

외해 경계에서의 수심 불연속에 의한 항만 공진의 正解 유도 Derivation of Correct Solutions for Harbor Oscillations by Depth Discontinuity along Offshore Boundary

정원무* · 박우선* · 서경덕**

Weon Mu Jeong*, Woo Sun Park*, and Kyung Doug Suh**

要 旨: 장주기파가 깊은 바다에서 수심이 급격히 감소하는 대륙사면을 지나 대륙붕 위로 전파해 들어오는 경우 육지에서 반사된 파가 대륙사면에서 외해로 전파해 나가지 못하고 재반사되어 들어오기 때문에 육지 쪽에서 커다란 수위진동을 일으키는 것은 잘 알려진 사실이다. Liu(1986)는 반원형 외해 경계를 따라 수심의 불연속이 존재하는 지형을 가정하여 이러한 현상을 해석하였으나 그의 해석해에는 오류가 있었다. 본 논문에서는 직선해안 및 직사각형 항만에 대한 Liu(1986)의 해석해를 수정하고, 이를 정 등(1998)의 확장형 완경사방정식에 기초한 Galerkin 유한요소 모형에 의한 결과와 비교하여 확인하였다.

핵심용어 : 수심 급변, 장주기파, 항만 공진, 해석해, 유한요소 모형

Abstract □ It is well known that when long waves propagate from deep ocean onto a continental shelf with a very steep continental slope, the waves reflected from the shore can not propagate offshore and are re-reflected from the continental slope so that large water level fluctuations are induced near the shore. Liu (1986) has analyzed this phenomenon by assuming a topography which has a depth discontinuity along a semicircular offshore boundary, but his solution is erroneous. In the present paper, we correct his analytical solutions for a straight shoreline and a rectangular harbor. The corrected solution is then compared with the numerical results of the Galerkin finite element model of Jeong *et al.* (1998), which is based on the extended mild-slope equation.

Keywords : depth discontinuity, long-period waves, harbor resonance, analytical solution, finite element model

1. 서 론

지진해일(tsunami)의 내습에 의한 항만 공진은 비점성 선형 장파 이론의 범주 내에서는 지금까지 많은 연구가 수행되어져 왔다. Raichlen *et al.*(1983)은 항만 외곽시설의 배치와 외해의 해저 지형이 항만 공진의 증폭과 감쇠에 중요한 역할을 함을 명백하게 입증하였다. Momoi(1976)와 Liu(1983)는 대륙붕을 해안선에 평행한 띠 형태의 계단들로 모델링하여 항만 공진과 대륙붕 위를 전파하는 파

의 상호작용을 해석적으로 연구하였으며, 특히 Liu(1983)는 대륙붕의 존재로 인해 항만 공진이 크게 증가됨을 수치적으로 입증하였다.

한편, Liu(1986)는 정합점근전개법을 사용하여 외해측 반원형 경계를 따라 수심 불연속이 존재하는 경우 항만에서의 공진에 대한 해석해를 제시하였다. 그의 연구에서 진폭비의 증가는 주로 두 가지 인자에 기인되는 것으로 제시되었다. 첫째는 파가 해저 수심 불연속에 의해 포획되어 항입구 부근의 파랑 진폭이 증가되는 것으로 생각

*한국해양연구원 연안·항만공학연구본부(Coastal and Harbor Engineering Research Lab., Korea Ocean Research and Development Institute, Ansan P.O. Box 29, Seoul 425-600, Korea)

**서울대학교 지구환경시스템공학부 및 해양시스템공학연구소(School of Civil, Urban and Geosystem Engineering & Research Institute of Marine Systems Engineering, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea)

할 수 있다. 둘째는 방사 감쇠가 제1 공진주파수 부근에서는 거의 0이 되는 점이다. 그는 장파가 내습하기 쉬운 항만을 설계할 때는 항만 외부의 해저지형을 고려하여야 함을 결론적으로 제시하였다.

그러나 Liu(1986)의 해석해에는 상당한 오류가 포함되어 있다. 본 연구에서는 먼저 그 오류를 수정하고, 이를 정 등(1998)의 확장형 환경사방정식에 기초한 Galerkin 유한요소 모형에 의한 결과와 비교함으로써 수정된 해를 검증한다.

2. 수심 불연속에 의한 항만 공진의 正解 유도

2.1 천수 근사

Liu(1986)의 직사각형 항만(Fig. 1참조)에서는 항의 폭이 $2a$, 길이가 l , 항입구의 중심에서 원호 경계면까지의 거리가 R 이며 항의 폭이 파장에 비해 작은 것으로 가정한다. 반경 R 보다 내측 영역의 수심은 h_1 , 그리고 그 외측의 수심은 h_2 인 것으로 가정한다. 여기서는 선형 천수방정식을 사용하여 유속 $\hat{u}(x, y, t)$, $\hat{v}(x, y, t)$ 와 자유수면 변위 $\hat{\eta}(x, y, t)$ 를 나타낸다. 그러나 단지 각주파수 ω 를 가지고 시간적으로 주기적인 운동을 하는 입사파와 반사파를 검토하기로 하며 이 경우 해는 다음 식으로 표시될 수 있다.

