

# 파수영역 이산 웨이블릿 변환을 이용한 효율적인 그린함수 표현에 관한 연구

## An Application of k-domain Discrete Wavelet Transform for the Efficient Representation of Green Function

주 세 훈 · 김 형 동

Saehoon Ju · Hyeongdong Kim

### 요 약

그린함수의 효율적인 표현을 위하여 파수영역 웨이블릿 변환 개념을 이용하였다. 파수영역 웨이블릿 변환을 공간영역에서 가변 윈도우를 사용하여 등가적으로 구현하였다. 제안된 방법은 공간영역 그린함수에 대하여 윈도우 함수를 이용한 필터링과정, 고유함수의 전개를 통한 중심이동과정, 그리고 푸리에 변환과정으로 이루어진다. 파수영역 이산 웨이블릿 변환이 적용된 그린함수의 수식을 유도하였고, 근거리 그린함수와 원거리 그린함수를 표현하여 파수영역에서 비교하여 특성에 대하여 논의하였다.

### Abstract

The discrete wavelet concept in the k-domain is applied to efficiently represent Green function of integral equations. Application of discrete wavelet concept to Green function in the k-domain can be implemented equivalently by using spatial domain variable-sized windows. The proposed method consists of constant Q-filtering, changing the center of coordinates, and transforming spatially filtered Green functions into those in the k-domain. A mathematical expression of Green function based on the discrete wavelet concept is derived and its characteristics are discussed.

### I. 서 론

대표적인 적분방정식 전자파 해석법인 모멘트법(MoM: Method of Moment)<sup>[1]</sup>은 해석 구조에 맞는 그린함수가 포함된 적분방정식의 해를 구하는 방법이다. 다양한 응용 전자파 문제의 해석에 적용되고 있는 정확한 방법이지만 전기적으로 큰 문제를 해석하는 경우에는 일반적으로 많이 쓰이는 공간영역의 펄스 기저함수를 사용했을 경우 이산화된 행렬 방정식의 임피던스 행렬에 0이 아닌 요소가 대부분 임으로 해를 구하는데 많은 메모리와 해석시간이

필요하다. 기존의 펄스 기저함수를 사용할 경우 밀집된 행렬방정식이 만들어지는 이유는 기저함수가 그린함수의 다중분해능 특성(근거리 영역의 공간적으로 국부적인 신호와 원거리 영역의 진행파 모드에 국한된 파수영역에서 국부적인 신호)을 표현하는데 펄스함수가 부적절하기 때문이다.

그린함수의 다중 분해능 특성은 연속 웨이블릿 변환(CWT: Continuous Wavelet Transform)을 이용하여 공간-파수영역에서 효과적으로 나타낼 수 있었으며, 파수영역에서 웨이블릿을 적용함으로써 공간-파수영역에서의 그린함수 특성을 효과적으로 표

한양대학교 전자전기공학부(Department of Electrical and Computer Engineering, Hanyang University)

· 논문 번호 : 20010822-109

· 수정완료일자 : 2001년 11월 15일

현할 수 있음이 연구되었다<sup>[2]~[4]</sup>. 또한 웨이블릿 변환을 이용한 그린함수의 구현에 있어서는 이산 웨이블릿 변환(DWT: Discrete Wavelet Transform)을 적용하면 공간-파수영역에서 국부적인 특성을 효과적으로 표현할 수 있으므로 기저함수의 수를 상당히 줄일 수 있어 계산의 효율을 높일 수 있다는 것도 함께 지적되었다. 본 논문에서는 파수영역에서 이산 웨이블릿 변환개념을 적용한 그린함수의 형태를 제안하고 수식을 유도하였으며, 파수영역에서 제안된 그린함수를 표현하여 이산 웨이블릿을 적용하여 그린함수를 효과적으로 표현할 수 있음을 보였다.

