

<논 문>

# 동심환내에서 회전하는 실린더에 작용하는 유체동하중 Fluid-dynamic Forces Acting on the Rotating Inner Cylinder in Concentric Annulus

심우건\*

Woo-Gun Sim

(2001년 1월 4일 접수 ; 2001년 3월 30일 심사완료)

**Key Words** : Spectral Collocation Method(스펙트럼 배치방법), Oscillatory Reynolds Number (진동 레이놀즈수), Fluid-dynamic Forces(유체동하중), Added Mass(부가질량), Viscous Damping(점성감쇠)

## ABSTRACT

The rotating inner cylinder executes a periodic translational motion in concentric annulus while the outer one is stationary. In the study of flow-induced vibrations and related instabilities, it is of interest to evaluate the fluid-dynamic forces acting on the rotating inner cylinder. In the present work, the governing equations for the confined flow are expressed as Navier-Stokes equations, including the steady and unsteady terms. The fluid parameters for steady flow generated by the rotating cylinder are determined analytically while the unsteady ones by the oscillatory motion are evaluated by a numerical method based on the spectral collocation method. In order to validate the numerical approach, the numerical results are compared with the analytical ones given by existing theories, for simple cases where the both approaches are applicable. Good agreement was found between the results. It is found the effects of the Reynolds number, defined by rotating velocity, on the fluid-dynamic forces are important for the case of relatively low oscillatory Reynolds number, defined by oscillatory frequency: i.e., in case of  $Re_w \gg Re_s$ .

## 1. 서론

회전하는 저널 베어링에 작용하는 정적 하중을 운전조건과 연계하여 분석함으로써 베어링의 성능을 검토할 수 있다<sup>(1,2)</sup>. 즉, 정상 운전 조건하에서의 편심비에 대한 정적 하중과 하중의 기울기를 예측할 수 있다. 가솔린 엔진과 같은 왕복동 기계에 설치된 저널 베어링의 운전 조건은 주기적으로 변동하며 특히 하중과 하중의 기울기는 엔진의 왕복 주기에 따라 변동하고 있다. 이러한 동적 하중에 의하여 베어링을 포함하는 구조물은 불안정하기도 하다<sup>(3)</sup>. 특히 회전체의 회전 속도가 매우 클 때에 주기적인 동적 하중에 의한 구조물의 안정성을 검토하는 것은 매우 중요하다.

따라서 동적 하중의 탄성계수와 점성계수를 고려하여 구조물의 안정성을 검토할 수 있다. 회전체의 축이 수평으로 설치되어 있는 경우에 윤회이론을 사용하여 정적 하중을 계산하며 정적 하중을 내포하고 있는 선형화된 지배방정식을 풀어 동적 하중을 예측하고 있다<sup>(4)</sup>. 그러나 회전체의 축이 수직인 경우에는 정적 하중에 대한 검토가 불필요하며 비정상 유동장의 해석 결과를 이용하여 직접 동적 하중을 예측할 수 있다. 일체형 원자로의 주냉각펌프 축은 저널베어링에 의하여 수직으로 지지되어 있다. 물을 윤활유로 사용하고 있고 축이 수직으로 설치되어 있기 때문에 베어링에 작용하는 축에 수직인 부하는 상대적으로 작다<sup>(5)</sup>.

회전하지 않는 실린더의 단순 횡진동에 의한 유체의 동적 하중은 부가질량, 감쇠 및 탄성항으로 분류되며 부가질량과 점성 감쇠력에 대한 연구가 Friz<sup>(6)</sup>, Mateescu etc<sup>(7)</sup>와 Chen<sup>(8)</sup> 등에 의하여 수행되었다. 일반적으로 부가질량과 감쇠계수는 환의 간격이 증가할수록 감소하고 편심량이

\* 정회원, 한남대학교 기계공학과  
E-mail : wgsim@mail.hannam.ac.kr  
Tel : (042) 629-8089, Fax : (042) 629-8043