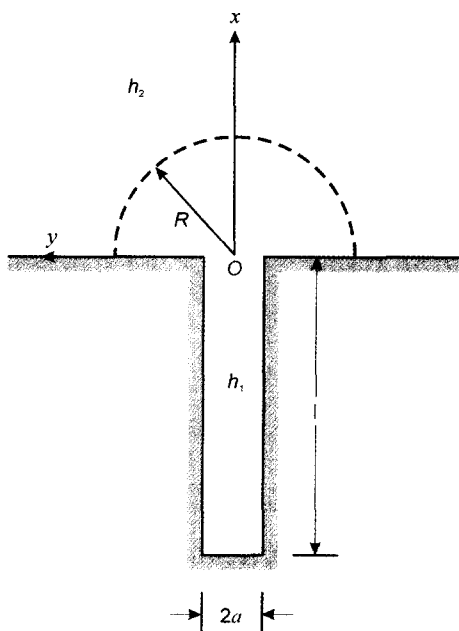


Fig. 1. Sketch of geometry and coordinates.

$$(\hat{u}, \hat{v}, \hat{\eta}) = Re\{(u, v, \eta)e^{-i\omega t}\} \quad (1)$$

선형 천수방정식은 다음 식으로 표시된다.

$$u = \frac{g}{i\omega} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{ig}{\omega} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2a)$$

$$v = -\frac{ig}{\omega} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{\omega^2}{g} \eta = 0 \quad (3)$$

해안선에 직각으로 입사하는 입사파는 무한 원방에서 다음 식으로 표시될 수 있다.

$$\eta_i = e^{-ik_2 x} \quad (4)$$

무한 원방에서는 입사파 진폭이 1로 취해지며, k_2 는 다음과 같이 수심 h_2 에 관계되는 파수이다.

$$k_2 = \frac{\omega}{\sqrt{gh_2}} \quad (5)$$

이후의 사용을 위해 식 (4)를 극좌표계 (r, θ) 에서 다음과 같이 표시한다(Mei, 1983).

$$\eta_i = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m (i)^m J_m(k_2 r) \cos m\theta \quad (6)$$

여기서, $\epsilon_0=1$ 및 $\epsilon_m=2(m=1, 2, \dots)$ 이며, J_m 은 제1종 m 차 Bessel 함수이다.

2.2 항만 내부의 해[Liu(1986)와 동일]

항만이 길고 좁은 것으로 가정하였으므로 $[O(k_1 a) \ll 1, O(k_1 l) \ll 1]$, 항만내의 파랑 운동은 본질적으로 항입구에서 $O(k_1 a)$ 의 거리에 있는 범위를 제외하면 1차원이 된다. 이 경우 자유수면 변위와 유속은 다음 식으로 표현될 수 있다(Miles, 1971, 1972; LeBlond and Mysak, 1978).

$$\eta(x) = T \cos k_1(x+l) \quad \text{for } x < 0 \quad (7a)$$

$$u(x) = \frac{ig}{\omega} T k_1 \sin k_1(x+l) \quad \text{for } x < 0 \quad (7b)$$

여기서

$$T = \frac{A}{\cos k_1 l - iZ \sin k_1 l} \quad (8)$$

$$k_1 = \frac{\omega}{\sqrt{gh_1}} \quad (9)$$

이며, A 는 항만 입구에서의 중복파(입사파와 반사파의 합)의

진폭, Z 는 해양 임피던스(ocean impedance, Miles, 1971, 1972; Miles and Lee, 1975; LeBlond and Mysak, 1978)를 나타낸다. 해양 임피던스의 실수 부분은 방사 감쇠, 허수 부분은 질량 유도저항(mass reactance)에 각각 해당된다.

2.3 항만 외부의 해

항만 외부의 자유수면 변위는 다음과 같이 두 부분으로 분리될 수 있다.

$$\eta = \eta^+ + \eta^- \quad \text{for } x > 0 \quad (10)$$

여기서 η^+ 는 항만이 존재하지 않을 때의 입사파와 반사파의 자유수면 변위를 나타내며, η^- 은 항만으로부터의 방사파에 해당된다. η^+ 와 η^- 은 모두 항만 외부의 해저 지형과 관계가 있다.

2.3.1 입사파와 반사파

먼저 항만이 없는 경우의 파동장을 고려한다. 입사파는 해안선 뿐만 아니라 수중의 반원형 계단(step)에 의해서도 반사된다. 해안선을 따라서는 다음과 같은 불투과 경계조건이 적용된다.

$$\frac{\partial \eta^+}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x=0 \quad (11)$$

계단의 가장자리를 가로질러서는 다음과 같이 자유수면 변위 η^+ 와 단위 길이당 체적속 $h\partial\eta^+/\partial r$ 의 연속조건이 성립한다.

$$[\eta^+] = 0 \quad \text{at } r=R \quad (12a)$$

$$\left[h \frac{\partial \eta^+}{\partial r} \right] = 0 \quad \text{at } r=R \quad (12b)$$

여기서 $[\]$ 은 계단 가장자리의 양쪽에서 계산되는 물리량의 차이를 나타낸다.