## II. 본 론

### 2-1 그린 함수의 특성

반복법을 사용하는 간접 모멘트법(iterative MoM)에서는 산란 필드는 주어진 구조의 그린함수와 가정된 전류의 컨벌루션(convolution)을 통하여 구할 수 있으며 경계조건을 만족할 때까지 반복계산을 한다. 직접법과 마찬가지로 간접법에서도 그린함수의 효과적인 표현은 모멘트법의 해를 구하는데 있어서 효율적인 계산을 의미하게 된다. 먼저 이차원 공간영역의 자유공간 그린함수(free-space Green function)를 살펴보자.

$$G(R) = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k_0 R) \quad (1)$$

윗 식에서  $H_0^{(2)}$ 는 0차 이종 Hankel 함수이며 R은 소스와 관찰점간의 거리를 나타낸다. 식 (1)의 그린함수는 파수영역 웨이블릿 변환(KDWT: spectral domain wavelet transform)을 이용하여 공간-파수영역에서 그 특성이 조사되었다<sup>[2]~[4]</sup>. 공간-파수영역에서의 웨이블릿 표현은 자유공간의 그린함수가 근거리 영역의 공간 국부적인 신호와 원거리로 갈수록  $k_0$  부근으로 집중되는 다중분해능 특성을 가지고 있음을 효과적으로 보여준다. 이러한 자유공간 그린함수를 공간영역에서 표현하는 것은 진행파 모드인  $k_0$ 가 공간적으로 퍼져있기 때문에 많은 메모리와 계산 시간을 필요로 하게 된다. 마찬가지로 파수영역에서의 표현도 근거리 영역의 공간 국부적인 신호

가 파수영역에서는 전체적으로 퍼져있기 때문에 효율적이지 못하다. 그러므로, 그린함수의 다중분해능 특성을 효과적으로 표현하기 위해서 공간 또는 파수 영역 외에 STFT(Short-Time Fourier Transform)나 WT(Wavelet Transform)의 적용을 검토해볼 수 있다. 하지만, STFT나 공간영역에서의 웨이블릿의 적용(SDWT: Space Domain Wavelet Transform)은 이미 연구된 바와 같이 그린함수의 특성과 기저함수의 공간-파수영역 특성이 불일치함으로써 다중분해능 특성을 효과적으로 표현하지 못한다<sup>[2]~[4]</sup>. 공간-파수영역에서의 그린함수로부터 KDWT 기저함수의 특성이 그린함수의 다중분해능 특성과 매우 잘 맞기 때문에 KDWT가 그린함수를 효율적으로 표현할 수 있음을 알게 되었다. 다음 절에서는 파수영역에서 이산 웨이블릿을 2차원 그린함수에 적용하는 방법에 대하여 설명하고 이러한 방법으로 구현된 그린함수의 수식을 유도할 것이다.

### 2-2 파수영역 이산 웨이블릿 변환 개념을 이용한 효율적인 그린함수 표현법

파수영역에서 웨이블릿을 적용은 공간영역에서 신호를 필터링(constant Q-filtering)하고 푸리에 변환(Fourier transforming)함으로써 등가적으로 구현할 수 있다<sup>[2]~[4]</sup>. 이산 웨이블릿 변환을 파수영역에서 적용하여 그린함수를 표현하기 위하여 다음식과 같이 공간영역에서의 그린함수를 동일한 Q값을 갖는 윈도우가 씌워진 여러 개의 그린함수 합으로 생각할 수 있다. (Constant Q-Filtering Phase)

$$\begin{aligned} G(R) &= \sum_i G(R) W_i(R - r_i) \\ &= \sum_i G_{w,i}(R) \\ &= G_{w,0}(R) + G_{w,1}(R) + G_{w,2}(R) + \dots \\ &\quad + G_{w,i}(R) + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)의 우변에 있는 공간영역에서 필터링된 그린함수  $G_{w,i}(R)$ 은 윈도우함수  $W_i(R - r_i)$ 에 의해서 한정되어진 그린함수로, 윈도우 함수 영역내에서 소스로부터  $r_i$ 만큼 떨어진 관찰점에서의 산란 필드를 나타낸다.