증가하면 증가함을 보이고 있다. 유체의 동점성,  $\nu$ , 과 진동 주파수,  $\omega$ , 에 근거한 진동 레이놀즈 수 ( $Re_s = \omega a^2 / \nu$ ) 가 증가하면 부가질량과 감쇠계수는 감소하고 있다. 유체에 의한 동적 하중을 고려하여 Paidoussis etc<sup>(9)</sup> 은 동심환 내의 내부 실린더의 동적 특성을 분석하였다. 회전체의 회전 진동은 베어링의 oil whirl과 관련하여 Lund<sup>(3)</sup>와 Myer<sup>(10)</sup>에 의하여 연구되었다. 이 때에 저널 베어링의 동적 거동을 묘사하는 비선형 지배방정식은 비교적 진동의 진폭이 작은 경우에 선형화 할 수 있고 정적 상태의 해를 활용하여 탄성계수와 감쇠계수를 구할 수 있다. 하지만 이 방법으로 부가질량을 예측하지 못하고 있다. 환 내부에서 회전하는 실린더의 안정성과 동적 특성을 예측하기 위한 모델이 Antunes<sup>(11,12)</sup> 등에 의하여 개발되었다. Antunes의 모델은 기존의 모델에 비하여 유동장을 비교적 정확하게 예측할 수 있으나 검시체적방법을 사용하였기에 미소체적에 작용하는 운동량 방정식에 근거하고 부가질량을 예측할 수 있는 새로운 모델의 개발이 요구되고 있다.

환내부 실린더의 회전 유동에 관한 연구는 저널 베어링의 하중과 기울기를 구하기 위하여 이미 오래 전부터 수행되었다. 일반적으로 베어링 윤활막의 유동장 해석은 윤활이론에 근거하여 단순화된 지배방정식을 사용하여 수행되었다. 최근 단순화된 지배 방정식을 사용하지 않고 미소체적에 작용하는 운동량 방정식으로부터 직접 지배방정식을 유도하고 스펙트럼 배치방법<sup>(7)</sup>을 사용하여 비교적 정확한 해를 구하는 모델이 개발되었다. 스펙트럼 배치방법에서 해는 미지수를 포함하는 다항식(Fourier, Chebyshev 등)의 합으로 표현되며 수치해석 영역의 배치점에 지배방정식과 경계조건을 대입하여 얻은 대수 방정식으로부터 다항식의 미지수를 구할 수 있다. 기존의 윤활이론에 비하여 수치해석방법은 비선형항의 효과를 고려할 수 있었으며 환의 두께가 커짐에 따라 비선형효과가 증가함을 보였다. 베어링의 oil whirl 현상에 의한 실린더의 안정성을 분석하기 위하여 실린더가 회전하고 동시에 진동할 때의 유동장 해석이 요구되고 있다. 하지만 아직까지 운동량 방정식으로부터 직접 두 운동에 의한 유동장을 해석한 예는 드물다.

저널 베어링에 작용하는 하중은 내·외부실린더가 동심인 경우에 한하여 엄밀해를 구할 수 있다<sup>(13)</sup>. 편심환의 경우에는 스펙트럼 배치방법<sup>(7,14)</sup>을 사용하여 내부실린더가 회전할 때에 발생하는 회전류의 유동장을 수치적으로 해석하였으나<sup>(1,15)</sup> 베어링의 진동과 관련하여 비정상 유동장을 해석하지는 않았다. 본 연구는 스펙트럼 배치방법을 활용하여 회전하는 내부 실린더가 진동을 동반할 때에 발생하는 유동장을 해석하고 이로부터 유체의 동적 하중을 구하려고 한다. 진동을 동반하는 경우에 내부 실린더에 작용하는 유체동하중은 압력과 표면마찰을 원주방향으로 적분

하여 구할 수 있으며 이를 두 실린더의 반경비와 두 종류의 레이놀즈 수에 따라 평가하였다. 유체동하중은 부가질량과 감쇠계수로 구분할 수 있으며 두 실린더의 간격비와 두 종류의 레이놀즈 수에 따라 평가하였다. 스펙트럼 배치 방법의 활용도를 검토하기 위하여 비교적 해석이 용이한 회전하는 축이 수직인 동심인 경우에 한하여 적용하였다. 기존의 단순화된 모델을 활용하여 비교적 간단한 경우의 어렵해를 구하고 본 수치해석 결과와 비교하여 검증하였다. 편심인 경우에는 유체변수의 원주방향에 대한 급수 전개가 요구되고 상당히 복잡하기 때문에 본 스펙트럼 배치 방법의 활용도를 본 논문에서 검토하고 추후에 수행하려고 한다.