수중 반원형 계단이 존재하는 직선 해안선에 직각으로 입사하는 경우의 입사파-반사파 문제는 두 개의 반대되는 파열의 산란에 관한 해(Bessel 방정식의 해)의 중첩으로 간주할 수 있으므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\eta^+ = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\pm i)^n \epsilon_n J_n(k_1 r) \cos n\theta \quad \text{for } r < R \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} \eta^+ = & \sum_{n=0}^{\infty} B_n (\pm i)^n \epsilon_n H_n^{(1)}(k_2 r) \cos n\theta \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (\pm i)^n J_n(k_2 r) \cos n\theta \quad \text{for } r > R \end{aligned} \quad (13b)$$

여기서, η^+ 는 양의 x 방향으로 전파하는 입사파의 파랑장

을 나타내며, η^- 는 음의 x 방향으로 전파하는 입사파의 파랑장을 나타낸다. 식 (13a)는 $r < R$ 영역에서 Bessel 함수 $[H_n^{(1)}(k_1 r)]$ 로 표현되는 산란파 중에서 $r=0$ 에서 발산하는 singular 항 $[Y_n^{(1)}(k_1 r)]$ 을 제거한 식이며, 식 (13b) 우변의 제1항은 경계면에서의 산란파, 제2항은 입사파를 각각 나타낸다(Mei, 1983). 그리고 식 (13b)에 포함된 제1종 Hankel 함수, $H_n^{(1)}$ 은 방사 경계조건이 만족되도록 사용되었다. 단, 제1종 Hankel 함수의 윗첨자는 이후에서는 편의상 표기를 생략하였다. 이제 계단의 가장자리에서의 자유수면 변위와 단위 길이당 체적속의 연속조건을 도입하면 다음과 같이 정리된다.

$$[\eta^+] = 0 = [\eta^+ + \eta^-]_{r=R} - [\eta^+ + \eta^-]_{r=R^-} = \sum_{n=0}^{\infty} \{i^n + (-i)^n\}$$

$$\epsilon_n \cos n\theta \{A_n J_n(k_1 R) - B_n H_n(k_2 R) - J_n(k_2 R)\}$$

$$\begin{aligned} \left[h \frac{\partial \eta^+}{\partial r} \right] = 0 = & \left[h_1 \frac{\partial \eta^+}{\partial r} + h_1 \frac{\partial \eta^-}{\partial r} \right]_{r=R} - \left[h_2 \frac{\partial \eta^+}{\partial r} + h_2 \frac{\partial \eta^-}{\partial r} \right]_{r=R} \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} \{i^n + (-i)^n\} \epsilon_n \cos n\theta \end{aligned}$$

$$\times \{k_1 h_1 A_n J_n'(k_1 R) - k_2 h_2 B_n H_n'(k_2 R) - k_2 h_2 J_n'(k_2 R)\}$$

따라서, 다음 두 식이 성립한다.

$$A_n J_n(k_1 R) - B_n H_n(k_2 R) - J_n(k_2 R) = 0 \quad (14)$$

$$A_n k_1 h_1 J_n'(k_1 R) - B_n k_2 h_2 H_n'(k_2 R) - k_2 h_2 J_n'(k_2 R) = 0 \quad (15)$$

식 (14)에 $k_2 h_2 H_n'(k_2 R)$ 을, 그리고 식 (15)에 $H_n(k_2 R)$ 을 곱한 후 식 (14)에서 식 (15)를 빼서 B_n 이 포함된 항을 소거하면

$$A_n = \frac{k_2 h_2 [J_n(k_2 R) H_n'(k_2 R) - J_n'(k_2 R) H_n(k_2 R)]}{k_2 h_2 J_n(k_1 R) H_n'(k_1 R) - k_1 h_1 J_n'(k_1 R) H_n(k_2 R)}$$

이 된다. 식 (5)와 식 (9)의 정의 및 다음의 정의

$$\xi = k_1 R \quad (16a)$$

$$\epsilon = \frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_2}} = \frac{k_1 h_1}{k_2 h_2} \quad (16b)$$

를 사용하면 $k_2 R = \xi k_2 / k_1 = \xi \sqrt{h_1 / h_2} = \epsilon \xi$ 가 된다. 따라서

$$\begin{aligned} A_n = & \frac{J_n(\epsilon \xi) H_n'(\epsilon \xi) - J_n'(\epsilon \xi) H_n(\epsilon \xi)}{J_n(\xi) H_n'(\epsilon \xi) - \epsilon J_n'(\xi) H_n(\epsilon \xi)} \\ = & \frac{2i}{\pi \xi \epsilon [J_n(\xi) H_n'(\epsilon \xi) - \epsilon J_n'(\xi) H_n(\epsilon \xi)]} \end{aligned} \quad (17)$$

가 된다. 다음에 식 (14)에 $k_1 h_1 J_n'(k_1 R)$ 을, 그리고 식 (15)에 $J_n(k_1 R)$ 을 곱한 후 식 (14)에서 식 (15)를 빼서 A_n 이 포함된 항을 소거하면

$$B_n = \frac{k_1 h_1 J_n'(k_1 R) J_n(k_2 R) - k_2 h_2 J_n'(k_2 R) J_n(k_1 R)}{k_2 h_2 J_n(k_1 R) H_n'(k_2 R) - k_1 h_1 J_n'(k_1 R) H_n(k_2 R)}$$

이 되며, 따라서

$$B_n = \frac{\varepsilon J_n'(\xi) J_n(\varepsilon \xi) - J_n'(\varepsilon \xi) J_n(\xi)}{J_n(\xi) H_n'(\varepsilon \xi) - \varepsilon J_n'(\xi) H_n(\varepsilon \xi)} \quad (18)$$

