하였다. Fig. 9에 의하여 하중이 이끝으로부터 이뿌리로 진행하면 각 이뿌리 응력이 작게 되고 있으며 이뿌리응력  $\sigma_a$ ,  $\sigma_c$ ,  $\sigma_d$ 는 스파이럴 rack 모델의 경우와 동일한 경향을 나타내고 있다. 그러나  $\sigma_b$ 는 하중이 이뿌리로 진행하면 작게 되지만 이뿌리인 점에서 크게된다. 이것은 치직각에 작용하고 있는 하중이 이뿌리에 가깝게 될 때 압축력이 작게 되며 인장력은 크게 되는 것으로 이뿌리에서 곡률반경이 작게 되는 영향이 있다고 고려된다.

인접치의 이뿌리응력값이  $\sigma_c$ 보다 작으며 또한 계수행렬을 구성하는데 거의 영향이 없다고 생각되어 생략하였다. 전체적으로 단위하중에 의한 선형성이 유지됨을 알 수 있다. 이들의 결과를 식(4)에 대입하여 계수행렬 [A]를 계산하고 역문제의 해석에 적용한다.

#### 4.2 경계요소법 해석

경계요소법에 의한 스파이럴 rack 모델 및 스파이럴 베벨기어 모델의 해석에 있어서 상용 경계요소법 프로그램 (BEASY)을 치차의 싸이클로이드 곡선을 일정길이로 이산화<sup>(17)</sup>한 고차요소를 사용하여 PC (CPU 350MHz MMX, RAM 128MB)로 계산하였다.

스파이럴 rack 모델 및 스파이럴 베벨기어의 요소수를 결정하기 위하여 여러종류의 모델을 이끝에서 집중하중을 작용하여 이높이(이끝높이+이뿌리높이)의 요소분할수에 따른 이뿌리에서의 최대응력값을 Fig. 10 및 Fig. 11에 표

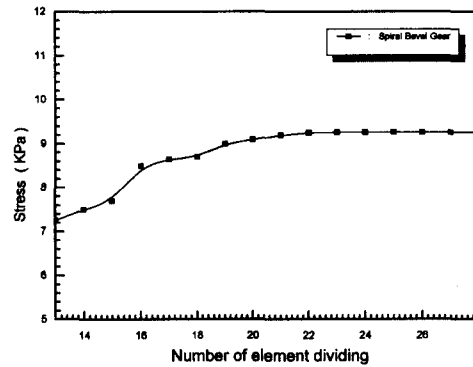


Fig. 11 Determination of element number in spiral bevel gear model

시하고 그들의 값을 비교하여 적당한 분할수를 결정하였다. 이들의 결과에 의하여 계산정도, 계산시간 등을 고려한 요소분할은 이끝면, 이끝높이, 이뿌리높이를 (6/13/13)으로 분할하였으며 계산시간은 한 문제당 35분 정도 소요되었다. 스파이럴 rack 모델 요소분할도와 스파이럴 베벨기어 요소분할도는 유한요소법과 동일한 조건으로 해석하기 위하여 Fig. 5 와 Fig. 6을 그대로 사용 하였으며, 구속조건은 유한요소해석과 동일하게 스파이럴 rack 모델 및 스파이럴 베벨기어의 저면을 완전구속 하였다. 물성치로 종탄성계수 (E)는 206GPa, 횡탄성계수 (G)는 82GPa, 프아송비 ( $\nu$ )는 0.3으로 하였다.

경계요소법으로 구한 이뿌리응력을 식(4)에 대입하여 역문제를 해석한다. 또한 이뿌리응력에 대하여 실험 및 유한요소해석 결과를 비교할 필요가 있다. 그래서 유한요소해