파수영역 그린함수에 이산 웨이블릿을 적용하는

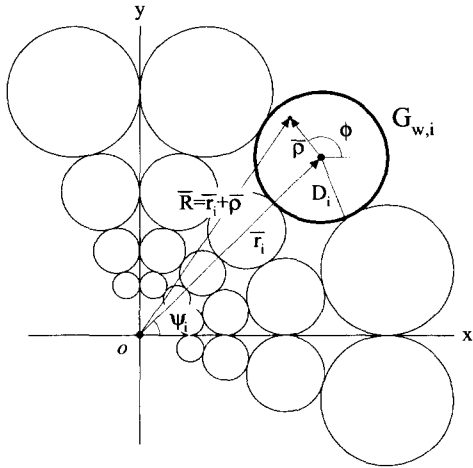


그림 1. 파수영역 이산 웨이블릿 적용된 그린함수의 효율적인 표현을 위한 공간 영역의 크기가 변하는 윈도우

것은 그림 1과 같은 변화하는 윈도우를 이용하여 공간영역 필터링을 하고, 좌표중심을 바꾸어 파수영역으로 푸리에 변환을 수행함으로써 구현할 수 있다. 이것은 파수영역에서 연속 웨이블릿을 구현하는 것<sup>[2]~[4]</sup>과 유사하며 제안된 방법이 이산적인  $r_i$ 를 갖는다는 점이 연속 웨이블릿의 적용과 틀린 것이다. 그림에서 벡터  $\bar{\rho}$ 의 크기와 각도는  $\rho$ 와  $\phi$ 이며,  $\bar{r}_i$ 의 크기와 위상은  $r_i$ 와  $\psi$ 이다.  $i$ 번째 윈도우 함수의 크기  $D_i$ 는 웨이블릿 변환에서의 "constant Q-filtering"과 같이  $D_i/r_i \approx$  상수가 되도록 결정해줄 수 있다<sup>[5],[6]</sup>. 이러한 일련의 과정을 통해서 다음의 필터링된 그린함수의 파수영역 변환식을 구할 수 있다. (Transforming Phase)

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{w,i}^{\%}(k, \alpha) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} G(R) W_i(R - r_i) \cdot \\ & e^{-jk\rho \cos(\alpha - \phi)} \rho d\phi d\rho \\ &= \int_0^{D_i} \int_0^{2\pi} G(|\bar{r}_i + \bar{\rho}|) e^{-jk\rho \cos(\alpha - \phi)} \rho d\phi d\rho \end{aligned} \quad (3)$$

여기에서  $\rho$ 와  $\phi$ 는 중심이 윈도우 함수  $W_i$ 의 중심과 일치하는 원통 좌표계의 스칼라 변수들이다.  $k$ 와  $\alpha$ 는 각각  $\rho$ 와  $\phi$ 의 원통 좌표계에서의 푸리에쌍이다. 바가 붙어있는 변수는 벡터량을 나타내고 있

으며 물결모양은 파수영역의 값을 의미한다. 윈도우 함수의 범위로 인해서 식 (3)의  $\rho$ 에 대한 적분은 0에서  $+\infty$ 가 아닌 0에서  $D_i$ 이다. 식 (3)의 파수영역 그린함수는 공간영역에서 윈도우함수로 필터링된 그린함수의 푸리에 쌍이다. 원점이 중심인 좌표계에서 관찰점을 중심으로 하는 원통 좌표계의 변수로 그린함수를 나타내기 위하여 고유함수인 Bessel 함수로 그린함수를 전개하면 공간영역에서 그린함수를 다음과 같이 나타낼 수 있다. (addition theorem)

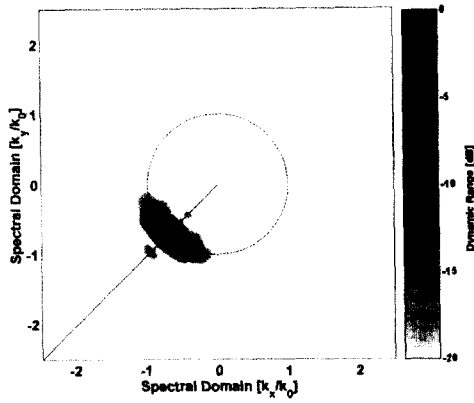
$$G(\bar{r}_i + \bar{\rho}) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(2)}(r_0 r_i) e^{jn\psi} J_n(K_0 \rho) e^{-in(\phi + \pi)} \quad (4)$$

식 (4)에서  $H_n^{(2)}$ 는  $n$ 차 이종 Hankel 함수를,  $J_n$ 은  $n$ 차 일종 Bessel 함수를 각각 의미하며  $\rho < r_i$ 가 정되었다. 그러므로 윈도우 함수의 범위 내에서 식 (4)와 같이 중심이 윈도우 함수의 중심과 일치하는 Bessel 함수를 기저로 식 (3)의 필터링된 그린함수도 마찬가지로 표시할 수 있다. 식 (4)를 식 (3)에 대입한 후 Bessel 함수에 대한 적분 공식을 적용하면, 파수 영역 이산 웨이블릿 변환된 이차원 그린함수의 식을 얻을 수 있다.