가 된다. 참고로 Liu(1986)의 논문에 제시된 A_n 과 B_n 에 대한 표현은 다음과 같다.

$$A_n = \frac{2i}{\pi \xi [J_n(\xi) H_n'(\varepsilon \xi) - \varepsilon J_n'(\xi) H_n(\varepsilon \xi)]}$$

$$B_n = \frac{J_n(\xi) J_n'(\varepsilon \xi) - J_n(\varepsilon \xi) J_n'(\xi)}{J_n(\xi) H_n'(\varepsilon \xi) - \varepsilon J_n'(\xi) H_n(\varepsilon \xi)}$$

이제 입사파-반사파 파랑장의 해를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\eta^i = \eta^+ + \eta^-$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} 2A_{2m} \varepsilon_{2m}(i)^{2m} J_{2m}(k_1 r) \cos 2m\theta \quad \text{for } r \leq R \quad (19a)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} 2B_{2m} \varepsilon_{2m}(i)^{2m} H_{2m}^{(1)}(k_2 r) \cos 2m\theta + 2\cos k_2 x \quad \text{for } r > R \quad (19b)$$

항 입구의 중심 $r=0$ 에서의 입사-반사파 진폭을 구하기 위해 다음 관계식을 이용한다(Mei, 1983 참조).

$$\eta^i = \sum_{m=0}^{\infty} 2A_{2m} \varepsilon_{2m}(i)^{2m} J_{2m}(0) \cos 2m\theta = 2A_0 = A$$

이제 Abramowitz and Stegun(1970)을 참조하여 A 를 정리하면

$$A = 2A_0$$

$$= 2 \frac{J_0(\varepsilon \xi) H_0'(\varepsilon \xi) - J_0'(\varepsilon \xi) H_0(\varepsilon \xi)}{J_0(\xi) H_0'(\varepsilon \xi) - \varepsilon J_0'(\xi) H_0(\varepsilon \xi)}$$

$$= \frac{4i}{\pi \varepsilon \xi [-J_0(\xi) H_1(\varepsilon \xi) + \varepsilon J_1(\xi) H_0(\varepsilon \xi)]} \quad (20)$$

가 된다. 만일 $h_1=h_2$ (즉, $\varepsilon=1.0$)라면

$$A = \frac{4i}{\pi \xi [-J_0(\xi) J_1(\xi) - i J_0(\xi) Y_1(\xi) + J_1(\xi) J_0(\xi) + i J_1(\xi) Y_0(\xi)]} = 2$$

가 되며, 이는 항만 입구에서의 중복파 진폭이 입사파 진폭의 2배임을 만족한다.

2.3.2 방사파

항만의 폭이 파장에 비해 작은 것으로 가정하였으므로 항만으로부터의 방사파는 항입구의 중앙점에서의 점원(point source)에 의해 발생된 파로 간주할 수가 있다. 즉,

$$\frac{\partial \eta^R}{\partial x} = \delta(y) \quad \text{at } x=0 \quad (21)$$

따라서, 방사파는 θ 에 대해 독립적이며, 여기서 $\delta(y)$ 는 delta 함수이다. 식 (3)에서 $h=h_1=\text{constant}(r < R)$ 라면

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + k_1^2 \eta = 0$$

가 된다. 위의 Helmholtz 방정식은 원통 좌표계에서는 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} + k_1^2 \eta = 0$$

η 는 θ 에 대해 독립적이므로

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial r} + k_1^2 \eta = 0$$

가 되며, 상기 식과 무한 원방에서의 방사조건을 만족하는 해는 다음과 같이 나타낼 수 있다(Brebbia and Walker, 1979).

$$\eta^R = \frac{i}{2} B H_0^{(1)}(k_1 r) + \frac{i}{2} C H_0^{(2)}(k_1 r) \quad \text{for } r < R \quad (22a)$$

$$\eta^R = D H_0^{(1)}(k_2 r) \quad \text{for } r > R \quad (22b)$$

여기서 B, C 및 D 는 결정해야 할 상수들이다. 다음 관계식 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 을 사용하여 방사파를 다시 나타내면

$$\eta^R = \frac{i}{2} B H_0^{(1)}(k_1 \sqrt{x^2 + y^2}) + \frac{i}{2} C H_0^{(2)}(k_1 \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\frac{\partial \eta^R}{\partial x} = -\frac{i}{2} k_1 (B + C) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} J_1(k_1 \sqrt{x^2 + y^2})$$

$$+ \frac{i}{2} k_1 (B - C) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} Y_1(k_1 \sqrt{x^2 + y^2})$$

이 되며, $x, y \rightarrow 0$ 이면 $r \rightarrow 0$ 이므로 $J_1(k_1 r) \approx (k_1 r/2)/\Gamma(2) = \frac{1}{2} k_1 r, Y_1(k_1 r) \approx -\Gamma(1)/(k_1 \pi/2) = -2/(\pi k_1 r)$ 로 나타낼 수 있다. 따라서

$$\left. \frac{\partial \eta^R}{\partial x} \right|_{r \rightarrow 0} \approx -\frac{i}{4} k_1^2 (B+C)x - \frac{1}{\pi} (B-C) \frac{x}{x^2+y^2}$$

가 된다. 또한, $x=0$ 에서 식 (21)을 만족시키기 위해서는

$$\int \frac{\partial \eta^R}{\partial x} \Big|_{r \rightarrow 0} dy = 1$$

이 성립해야 한다. 따라서

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{-a}^a \left[-\frac{i}{4} k_1^2 (B+C)x - \frac{1}{\pi} (B-C) \frac{x}{x^2+y^2} \right] dy \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{-a}^a \left[-\frac{i}{4} k_1^2 (B+C)x - \frac{1}{\pi} (B-C) \frac{1}{x} \left\{ \frac{1}{1+(y/x)^2} \right\} \right] dy = 1 \end{aligned}$$

이 되며, 상기 식에서 좌변 제1항은 0이 된다.