## 2. 비정상 유동 방정식의 선형화

동심환 내부에서 회전하는 안쪽 실린더에 의하여 회전 유동장이 형성되며 회전체가 진동을 동반할 때에 유동장의 유체변수는 비정상항을 포함하게 된다. 비정상 점성 유동을 해석하기 위한 지배방정식은 운동량과 질량 보존의 법칙으로부터 유도되며 유체변수는 축방향, 반경방향, 원주방향 및 시간의 함수로 표시된다. 비정상유동을 포함하는 지배방정식은 정상류의 방정식과 비정상류의 방정식으로 분리할 수 있으며 진동의 진폭이 작은 경우에 비정상류의 지배방정식은 선형화할 수 있다. 동심환 내부의 정상 회전 유동의 엄밀해는 잘 알려져 있으나 비정상 유동의 지배방정식은 복잡하여 해를 쉽게 구할 수 없다. 따라서 스펙트럼 배치방법을 사용하여 비정상 유동장을 해석하려고 한다. 비정상 유동 방정식은 유동의 물리적 성질과 선정된 보관함수를 고려하여 물리영역으로부터 수치해석 영역으로 전이된다. Fig. 1에 보이듯이 동심환의 내부 실린더의 반경은 각각  $a$ 와  $b$ 이고 환의 간격은  $H(=b-a)$ 이다.

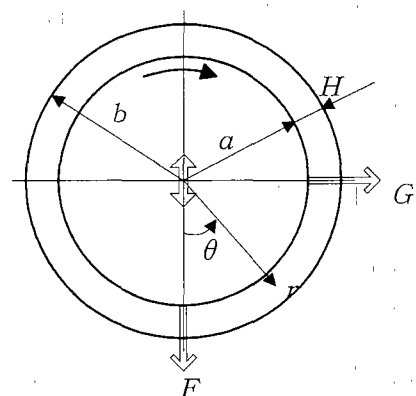


Fig. 1 Geometry of the centre-body rotating and oscillating in a concentric annulus.

환 내부에 흐르는 유동의 지배방정식은 Navier-Stokes의 운동량 방정식과 연속 방정식으로부터 유도되었다. 환 내부에 흐르는 비압축 유체의 밀도와 점성이 일정하고 체적력(body force)이 없으면 Navier-Stokes 방정식과 연속 방정식은

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \vec{V}, \quad \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

으로 표시된다. 여기에서 오일러의 도함수는

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \quad (2)$$

으로 표시되며 유체입자의 가속도를 의미한다. 회전체에 회전과 진동에 의하여 발생하는 유동장의 속도와 압력은 정상과 비정상 항으로 분류되며 정상항은 변위의 함수이고 비정상항은 변위와 시간의 함수이다.

$$\begin{aligned} \vec{V}(x, r, \theta, t) &= \vec{V}_s(x, r, \theta, t) + \vec{V}_p(x, r, \theta, t) \\ P(x, r, \theta, t) &= P_s(x, r, \theta, t) + P_p(x, r, \theta, t) \end{aligned} \quad (3)$$

여기에서 아래첨자 s와 p는 각각 정상과 비정상항을 표시한다.

정상과 비정상을 포함하는 유속과 압력을 지배방정식 (1)에 대입하면 정상유동 방정식과 비정상 유동 방정식으로 분류할 수 있고 정상류의 지배방정식은

$$(\vec{V}_s \cdot \nabla) \vec{V}_s = -\frac{1}{\rho} \nabla P_s + \nu \nabla^2 \vec{V}_s, \quad \nabla \cdot \vec{V}_s = 0 \quad (4)$$

으로 표시되고 비정상류의 지배방정식은

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}_p}{\partial t} + (\vec{V}_p \cdot \nabla) \vec{V}_p + (\vec{V}_s \cdot \nabla) \vec{V}_p &= -\frac{1}{\rho} \nabla P_p + \nu \nabla^2 \vec{V}_p \\ \nabla \cdot \vec{V}_p &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

으로 선형화 할 수 있다.