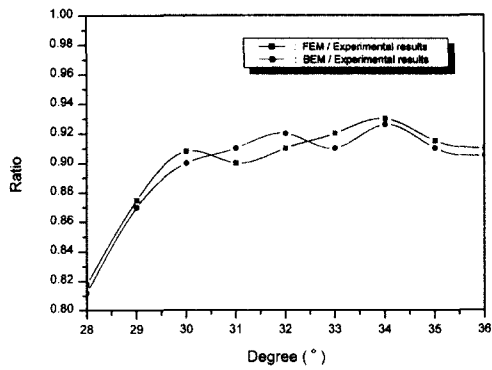


Fig. 12 Relation between ratio and measuring position of FEM and BEM

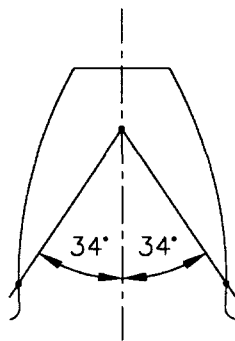


Fig. 13 Position of 34° section of Hofer

석과 동일한 하중을 사용하여 경계요소해석을 한다. 치차는 접촉위치가 변화하면서 동력전달을 하고 있으므로 치차의 이뿌리응력의 계산위치는 추정식의 작성에 있어서 중요하다. 그래서 Hofer의 30° 접선방향의 위험단면 위치에서 이뿌리응력을 계산한 결과를 사용하는 것을 조건으로 한다. 스파이얼 rack 모델 및 스파이얼 베벨기어를 사용하여 실험 및 유한요소법과 경계요소법 해석결과, 하중을 직접받는 a 점에서 이뿌리응력( $\sigma_a$ )의 오차가 작은 위치를 Fig. 12에 표시한다. Fig. 12에서 Fig. 13과 같이 34° 떨어진 위치에서 실험 및 유한요소법과 경계요소법 해석에 의한 이뿌리응력의 오차가 작은 것을 알 수 있었다.

#### 4.3 이뿌리응력과 처짐량의 계산

스파이얼 베벨기어는 평치차 및 일반치차에는 존재하지 않는 오목, 볼록면이라는 3차원적인 인자를 가지고 있기 때문에 오목, 볼록면 치면에 대하여 검토할 필요가 있다.

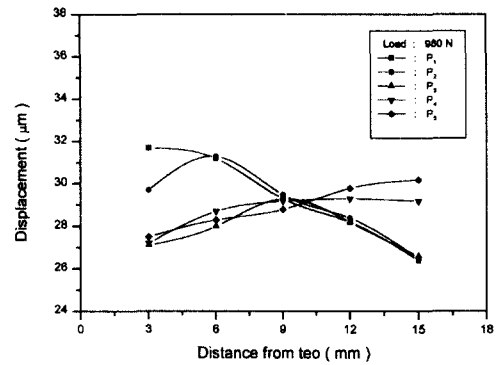


Fig. 14 Relation between displacement and distance from toe(load : tip, measured position : tip)

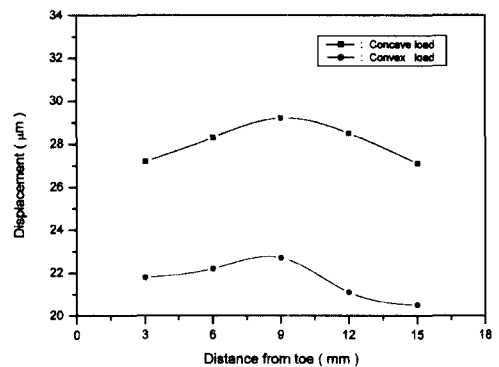


Fig. 15 Relation between displacement and distance from toe(load : P5, measured : tip)

그래서 Fig. 14와 같이 오목, 볼록 양치면의 이끝에 집중하중 980 N을 작용시킬 때 이끝의 변형과 치폭방향 변위 계산위치와의 관계를 대표적으로 나타낸다. 한편 치폭방향 변위 계산위치는 치폭방향 내단부를 기준으로 스파이얼 베벨기어의 치폭방향의 전개거리를 나타내고 있다. Fig. 14에 의하여 임의점에 집중하중이 작용할 때 그 처짐은 2차식으로 근사가능한 곡선임을 알 수 있다. 또한 처짐량의 최대값은 치의 단에 집중하중을 작용할 때 크고 중앙부에서 가장 작은값을 나타내고 있다.