한편, $y/x=t$ 로 놓으면 $dy=xd t$ 이다.

또한, 적분 구간은 $-a/x$ 부터 a/x 까지가 되며, 위 식은

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{-a/x}^{a/x} -\frac{1}{\pi} (B-C) \left(\frac{1}{1+t^2} \right) dy \\ &= -\frac{1}{\pi} (B-C) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\tan^{-1} \left(\frac{a}{x} \right) - \tan^{-1} \left(-\frac{a}{x} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{\pi} (B-C) \pi = 1 \end{aligned}$$

이 된다. 따라서

$$B-C=-1 \tag{23}$$

이다. 참고로 위 식은 Liu(1986)의 논문에서는 $B+C=1$ 로 제시되었다.

한편, 계단의 가장자리를 가로질러서는 다음과 같이 자유수면 변위 η^R 과 단위 길이당 체적속 $h \partial \eta^R / \partial r$ 의 연속조건이 성립해야 한다.

$$[\eta^R]=0 \quad \text{at } r=R \tag{24a}$$

$$\left[h \frac{\partial \eta^R}{\partial r} \right] = 0 \quad \text{at } r=R \tag{24b}$$

먼저, 식 (22)를 식 (24a)에 대입하면

$$\begin{aligned} & [\eta^R]_{r=R} = 0 \\ & \frac{i}{2} B H_0^{(1)}(k_1 R) + \frac{i}{2} C H_0^{(2)}(k_1 R) = D H_0^{(1)}(k_2 R) \end{aligned}$$

이 되며, 따라서

$$\frac{i}{2} B H_0^{(1)}(\xi) + C H_0^{(2)}(\xi) = D H_0^{(1)}(\epsilon \xi) \tag{25}$$

가 된다. 다음에 식 (22)를 식 (24b)에 대입하면

$$\begin{aligned} & \left[h \frac{\partial \eta^R}{\partial r} \right]_{r=R} = 0 \\ & -\frac{i}{2} k_1 h_1 [B H_1^{(1)}(k_1 R) + C H_1^{(2)}(k_1 R)] = k_2 h_2 D H_1^{(1)}(k_2 R) \\ & \frac{i k_1 h_1}{2 k_2 h_2} [B H_1^{(1)}(\xi) + C H_1^{(2)}(\xi)] = D H_1^{(1)}(\epsilon \xi) \end{aligned}$$

가 되며, 따라서

$$\frac{i \epsilon}{2} [B H_1^{(1)}(\xi) + C H_1^{(2)}(\xi)] = D H_1^{(1)}(\epsilon \xi)$$

즉

$$\frac{i \epsilon}{2} [B H_0^{(1)'}(\xi) + C H_1^{(2)'}(\xi)] = D H_0^{(1)'}(\epsilon \xi)$$

가 된다. 이제 식 (25)에 $H_0^{(1)}(\epsilon \xi)$ 를, 그리고 식 (26)에 $H_1^{(1)}(\epsilon \xi)$ 를 곱한 후 식 (25)에서 식 (26)을 빼서 D 가 포함된 항을 소거하면

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} B H_0^{(1)}(\xi) H_1^{(1)}(\epsilon \xi) + \frac{i}{2} C H_0^{(2)}(\xi) H_1^{(1)}(\epsilon \xi) \\ & \quad - D H_0^{(1)}(\epsilon \xi) H_1(\epsilon \xi) - \left[\frac{i \epsilon}{2} B H_1^{(1)}(\xi) H_0^{(1)}(\epsilon \xi) \right. \\ & \quad \left. - \frac{i \epsilon}{2} C H_1^{(2)}(\xi) H_0^{(1)}(\epsilon \xi) - D H_1^{(1)}(\epsilon \xi) H_0^{(1)}(\epsilon \xi) \right] \\ &= \frac{i}{2} B [H_0^{(1)}(\xi) H_1^{(1)}(\epsilon \xi) - \epsilon H_1^{(1)}(\xi) H_0^{(1)}(\epsilon \xi)] \\ & \quad + \frac{i}{2} C [H_0^{(2)}(\xi) H_1^{(1)}(\epsilon \xi) - \epsilon H_1^{(2)}(\xi) H_0^{(1)}(\epsilon \xi)] = 0 \end{aligned}$$