환내부에 흐르는 정상 및 비정상 유동의 속도는 각각 축방향, 반경방향 및 원주방향 성분으로 표시된다.

$$\begin{aligned} \vec{V}_s &= U \vec{i}_x + V \vec{i}_r + W \vec{i}_\theta \\ \vec{V}_p &= u' \vec{i}_x + v' \vec{i}_r + w' \vec{i}_\theta \end{aligned} \quad (6)$$

동심인 내부 실린더가 회전할 때 발생하는 정상 회전유동은 반경방향의 유속은 무시되며 두 실린더가 무한히 길다고 가정하면 축방향의 유속 또한 무시된다. 따라서 정상류의 운동량 방정식과 연속방정식은 단순화되며 다음 식을 사용하여 구할 수 있다<sup>(13)</sup>.

$$\frac{W^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{dP_s}{dr}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{W}{r^2} = 0 \quad (7)$$

회전체의 경계면에서의 경계조건은

$$W|_{r=a} = W_0 \quad (8)$$

으로 표시된다, 여기서 표면에서의 원주방향 유속은  $W_0 = 2\pi a \cdot \text{rpm}/60$ 으로 회전수와 반경으로부터 구할 수 있다. 여기서 rpm은 내부 실린더의 분당 회전수를 의미한다, 지배방정식과 경계조건으로부터 원주방향의 유속의 엄밀해를 구할 수 있다<sup>(13)</sup>.

$$W = \frac{W_0}{h(2+h)} \left( \frac{(1+h)^2}{r/a} - \frac{r}{a} \right) \quad (9)$$

여기서 환의 간격은 내부 실린더의 반경에 대하여 무차원화 할 수 있다.

$$h = H/a = (b-a)/a \quad (10)$$

외부실린더와 동심인 내부실린더의 회전에 의하여 발생하는 정상유동장의 해를 고려하면 비정상 유동장의 지배방정식 (5)에서 정상유동의 원주방향 변화율과 반경방향의 유속을 포함하는 항은 무시할 수 있다. 또한 환의 간격에 비하여 병진운동의 진폭이 상대적으로 작다고 가정하면 비정상 유속의 곱으로 표시되는 항은 무시할 수 있다. 즉 비정상 유속의 곱 혹은 정상 유속의 원주방향 변화율과 반경방향 유속의 곱으로 표시되는 비선형 대류항은 일반적으로 다른항에 비하여 상당히 작다. 따라서, 비정상 유동장 해석을 위하여 본 수치 해석 모델에 사용된 Navier-Stokes의 운동량 방정식과 연속 방정식은

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'}{\partial t} + v' \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{W}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} + \frac{Wv'}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} \\ &+ \nu \left[ \frac{\partial^2 w'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w'}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w'}{\partial \theta^2} - \frac{w'}{r^2} \right. \\ &+ \left. \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right] \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{W}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} - \frac{2w'W}{r} \\ &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v'}{\partial \theta^2} \right. \\ &- \left. \frac{v'}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w'}{\partial \theta} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta} + \frac{\partial v'}{\partial r} + \frac{v'}{r} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

으로 표시된다. 지배방정식은 회전체와 고정체 표면에서의 경계조건에 의하여 영향을 받으며 점성유동의 경우에 경계면에서의 미끄럼이 없으므로 각각

$$w' = -\dot{e}_v \sin \theta, \quad v' = \dot{e}_v \cos \theta \quad (12)$$

으로 나타낼 수 있으며, 여기서 회전동체의 진동속도,  $\dot{e}_v$ , 는

$$\dot{e}_v = \epsilon a \Omega e^{i\omega t} \quad (13)$$

이고  $\Omega$ 는 진동주파수이다. 따라서,  $\epsilon$ 는 내부 실린더 반경에 대한 무차원 진동 변위이다.

### 3. 수치해석방법

본 수치해석에서는 스펙트럼 배치방법<sup>(7,14)</sup>을 사용하였다. 지배방정식과 경계조건을 고려하여 해를 구하기 위하여 유체의 변수는 반경방향과 원주방향의 함수로 변수 분리할 수 있으며 각각 적절한 선택된 다항식으로 표시된다. 이때 다항식은 미지수(a priori unknown coefficients)를 포함하고 있다. 편심환의 물리적 영역의 기하학적 형상을 고려하고 식 (12)를 참조하면 유동의 변수는 원주방향으로 Fourier 함수를 사용할 수 있다. 동심인 실린더가 회전하는 유동장의 해석 결과<sup>(1)</sup>를 검토하면 유체의 변수는 반경방향으로 선형과 포물선형이 지배적이고 고차항일수록 영향이 적을 것이 예상되므로 Chebyshev 다항식을 정의하여 사용할 수 있다. 따라서 유동장은 물리적 영역으로부터 수치해석 영역으로의 변환되어진다. 수치해석 영역의 배치점에 지배방정식과 경계조건을 대입하여 얻은 대수 방정식으로부터 다항식의 미지수를 구할 수 있다. 수학적 의미에서 배치응용방법은 미분방정식을 풀기 위한 가중잉여방법(methods of weighted residuals)의 하나로 분류할 수 있으며 시험함수(test functions)는 배치점에 중심을 둔 일종의 dirac delta 함수이다. 결과적으로 고차항을 고려하지 않은 다항식을 지배방정식에 대입하여 배치점과 경계면에서의 잉여치는 0이다. 스펙트럼 배치방법에 대한 자세한 내용은 참고문헌 (7)과 (14)에 수록되었다.