Fig. 15는 오목, 볼록면 치면에 대하여 이끝 중앙부에 집중하중 980 N을 작용시킬 때 이끝의 변형과 치폭방향 변위 계산위치의 관계를 대표적으로 나타낸다. Fig. 15에 의하여 볼록면으로부터 집중하중을 작용시킬때와 오목면으로부터 집중하중을 작용시킬 때는 전체적으로 값이 다르

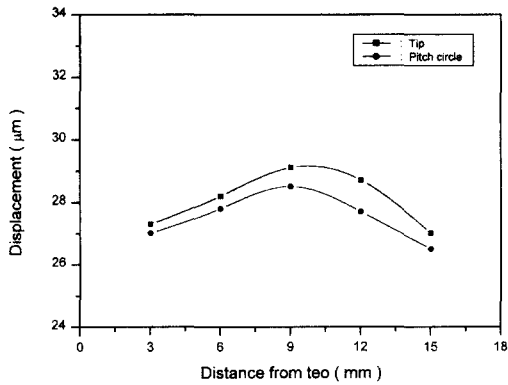


Fig. 16 Relation between displacement and distance from teo (measured position : P<sub>5</sub>)

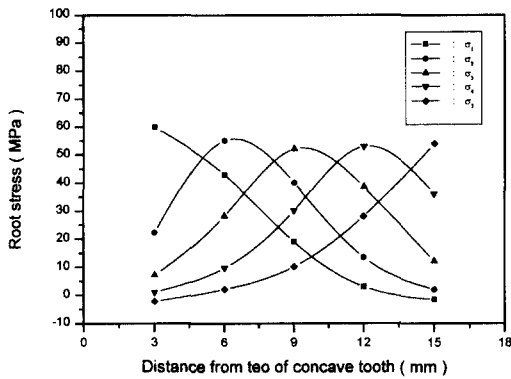


Fig. 17 Relation between stress and distance from toe of concave tooth

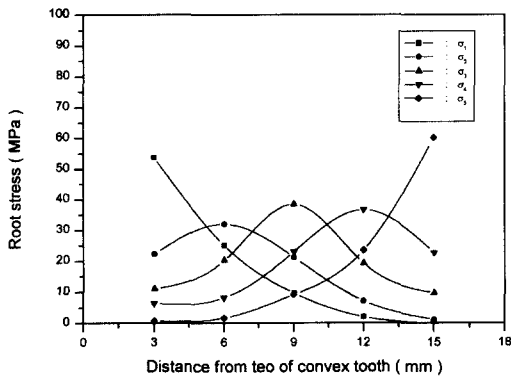


Fig. 18 Relation between stress and distance from toe of convex tooth

게 된다. 오목, 볼록 양치면의 처짐량의 비는 오목면 1에 대하여 볼록면은 약 0.75 ~ 0.8이다. 즉 동일한 집중하중이 양치면에 작용하는 경우 볼록면쪽의 처짐량이 작고 강성적으로 오목면에 비하여 좋은 결과를 나타내고 있다. 또한 치폭방향 전개거리가 증가, 즉 외단부 거리만큼 오목, 볼록면의 처짐비가 증가하는 경향이 있다. 이것은 스파이얼치가 내단부에 비교하여 외단부의 비틀림각 및 이두께가 크기 때문에 일어난다고 생각된다. Fig. 16은 이높이 방향의 처짐량을 평가하기 위하여 이끝중앙 (P<sub>5</sub>) 에 집중하중이 작용할 때 이끝의 변형 및 피치선상의 변형과 치폭방향 변위 계산위치의 관계를 대표적으로 표시한 것이다. Fig. 16에 의하여 최대값은 동일한 위치에 있으며 이끝에서 처짐과 피치선상의 처짐과의 비는 치폭방향 그것과 거의 일정하다. 이경향은 다른 경우에 있어서도 동일하다.