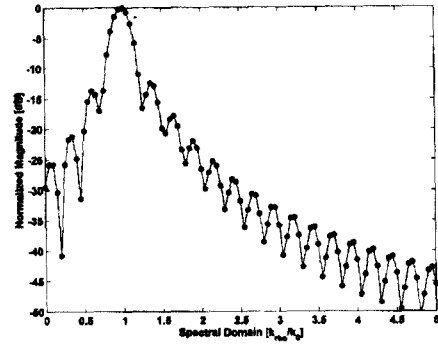
$$\begin{aligned} \tilde{G}_{w,i}^{\%}(k, \alpha) &= \frac{1}{4j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0 r_i) e^{in\psi_i} \cdot \\ & 2\pi e^{-ina} e^{in\frac{3\pi}{2}} \int_0^{D_i} J_n(k_0 \rho) J_n(k\rho) \rho d\rho \\ &= \frac{\pi}{2j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0 r_i) e^{in(\psi_i - \alpha - \frac{3\pi}{2})} \\ & \times \begin{cases} \frac{D_i^2}{2} \left[ J_n(k_0 D_i) + \left(1 - \frac{n^2}{k_0^2 D_i^2}\right) J_n^2(k_0 D_i) \right] \\ \text{at } k = k_0 \\ \frac{D_i}{k^2 - k_0^2} [kJ_n(k_0 D_i)J_{n+1}(kD_i) \\ - k_0 J_n(kD_i)J_{n+1}(k_0 D_i)] \text{ otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

윗 식에서 알 수 있듯이 파수영역 이산 웨이블릿 개념을 적용한 자유공간의 그린함수는 소스와 관찰점간의 거리  $r_i$ 에 대한 함수와 공간영역 윈도우  $D_i$ 에 대한 함수로 구성된다.

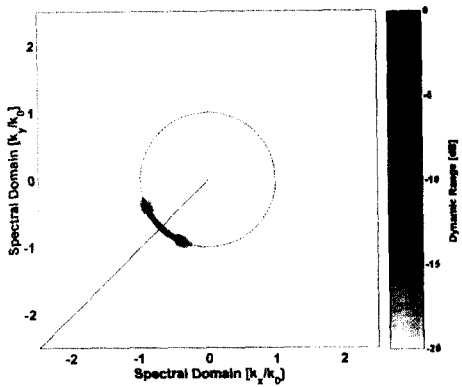
그림 2에서 파수영역 이산 웨이블릿이 적용된 그린함수를 근거리 영역( $r_i = 4\lambda_0$ ,  $\psi_i = \pi/4$ ,  $D_i = 2\lambda_0$ )



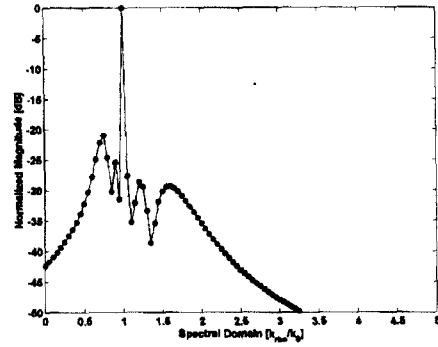
(a) 근거리 영역 그린함수  
( $r_i = 4 \lambda_0$ ,  $\phi_i = \pi/4$ ,  $D_i = 2 \lambda_0$ )



(a) 근거리 영역 그린함수  
( $r_i = 4 \lambda_0$ ,  $\phi_i = \pi/4$ ,  $D_i = 2 \lambda_0$ )



(b) 원거리 영역 그린함수  
( $r_i = 20 \lambda_0$ ,  $\phi_i = \pi/4$ ,  $D_i = 10 \lambda_0$ )



(b) 원거리 영역 그린함수  
( $r_i = 20 \lambda_0$ ,  $\phi_i = \pi/4$ ,  $D_i = 10 \lambda_0$ )

그림 2. 파수영역 이산 웨이블릿 개념이 적용된 그린함수의 파수영역 이미지

과 원거리 영역( $r_i = 20 \lambda_0$ ,  $\phi_i = \pi/4$ ,  $D_i = 10 \lambda_0$ )에서 각각 구하여 파수영역에서 표현하였다. 그레이스케일의 범위는 0~20 dB이며, 점선은  $k = k_0$ 의 원을 나타내고 있다. 그림 3은 그림 2의 파수영역 그린함수를  $k_\rho$ 를 따라서 크기를 비교한 그림이다. 파수영역에서 그린함수의 국부적인 신호들이 원거리 영역에서  $k_0$  진행 모드에 집중되고 있음을 확인할 수 있다. 또한 원거리 영역 그린함수의 파수영역 이산 웨이블릿 적용은  $k = k_0$  부근에 신호가 매우 집중이 되기 때문에 산란 필드 계산시에 이러한 특성을 이용한다면 고속 전자파 해석 알고리즘을 구현할 수 있게 된다. 실제로, 매우 큰 윈도우 크기를 갖는 원거