지배방정식의 유동변수들은 해석 결과를 일반화하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수를 사용하여 표현하는 것이 편리하다.

$$\begin{aligned} \widehat{W} &= \frac{W}{W_0}, \quad \widehat{p} = \frac{p'}{\rho a^2 \Omega^2 \varepsilon e^{i\Omega t}}, \quad \widehat{w} = \frac{w'}{ia\Omega \varepsilon e^{i\Omega t}}, \\ \widehat{v} &= \frac{v'}{ia\Omega \varepsilon e^{i\Omega t}} \end{aligned} \quad (14)$$

위 식에서 비정상 유동의 유체의 변수는 실수부와 허수부로 분리할 수 있다.

유동의 무차원 변수( $\widehat{v}$ ,  $\widehat{w}$ ,  $\widehat{p}$ )는 다음과 같이 스펙트럼 형태의 급수 전개된 다항식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \widehat{v} &= \sum_j \sum_k [ \widehat{V}_{cjk} \cos k\theta + \widehat{V}_{sjk} \sin k\theta ] T_j(z) \\ \widehat{w} &= \sum_j \sum_k [ \widehat{W}_{cjk} \cos k\theta + \widehat{W}_{sjk} \sin k\theta ] T_j(z) \\ \widehat{p} &= \sum_j \sum_k [ \widehat{P}_{cjk} \cos k\theta + \widehat{P}_{sjk} \sin k\theta ] T_j(z) \end{aligned} \quad (15)$$

변수 분리형의 식 (15)에서  $\widehat{V}_{cjk}$ ,  $\widehat{V}_{sjk}$ ,  $\widehat{W}_{cjk}$ ,  $\widehat{W}_{sjk}$ ,  $\widehat{P}_{cjk}$ ,  $\widehat{P}_{sjk}$ 는 상수로서 미지수이며 각각 실수부와 허수부로 분리할 수 있다. 예를 들면  $\widehat{P}_{cjk} = \widehat{P}_{Rcjk} + i\widehat{P}_{Icjk}$ , 변수분리형

의 원주방향 함수,  $F_k(\theta)$ ,와 반경방향 함수,  $T_j(z)$ ,는 각각 원주방향과 반경방향으로 급수 전개된 다항식으로서 물리적 현상에 적절한 급수 함수를 선택하여 사용할 수 있다. Chebyshev 다항식을 사용하기 위하여 원주방향의 좌표는 다음식을 사용하여 수치해석 영역으로 변환하는 것이 편리하다.

$$r = a + \frac{H}{2} (1 - z) \quad (16)$$

Chebyshev 다항식은 수치해석영역이  $z=-1$ 에서  $z=1$ 까지이다.

반경방향의 좌표변환 식 (16)을 사용하고 무차원 함수식 (14)를 고려하면 지배방정식 (11)은 수치해석 영역으로 변환되며

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \widehat{w}}{\partial z^2} - A \frac{\partial \widehat{w}}{\partial z} + A^2 \frac{\partial^2 \widehat{w}}{\partial \theta^2} - A^2 \widehat{w} + 2A^2 \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \theta} \\ &+ i \frac{Re_s}{2} h A \frac{\partial \widehat{p}}{\partial \theta} - i \frac{Re_s}{4} h^2 \widehat{w} + \frac{Re_w}{4} \widehat{v} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial z} \\ &- \frac{Re_w}{4} A \widehat{W} \frac{\partial \widehat{w}}{\partial \theta} - \frac{Re_w}{4} A \widehat{W} \widehat{v} = 0 \\ &\frac{\partial^2 \widehat{v}}{\partial z^2} - A \frac{\partial \widehat{v}}{\partial z} + A^2 \frac{\partial^2 \widehat{v}}{\partial \theta^2} - A^2 \widehat{v} - 2A^2 \frac{\partial \widehat{w}}{\partial \theta} \\ &+ i \frac{Re_s}{2} h \frac{\partial \widehat{p}}{\partial z} - i \frac{Re_s}{4} h^2 \widehat{v} - \frac{Re_w}{4} A \widehat{W} \frac{\partial \widehat{v}}{\partial \theta} \\ &- \frac{Re_w}{2} A \widehat{w} \widehat{W} = 0 \quad \frac{\partial \widehat{v}}{\partial z} - A \widehat{v} - A \frac{\partial \widehat{w}}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