집중하중을 이끝 각점에 작용할 때 Hofer의 위험단면 위치에 있어서 이뿌리응력과 치폭방향 하중위치와의 관계를 오목,볼록면으로 구분하여 Fig. 17과 Fig. 18에 표시하였다. Fig. 17로부터 중앙부 (P<sub>5</sub>) 에 집중하중이 작용하는 경우 내단부로부터 외단부에 걸쳐서 이뿌리응력의 변화가 작으므로 단부에서 구동하는 경우보다 중앙부에서 구동하는 방법이 치의 수명을 길게하고 안정된 구동이 얻어진다고 생각된다. 또한 오목면은 치직각 모듈이 내단부에서 작고 외단부로 향하여 증가하는 것에 관계없이 내단부에서 외단부까지 이뿌리응력의 최대값은 거의 동일하다. 이것은 베벨기어의 치직각 모듈이 작은 내단부에서 이뿌리 모서리 두께 반경이 크고 반대로 치직각 모듈이 큰 외단부에서 이뿌리 모서리 두께 반경이 작게되어 있기 때문이다. Fig. 18에서 볼록면에서 양단부 계산값이 중앙부분보다 비교적 높은 값을 나타내고 있으며 볼록면에 하중이 작용할때 이뿌리응력 상태는 梅澤<sup>(3)</sup>에 의하여 연구된 평치치 이뿌리응력 계산결과와 동일한 값을 나타내고 있다. 다음에 오목면과 볼록면의 비교를 오목,볼록 양면의 하중점 (P<sub>5</sub>) 에 집중하중을 작용할 때 이뿌리응력값을 Fig. 19에 표시한다. Fig. 19에 의하여 이뿌리응력값은 외단부만큼 오목,볼록비는 크게된다. 이현상은 Fig. 14와 동일한 형태로 이두께의 변화에 의한 것으로 생각된다. 또한 Fig. 20에 표시한 것 같이 집중하중이 피치선상에 작용할때도 이뿌리응력값은 낮은 값을 표시하고 있다.

#### 4.4 처짐식의 추정 계산

스파이얼 베벨기어는 이높이 일정의 등고치 이므로 치줄기 방향의 내단으로부터 외단에 걸쳐서 모듈이 크게 되



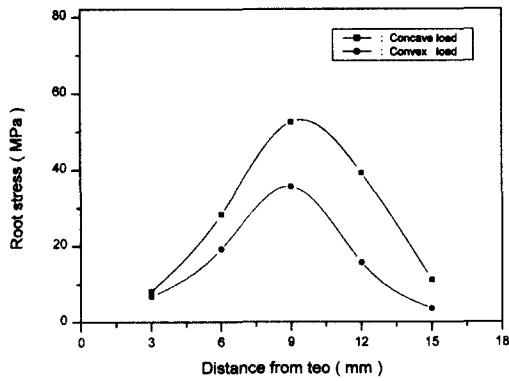


Fig. 19 Relation between stress and distance from toe(load : tip)