이 된다. 식 (23)을 이용하면

$$\begin{aligned} & (C-1)[H_0^{(1)}(\xi) H_1^{(1)}(\epsilon \xi) - \epsilon H_1^{(1)}(\xi) H_0^{(1)}(\epsilon \xi)] \\ & \quad + C[H_0^{(2)}(\xi) H_1^{(1)}(\epsilon \xi) - \epsilon H_1^{(2)}(\xi) H_0^{(1)}(\epsilon \xi)] \\ &= C[H_0^{(1)}(\xi) H_1^{(1)}(\epsilon \xi) - \epsilon H_1^{(1)}(\xi) H_0^{(1)}(\epsilon \xi) \\ & \quad + H_0^{(2)}(\xi) H_1^{(1)}(\epsilon \xi) - \epsilon H_1^{(2)}(\xi) H_0^{(1)}(\epsilon \xi)] \\ & \quad - H_0^{(1)}(\xi) H_1^{(1)}(\epsilon \xi) + \epsilon H_1^{(1)}(\xi) H_0^{(1)}(\epsilon \xi) = 0 \end{aligned}$$

이 되며, 따라서

$$C = \frac{H_0^{(1)}(\xi) H_1^{(1)}(\epsilon \xi) - \epsilon H_1^{(1)}(\xi) H_0^{(1)}(\epsilon \xi)}{2[J_0(\xi) H_1^{(1)}(\epsilon \xi) - \epsilon J_1(\xi) H_0^{(1)}(\epsilon \xi)]} \tag{27}$$

$$B = \frac{H_0^{(1)}(\xi) H_1^{(1)}(\epsilon \xi) - \epsilon H_1^{(1)}(\xi) H_0^{(1)}(\epsilon \xi)}{2[J_0(\xi) H_1^{(1)}(\epsilon \xi) - \epsilon J_1(\xi) H_0^{(1)}(\epsilon \xi)]} - 1 \tag{28}$$

이 된다. 그리고 D 는 식 (25)나 (26)에서 구할 수 있다. 참고로 Liu(1986)의 논문에 제시된 C 와 B 에 대한 표현은 다음과 같다.

$$C = \frac{H_0(\xi)H_0'(\epsilon\xi) - \epsilon H_0'(\xi)H_0(\epsilon\xi)}{2[J_0'(\xi)H_0^{(1)}(\epsilon\xi) - \epsilon J_0'(\xi)H_0(\epsilon\xi)]}$$

$$B = 1 - \frac{H_0(\xi)H_0'(\xi) - \epsilon H_0'(\xi)H_0(\epsilon\xi)}{2[J_0(\xi)H_0'(\epsilon\xi) - \epsilon J_0'(\xi)H_0(\epsilon\xi)]}$$

식 (22)와 (23)으로부터 항입구 부근의 방사파는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \eta^R &= \frac{i}{2}(C-1)H_0^{(1)}(k_1r) + \frac{i}{2}CH_0^{(2)}(k_1r) \\ &= -\frac{i}{2}H_0^{(1)}(k_1r) + \frac{i}{2}C[H_0^{(1)}(k_1r) + H_0^{(2)}(k_1r)] \\ &= -\frac{i}{2}H_0^{(1)}(k_1r) + iCJ_0(k_1r) \end{aligned} \quad (29)$$

상기 식에서 우변 제2항은 r 방향의 증폭파를 나타낸다.

3. 유한요소모형과의 비교

여기서는 수정된 Liu(1986)의 해석해와 유한요소 모형에 의한 계산 결과를 비교하여 모형을 검증한다. Liu(1986)가 사용한 모형 항만은 Ippen and Goda(1963) 또는 Lee(1969)가 수리모형실험을 실시한 바 있는 직사각형 모형 항만과 그 크기가 본질적으로는 동일하다. Liu(1986)는 직사각형 항만 부분이 없는 경우 반원형 부분의 중앙점(Fig. 1의 원점에서, 그리고 직사각형 항만 부분이 포함된 경우 항오의 중앙점(Fig. 1의 P)에서의 반응을 해석적인 방법으로 구하였다.

수치계산 시에는 편의상 항입구의 중앙에 위치한 원점에서 원호 경계면까지의 거리 R 을 Ippen and Goda(1963)의 모형 항만에서의 수심과 동일하게 0.2572512 m로 하였다. Fig. 1에 보인 바와 같이 수심은 $r=R$ 의 내부(유한요소 영역)에서는 $h=h_1$, 그리고 $r=R$ 의 외부(무한요소 영역)에서는 $h=h_2$ 로 가정하므로 정합 경계면인 $r=R$ 에서는 수심의 불연속이 발생하게 된다.