으로 나타낼 수 있다. 여기서 상수 A는

$$A = \frac{h}{2 + (1 - z)h} \quad (18)$$

으로 표시되고  $Re_w$ 는 환의 평균두께와 회전원주속도에 근거한 레이놀즈 수이고  $Re_s$ 는 진동 주파수에 근거한 진동 레이놀즈 수이다.

$$Re_w = \frac{2W_0(b-a)}{\nu}, \quad Re_s = \frac{\Omega a^2}{\nu} \quad (19)$$

지배방정식은 경계방정식 (12)을 만족하며 경계방정식은

$$\begin{aligned} \widehat{w}|_{z=1} &= \sum_k \widehat{W}_{cjk} \cos k\theta + \widehat{W}_{sjk} \sin k\theta = -\sin \theta, \\ \widehat{v}|_{z=1} &= \sum_k \widehat{V}_{cjk} \cos k\theta + \widehat{V}_{sjk} \sin k\theta = \cos \theta \end{aligned} \quad (20)$$

으로 무차원화 할 수 있다.

다항식으로 표현된 유체의 변수를 지배방정식에 대입하면  $6 \times j \times k$ 의 미지수를 포함하는 대수 방정식으로 표시된다. 미지수를 풀기 위하여 경계조건을 포함하는  $6 \times j \times k$ 의 배치점에 적용하여 행렬식을 얻을 수 있다. 이 때 배치점은 물리현상을 고려하여 적절하게 선택하여야 한다. 예를

들면 유동 변수의 변화가 큰 경계면 부근에서 배치점을 보다 많이 선택하는 것이 바람직하다. 식 (17)을 고려하고 Fourier의 함수의 일 이차 미분항은 변형된 급수계수를 갖는 급수함수로 전개되므로 경계방정식을 포함하는 지배방정식을  $q(=6 \times j \times k)$ 개의 배치점에 대입하여 얻은 행렬식  $(q \times q)$ 은

$$E^{(q)}(\widehat{V}_{cjk}, \widehat{V}_{sjk}, \widehat{W}_{cjk}, \widehat{W}_{sjk}, \widehat{P}_{cjk}, \widehat{P}_{sjk}; \theta_m, z_n) = 0 \quad (21)$$

$j \in (1, N), \quad k \in (1, M)$

으로 나타낼 수 있다. 위 식에서  $\theta_m$ 과  $z_n$ 은 배치점을 의미하고 Chebyshev다항식과 Fourier 함수에서 각각  $N, M$  이상의 고차항은 고려하지 않았다. 이로부터 수치해석 영역에서 정의된 무차원 변수의 미지수를 계산할 수 있고 유체변수를 물리적 영역으로 역 변환하여 유동장을 해석할 수 있다.

#### 4. 부가질량 및 감쇠계수

회전하는 내부 실린더의 진동에 의한 동적 하중은 실린더의 표면에 작용하는 전단응력과 압력을 원주방향으로 적분하여 구할 수 있다. 따라서 회전하는 내부 실린더에 작용하는 대칭선 방향(진동방향)의 힘,  $F$ ,과 대칭선에 수직인 방향(진동방향에 수직방향)의 힘,  $G$ ,는 각각 (Fig. 1 참조)

$$F = \int_0^{2\pi} (\tau_{rr}|_{r=a} \cos \theta - \tau_{r\theta}|_{r=a} \sin \theta) a d\theta \quad (22)$$

$$G = \int_0^{2\pi} (\tau_{rr}|_{r=a} \sin \theta + \tau_{r\theta}|_{r=a} \cos \theta) a d\theta$$

으로 표시되며 여기서  $\tau_{rr}$ 과  $\tau_{r\theta}$ 는

$$\tau_{rr} = -p' + 2\mu \frac{\partial v'}{\partial r} \cdot \tau_{r\theta} = \mu \left\{ \frac{\partial w'}{\partial r} + \frac{w'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \right\} \quad (23)$$