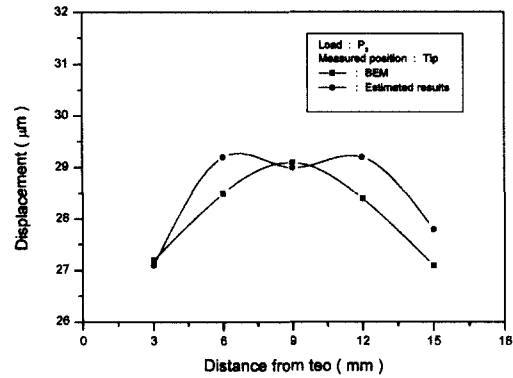


Fig. 21 Relation between displacement and distance from toe

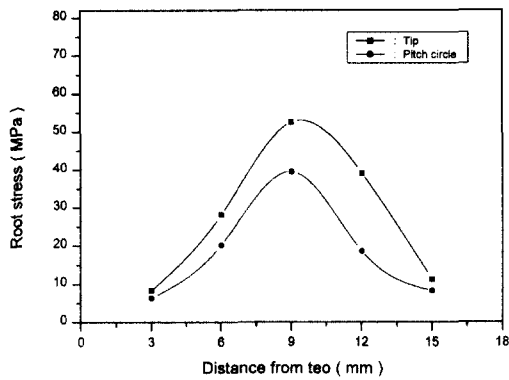


Fig. 20 Relation between stress and distance from toe of concave tooth

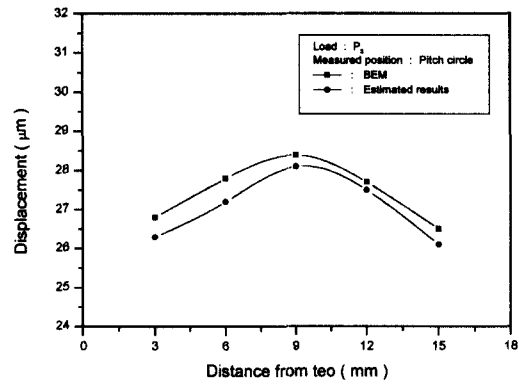


Fig. 22 Relation between displacement and distance from toe

기 때문에 높은치, 낮은치 상태이다. 그러므로 치의 굽힘 영향에 의한 접촉선상의 처짐 정도를 검토한다.

접촉선상의 처짐분포를 조사하기 위하여 치면상의 처짐 분포의 열벡터값으로부터 치폭방향에서 식(6)을 사용하여 이높이 방향으로 20점을 계산하여 선형근사하였다. 따라서 임의의 위치의 처짐량 즉 접촉선상의 처짐량을 구하였다. 치면에 대하여 맞물림 접촉선의 기울기는 내단부, 외단부, 오목, 볼록면에서 다소 차이가 있지만 중앙부의 경사를 17°로 일정으로 하였다. 본 논문에서 1매 맞물림 영역에 한정하여 계산하였다. 구동치차와 피구동치차는 치 형이 동일한 형태로 있기 때문에 구동치차의 볼록면은 피구동치차의 볼록면과 동일한 형태의 경향을 나타내는 것으로 생각된다.

우선 집중하중이 볼록면 이끝에 작용하는 경우의 계산결과를 최소자승법으로 식(6)의 각 상수를 구하였다. 식(6)의 계산결과를 Fig. 21에 표시한다. Fig. 21에 의하여 경계요소법 및 추정식의 계산결과는 잘 일치하고 있다.

치폭방향에 있어서 치의 처짐변화를 이뿌리응력과 동일한 형태로 Coleman<sup>(1)</sup>의 식을 적용가능한 것을 알 수 있었다. 이들의 결과는 다른 하중을 작용할때에도 적용가능한 것을 확인하였다.

집중하중이 오목면 이끝 중앙부에 작용하는 경우의 계산결과를 최소자승법에 의하여 식(9)의 각 상수를 구하였다. 식(9)의 계산결과를 비교하여 Fig. 22에 표시한다. Fig. 22에 의하여 계산결과는 잘 일치하고 있으며 이식은 치의 처짐계산에 충분히 적용가능한 것을 알 수 있었다.

이들의 결과는 다른 이끝에 하중을 작용할때에도 적용 가능한 것을 확인하였다. 따라서 치의 치짐식도 식(9)의 형식으로 표시되는 것을 알 수 있다. 식(9)중의 각 계수는 치차 제원등에 의하여 변화하기 때문에 계수와 치차제원과의 관계를 상세하게 조사함으로써 광범위하게 적용 가능한 치짐식의 도입이 가능한 것을 알 수 있었다.

## 5. 결 론

본 논문은 스파이얼 베벨기어에 하중을 작용할때 인접 치차의 이뿌리응력과 그 하중위치와의 관계를 선형근사화하고 실험 및 유한요소법으로 계산한 이뿌리응력을 보조정보로하여 경계요소법으로 치의 치짐특성을 조사하고 치의 치짐근사식을 유도하는 역문제를 적용하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 맞물림이 1에 가까운 경우, 맞물림 종료시는 이뿌리 응력의 맞물림 일차, 이차 성분이 크게 나타난다. 이것은 맞물림종료시에 급격하게 제하되므로 치의 치짐의 시간적 변위량이 크게 되기 때문이다.
- (2) 이뿌리응력의 맞물림 일차성분은 치차오차에, 또한 이뿌리응력의 맞물림 2차성분은 치의 강성에 의하여 큰 영향을 받는다.
- (3) 치폭방향의 치의 치짐분포는 평치차 및 베벨치차와 동일한 형태의 경향을 나타낸다. 그러나 외단부에 접근하는 만큼 비틀림각이나 이두께가 크게 되고 오목, 볼록 양치면에서 치짐의 비가 증가한다.
- (4) 구동시의 이뿌리응력값에 의하여 구동시의 치의 치짐량이 명확하게 되었으며 1매 맞물림 영역에서 맞물림 전달오차가 이뿌리응력값으로부터 추정가능하고 기본식의 각계수와 치차제원과의 관계를 조사하는 것으로 광범위하게 적용가능한 치짐식의 도입이 가능하게 되었다.