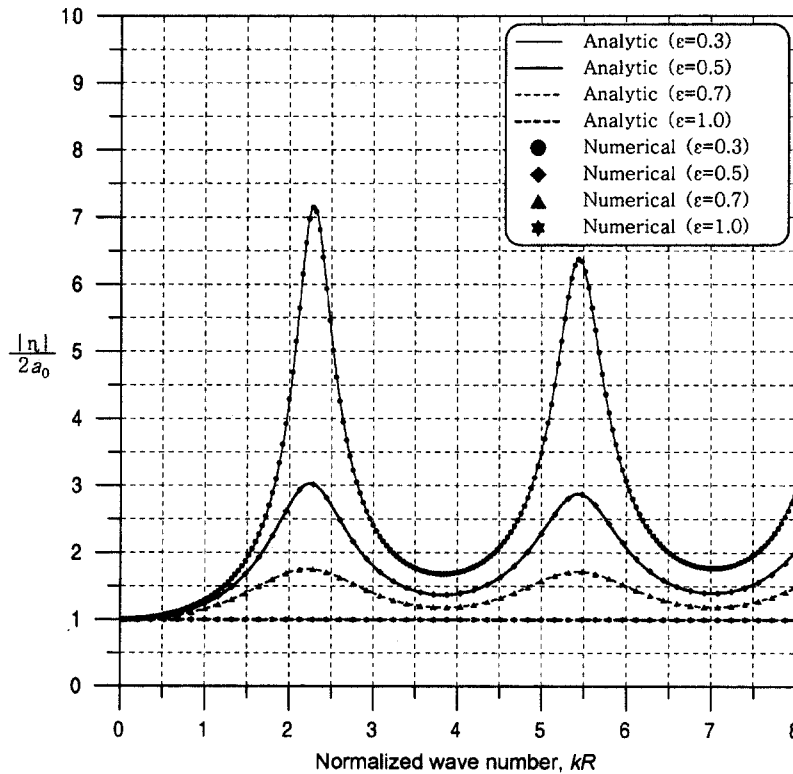


Fig. 2. Comparison of response curves between analytical and numerical results calculated at the center of a straight shoreline.

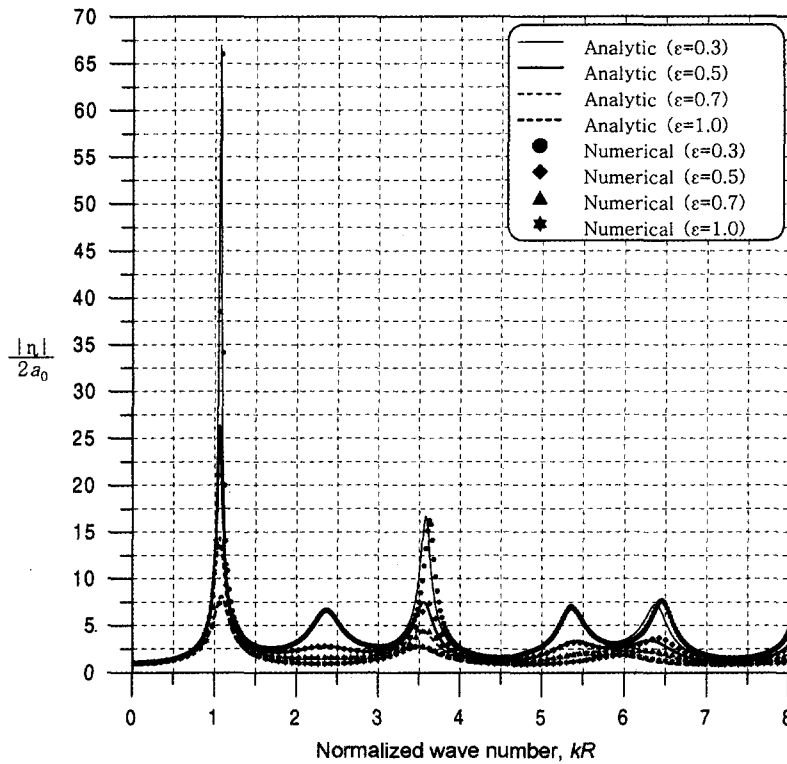


Fig. 3. Comparison of response curves between analytical and numerical results calculated at the innermost point of a rectangular harbor.

Fig. 2에는 직사각형 항만이 없는 직선 해안의 경우에 대해 수정된 Liu(1986)의 해석적인 결과[Liu(1986)의 Fig. 2 참조]와 본 수치계산에 의해 계산된 중앙점에서의 진폭비를 제시하였다. 그림에서 횡축은 파수 k 에 원호 경계면의 반경 R 을 곱한 무차원 파수 kR 이며, 종축은 수면 변위 η 를 중폭파의 진폭($2a_0$)으로 나눈 증폭비 $|n|/(2a_0)$ 를 나타낸다. 수치계산은 무차원 파수 $kR=0.01\sim 8.0$ 까지 0.01의 간격으로 실시되었다. 이 그림에서 ϵ 은 항만 내부(또는 유한요소 영역)과 항만 외부(또는 무한요소 영역)에서의 수심의 비이며 $\sqrt{h_1/h_2}$ 로 제시된다[식 (16b)참조]. 이들을 비교해보면 수심의 불연속으로 형성된 반원형 지역에서의 공진 모드와 진폭비 모두 해석해와 수치모형에 의한 결과가 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 한편, 예상한 바와 같이 수심차가 커질수록 $kR=2.29$ 에서의 제1 공진 모드와 $kR=5.44$ 에서의 제2 공진 모드의 진폭비가 크게 증가함을 알 수 있다. 또한, 이 결과들은 일직선으로 이루어진 해안에서도 본 경우와 같이 특정 지역과 그를 둘러싼 지역 사이에 급격한 수심차가 존재하면 상당한 진폭비의 공진

이 출현할 수 있음을 보여주고 있다.