으로써 압력에 의한 수직응력과 전단응력항으로 구성되어 있다. 따라서 무차원 변수, 좌표변환함수 및 급수전개로 표시되는 해의 형태를 고려하면 식 (23)은

$$\tau_{r\theta}|_{r=a} = \rho a^2 \Omega^2 \epsilon e^{i\Omega t} \frac{1}{Re_s} \sum_j \sum_k \frac{-2}{h} [ \widehat{W}_{cjk} \cos k\theta + \widehat{W}_{sjk} \sin k\theta ] T_j'(1) + [ \widehat{W}_{cjk} \cos k\theta + \widehat{W}_{sjk} \sin k\theta ] T_j(1) + [ -k \widehat{V}_{cjk} \sin k\theta + k \widehat{V}_{sjk} \cos k\theta ] T_j(1) \quad (24)$$

$$\tau_{rr}|_{r=a} = -\rho a^2 \Omega^2 \epsilon e^{i\Omega t} \sum_j \sum_k [ \widehat{P}_{cjk} \cos k\theta + \widehat{P}_{sjk} \sin k\theta ] T_j(1)$$

$$+ \frac{4\epsilon}{Re_s} \frac{1}{h} [ V_{cjk} \cos k\theta + V_{sjk} \sin k\theta ] T_j'(1)$$

으로 표시할 수 있다. 여기서 식 (15)에 정의한 무차원 유체변수의 미지수는 선형대수방정식으로부터 구하였다. 식 (24)를 식 (22)에 대입하면 실린더에 작용하는 유체동하중은

$$F = -\rho \pi a^3 \Omega^2 \epsilon e^{i\Omega t} \sum_j \left\{ \widehat{P}_{cjl} T_j(1) + \frac{4\epsilon}{Re_s} \frac{1}{h} \widehat{V}_{cjl} T_j'(1) - \frac{\epsilon}{Re_s} \frac{2}{h} \widehat{W}_{sjl} T_j'(1) + \frac{\epsilon}{Re_s} \widehat{W}_{sjl} T_j(1) - \frac{\epsilon}{Re_s} \widehat{V}_{cjl} T_j(1) \right\} \quad (25)$$

$$G = -\rho \pi a^3 \Omega^2 \epsilon e^{i\Omega t} \sum_j \left\{ \widehat{P}_{sjl} T_j(1) + \frac{4\epsilon}{Re_s} \frac{1}{h} \widehat{V}_{sjl} T_j'(1) + \frac{\epsilon}{Re_s} \frac{2}{h} \widehat{W}_{cjl} T_j'(1) - \frac{\epsilon}{Re_s} \widehat{W}_{cjl} T_j(1) - \frac{\epsilon}{Re_s} \widehat{V}_{sjl} T_j(1) \right\}$$

으로 나타낼 수 있다. 여기서 스펙트럼방법에 따라 식 (15)에서 보였듯이 유체의 변수를 정의할 때 사용된 상수,  $\widehat{V}_{cjk}, \widehat{V}_{sjk}, \widehat{W}_{cjk}, \widehat{W}_{sjk}, \widehat{P}_{cjk}, \widehat{P}_{sjk}$ ,는 실수부와 허수부로 나누어진다. 따라서 실린더에 작용하는 동적 하중은 실수부와 허수부로 구분할 수 있으며 비교적 간단하게 표시할 수 있다.

$$F = -\rho \pi a^2 C_{MF} \frac{\partial^2 e_v}{\partial t^2} - C_{vF} \frac{\partial e_v}{\partial t} - C_{kF} e_v = \rho \pi a^2 \Omega^2 a \epsilon e^{i\Omega t} [ Re(\widehat{F}) + i Im(\widehat{F}) ]$$

$$G = -\rho \pi a^2 C_{MG} \frac{\partial^2 e_v}{\partial t^2} - C_{vG} \frac{\partial e_v}{\partial t} - C_{kG} e_v = \rho \pi a^2 \Omega^2 a \epsilon e^{i\Omega t} [ Re(\widehat{G}) + i Im(\widehat{G}) ] \quad (26)$$