## 참 고 문 헌

- (1) Coleman, W., 1969, "AGMA 229", 19.
- (2) 梅沢彦, 1970, "齒車のための有限幅ラック形片持はりのたわみと 齒元應力(第 1 報, たわみ)", 日本機械學會 論文集, 第 36 卷, 第 288 號, pp. 1385~1393.
- (3) 梅沢彦, 1971, "齒車のための有限幅ラック形片持はりのたわみと 齒元應力(第 2 報, 齒元應力と實驗)", 日本機械學會 論文集, 第 37 卷, 第 297 號, pp. 1041~1050.
- (4) 新井典久, 原田 進, 會田倭夫, 1981, "薄肉平齒車の 曲げ強度特性に關する研究", 日本機械學會 論文集, 第 47 卷, 第 413 號, pp. 47~56.
- (5) 久保愛三, 上野 柘, 金 晶立, 有甫泰常, 中西 勉, 1985, "齒當たりと齒車の性能にする基礎的研究(第 1 報, 基礎的 考察)", 日本機械學會 論文集, 第 51 卷, 第 467 號, pp. 1559~1567.
- (6) 新井典久, 河本 滋, 廣恒倭樹, 1990, "曲がり齒傘齒車の動特性に關する基礎的研究", 日本機械學會 論文集, 第 56 卷, 第 527 號, pp. 1900~1905.
- (7) 新井典久, 河本 滋, 廣恒倭樹, 水本克典, 1990, "曲がり齒率齒車の動特性に關する基礎的研究(こう配齒の場合)", 日本機械學會 論文集, 第 56 卷, 第 530 號, pp. 2727~2731.
- (8) 新井典久, 野中鐵池, 影山眞佐富, 加藤直哉, 加藤昭悟, 大森利雄, 1990, "齒車裝置の振 動雜音問題と齒車の傳達誤差および總合起振力關", 日本機械學會 論文集, 第 56 卷, 第 532 號, pp. 3404~3409.
- (9) 新井典久, 河本 滋, 米田春明, 廣恒倭樹, 水本克典, 1991, "曲がり齒率齒車に關する研究(三次元有限要素法による齒元應力解析)", 日本機械學會 論文集, 第 57 卷, 第 538 號, pp. 2114~2117.
- (10) 新井典久, 河本 滋, 廣恒倭樹, 水本克典, 上西康弘, 1991, "曲がり齒率齒車のかみあい 特性について(クリソン式こう配齒曲がり齒傘齒車とエリコン式等高齒曲がり齒 傘齒車の比較)", 日本機械學會 論文集, 第 57 卷, 第 540 號, pp. 2703~2708.
- (11) I. Huseyin Filiz and O. Eyercioglu, 1995, "Evaluation of Gear Tooth Stresses by Finite Element Method", Trans. of the ASME, Vol. 117, pp. 232~239.
- (12) 田村久司, 市野之彬, 川崎一正, 1997, "準假想冠齒車を用いたすく齒傘齒車の齒切法", 日本機械學會 論文集, 第 63 卷, 第 606 號, pp. 579~584.
- (13) 田中秀樹, 嘉彰, 1997, "逆問題手法を用いた宇宙機に對する衝擊力の推定", 日本 機械學會 論文集, 第 63 卷, 第 608 號, pp. 1172~1178.
- (14) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., 1984, "Boundary Element Techniques", Springer-Verlag, Berlin.

- (15) Banerjee, P.K., 1994, "The Boundary Element Methods in Engineering", McGraw-Hill, New York.
- (16) James H. Kane, 1994, "Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics", Prentice Hall, New Jersey.
- (17) 박성완, 1994, "경계요소법에 의한 유한폭 판재내의 원형 함유물과 균열의 상호간섭에 대한 연구", 대한기계학회 논문집, 제 18권, 제 6호, pp. 1474~1482.