직사각형 항만의 만오에서의 공진 특성을 두 가지 방법으로 구한 결과를 제시한 Fig. 3[Liu(1986)의 Figs. 4와 5 및 Table 1참조]을 살펴보면 이 경우에도 해석적인 방법과 수치모형에 의한 결과가 상당히 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 이 경우에는 수심차가 커짐에 따라 진폭비가 매우 증가되어 $\epsilon=0.3$ 인 경우 제1 공진 모드에서의 진폭비가 60을 초과하고 있다. 또한, $kR=1.06, 2.37, 3.57, 5.35$ 및 6.38 에서의 공진 모드가 수심차가 커질수록 분명하게 나타나고 있다. 이 중 제1, 제3 및 제5 공진 모드는 직사각형 항만의 제1, 제2 및 제3 공진 모드이며 제2 및 제4 공진 모드는 Fig. 2의 결과를 고려하면 항외측의 수심 불연속으로 인해 나타나는 것으로 생각된다. 즉, Fig. 2와 Fig. 3을 비교해 보면 항외측 수심 불연속으로 인해 나타난 공진 모드의 경우 직사각형 항만에서도 해석해와 수치계산 결과가 양호한 일치를 보이는 반면, 직사각형 항만에서의 제1, 제3 및 제5 공진의 경우 수치계산에 의한 공진의 침투치가 약간 단주기축에서 나타나고

있다. 이는 해석해의 경우 항의 폭이 파장에 비해 작은 것으로 가정하고 방사파를 항입구의 중앙점에서의 점원에 의해 발생된 파로 간주하여 구하였으나 실제로는 항의 폭이 유한하므로 수치계산 시에는 이러한 점이 반영되어 나타난 차이로 판단된다.

4. 결 론

본 논문에서는 항 외측에 수심 불연속이 존재하는 항만에서의 부진동 증폭 현상에 대하여 해석해를 구한 Liu(1986)의 논문에 나타난 오류를 수정하고, 이를 직선 해안 및 직사각형 항만에 대하여 적용한 결과를 확장형 환경사방정식을 지배방정식으로 사용하는 Galerkin 유한요소 모형에 의한 결과와 비교하였다. 본 연구를 통해 구해진 주요 결론은 아래와 같다.

- 반원형 외해 경계를 따라 수심의 불연속이 존재하는 지역 내의 직선 해안 또는 직사각형 모형 항만에서의 공진에 대하여 Liu(1986)가 제시한 해석해의 오류를 수정하였으며, 수정된 해석해와 유한요소 모형에 의한 수치계산 결과를 비교하여 양자가 잘 일치함을 확인하였다.

- 직사각형 모형 항만의 제1, 제3 및 제5 공진 모드인 경우 수치계산에 의한 공진의 첨두치가 약간 단주기 측에서 나타났으며, 이는 해석해의 경우 항의 폭이 파장에 비해 작은 것으로 가정하고 방사파를 항입구의 중앙점에서의 점원에 의해 발생된 파로 간주하여 구하였으나 실제로는 항의 폭이 유한하므로 수치계산 시에는 이러한 점이 반영되어 나타난 차이로 판단된다.

참고문헌

정원무, 이길성, 박우선, 채장원, 1998. 확장형 환경사방정식에 기초한 Galerkin 유한요소 모형, 한국해양·해양공학회지, 10(4): 174-186.

Abramowitz, M. and Stegun, A., 1970. *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1046 p.

Brebbia, C.A. and Walker, S., 1979. *Dynamic Analysis of Off-shore Structures*, Butterworth, 323 p.

Ippen, A.T. and Goda, Y., 1963. Wave induced oscillations in harbor: The solution for a rectangular harbor connected to the open-sea, *Rep. 59*, Hydrodynamic Laboratory, MIT.

LeBlond, P.H. and Mysak, L.A., 1978. *Waves in the Ocean*, Elsevier Oceanography Series 20, Elsevier, 602 p.

Lee, J.J., 1969. Wave induced oscillations in harbors of arbitrary shape, *Report KH-R-20*, W.M. Keck Lab. of Hydrodynamics and Water Resources, California Inst. of Tech., 266 p.

Liu, P.L.-F., 1983. Effects of the continental shelf on harbor resonance, In: K. Iida and T. Iwasaki (Editors), *Tsunamis - Their science and engineering*, Terra Scientific Pub. Co., Tokyo, pp. 303-314.

Liu, P.L.-F., 1986. Effects of depth discontinuity on harbor oscillations, *Coastal Engrg.*, 10, pp. 395-404.

Mei, C.C., 1983. *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*. World Scientific, 740 p.

Miles, J.W., 1971. Resonant response of harbours: An equivalent-circuit analysis, *J. Fluid Mech.*, 46, Part 2, pp. 241-265.

Miles, J.W., 1972. Wave propagation across the continental shelf, *J. Fluid Mech.*, 54, Part 1, pp. 63-80.

Miles, J.W. and Lee, Y.K., 1975. Helmholtz resonance of harbors, *J. Fluid Mech.*, 67, pp. 445-464.

Momoi, T., 1976. Scattering of long waves at the mouth of estuaries bordering on a continental shelf, Part I and II, *J. Phys. Earth*, 24, pp. 1-25 and 237-250.

Raichlen, F., Lepelletier, T.G. and Tam, C.K., 1983. The excitation of harbors by tsunamis, In: K. Iida and T. Iwasaki (Editors), *Tsunamis - Their science and engineering*. Terra Scientific Pub. Co., Tokyo, pp. 359-385.

Received April 18, 2001

Accepted June 19, 2001