그림 3. 파수영역 이산 웨이블릿 개념이 적용된  $k_\rho$ 에 대한 그린함수

리 영역에서는 식 (5)의  $D_i$ 에 관한 함수가  $k = k_0$  위치에 놓인 델타함수가 되며, 이러한 그린함수는 FMM(Fast Multipole Method)에서 사용되고 있는 그린함수와 일치한다<sup>[7]</sup>. 파수영역 웨이블릿 개념을 이용한 그린함수의 효과적인 표현은 수치해석적인 면에서 볼 때 산란체의 크기가 커짐에 따라 계산량을 선형적으로 늘어나게 할 수 있기 때문에 계산량을 줄이는데 있어서 유용하게 적용될 수 있을 것이다.

### III. 결 론

파수영역 이산 웨이블릿 개념을 적용하여 효율적인 그린함수의 표현법을 제시하였다. 파수영역 이산 웨이블릿의 구현은 공간영역에서 크기가 변하는 원

도우와 고유함수의 전개를 통한 좌표중심변환, 파수 영역으로의 푸리에 변환의 과정으로 이루어진다. 제안된 방법을 적용하여 그린함수의 수식을 유도하였으며, 그 특성을 설명하였다. 현재 제안된 그린함수의 웨이블릿 표현법을 이용한 고속 전자파 해석법에 대한 연구를 진행중에 있다.

참 고 문 헌

[1] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Method*, Macmillan Co., New York, 1968.

[2] H. Kim and H. Ling, "On the application of fast wavelet transform to the integral equation solution of electromagnetic scattering problems", *Microwave Opt. Tech. Lett.*, vol. 6, pp. 168-173, Mar. 1993.

[3] H. Kim, H. Ling, and C. Lee, "A fast moment method algorithm using spectral domain wave-

let concepts", *Radio Science*, vol. 31, pp. 1253-1261, 1996.

[4] S. Kahng, S. Ju, and H. Kim, "Continuous wavelet representation of Green functions in layered media", *Electron. Lett.*, vol. 34, pp. 378-379, 1998.

[5] O. Rioul and P. Duhamel, "Fast algorithms for discrete and continuous wavelet transforms", *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 38, pp. 569-586, 1992.

[6] A. C. Bovik, N. Gopal, T. Emmoth, and A. Restrepo, "Localized measurement of emergent image frequencies by Gabor wavelets", *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 38, pp. 691-712, 1992.

[7] R. Coifman, V. Rokhlin, and S. Wandzura, "The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian prescription", *IEEE Antennas Propag. Mag.*, vol. 35, pp. 7-12, 1993.

주 세 훈

1997년 2월: 한양대학교 전파공학과 (공학사)  
 1993년 3월: 한양대학교 전파공학과 (공학석사)  
 1999년 3월~2000년 2월: 서울대학교 수중음향특화연구센터 연구원  
 2000년 3월~현재: 한양대학교 전자통신전파공학과 박사과정  
 [주 관심분야] 안테나 및 마이크로파 회로 설계, 전자파 수치해석

김 형 동



1984년 2월: 서울대학교 전자공학과 (공학사)  
 1986년 2월: 서울대학교 전자공학과 (공학석사)  
 1992년 5월: The University of Texas at Austin (Ph. D.) 안테나 및 마이크로파공학 전공  
 1989년 5월~1992년 5월: Microwave Research Lab., Dept. of Electrical and Computer Eng., The University of Texas at Austin :Research Assistant  
 1992년 6월~1993년 1월: Microwave Research Lab., Dept. of Electrical and Computer Eng., The University of Texas at Austin: Postdoctoral Fellow  
 1993년 3월~1996년 2월: 한양대학교 전파공학과 전임강사  
 1996년 3월~2001년 2월: 한양대학교 전파공학과 조교수  
 2001년 3월~현재: 한양대학교 전자전기공학부 부교수  
 [주 관심분야] 이동통신용 안테나, 마이크로파 회로, 초음파 공학 전자파 수치해석, 웨이블릿 변환의 수치해석 응용, EMI/EMC 해석