여기서  $C_M, C_v$ 와  $C_k$ 는 각각 유체에 의하여 부가되는 질량, 점성감쇠 및 탄성계수를 의미한다. 따라서 실수부는 유체에 의한 부가질량과 탄성을 포함하며 허수부는 감쇠항으로 설명할 수 있다. 식 (25)와 (26)을 고려하면 진동방향의 무차원 유체동하중은

$$\widehat{F} = -\sum_j \left\{ \widehat{P}_{cjl} T_j(1) + \frac{4\epsilon}{Re_s} \frac{1}{h} \widehat{V}_{cjl} T_j'(1) - \frac{\epsilon}{Re_s} \frac{2}{h} \widehat{W}_{sjl} T_j'(1) + \frac{\epsilon}{Re_s} \widehat{W}_{sjl} T_j(1) - \frac{\epsilon}{Re_s} \widehat{V}_{cjl} T_j(1) \right\} \quad (27)$$

으로 표시할 수 있고 실수부와 허수부로 분리할 수 있다. 예를 들어 유체의 탄성이 매우 작을 때에 부가질량계수와 감쇠계수는 각각

$$C_{MF} = Re(\widehat{F}) \quad C_{vF} = -\rho \pi a^2 \Omega Im(\widehat{F})$$

$$C_{MG} = Re(\widehat{G}) \quad C_{vG} = -\rho \pi a^2 \Omega Im(\widehat{G}) \quad (28)$$

이며 진동에 의하여 실린더에 작용하는 유체의 부가질량은  $\rho\pi a^2 C_M$ 으로 계산할 수 있다.

일반적으로 회전하지 않는 내부 실린더가 단순 횡진동을 할 때에 환사이의 유체에 의한 부가질량계수는 포텐셜이론에 근거하여 간단하게 구할 수 있다.<sup>(16)</sup>

$$C_{MF} = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}, \quad C_{MG} = 0 \quad (29)$$

또한 회전하는 내부실린더가 진동할 때에 유체에 의한 감쇠계수는 윤향막 이론에 근거한 단순화된 레이놀즈 방정식을 활용하여 구할 수 있으며 동심인 경우에

$$C_{vF} = 12\pi\mu \left( \frac{a}{b-a} \right)^3, \quad C_{vG} = 0 \quad (30)$$

으로 표시할 수 있다.<sup>(4)</sup>

### 5. 수치해석 결과

회전하는 실린더의 진동에 의한 유동장을 분석하고 실린더의 표면에 작용하는 압력과 전단응력을 고려하여 유체동하중을 계산할 수 있고 이로부터 부가질량, 유체탄성 및 감쇠계수를 예측할 수 있다. 본 논문에서는 환의 간격을 변화시키면서 부가질량과 감쇠계수에 미치는 회전속도 혹은 진동주파수의 영향을 분석하였다. 환의 간격비,  $(b-a)/a$ 는 0.005에서 0.1까지 변화시켰으며 진동 레이놀즈 수와 레이놀즈수는 각각  $10 \leq Re_s \leq 50,000$ 과  $0 \leq Re_w \leq 300$ 의 범위에서 계산하였다. 여기서 진동 레이놀즈 수와 레이놀즈 수는 각각 진동주파수와 회전속도에 근거하여 계산하였다. 본 수치해석방법을 검증하기 위하여 식 (29)와 (30)에 보인 기존의 어림해의 결과와 비교 검토하였다.

환의 간격비,  $(b-a)/a$ ,가 0.1이고 진동 레이놀즈수와 레이놀즈 수가 각각  $Re_s = 50$ ,  $Re_w = 300$ 인 경우에 비정상유동의 무차원 유속 분포를 Fig. 2에 예시하였다. 여기서  $\theta$ 는 원주각을 나타내며  $z$ 는 반경방향의 무차원 좌표이다. 반경방향 무차원 유속의 허수부( $IM$ )는 실수부( $RE$ )에 비하여 상당히 작기 때문에 나타나지 않았다( $IM(\hat{v}) < 10^{-4}$ ). 원주방향 유속의 실수부가 다른 성분에 비하여 상당히 큼을 알 수 있다, 원주각에 따른 원주방향 유속의 경향은  $\theta = 90^\circ$ 에서 최대이고  $\theta = 0, 180^\circ$ 에서 0임을 보이고 있고 반경방향의 유속의 경향은 그 반대임을 보이고 있다.

환의 간격비가  $(b-a)/a = 0.1$ 일 때에 진동수(진동 레이놀즈 수,  $Re_s = 50$ )를 고정하고 회전수(레이놀즈 수,  $0 \leq Re_w \leq 300$ )를 변화시키면서 얻는 원주방향의 압력의 변화율을 Fig. 3에 도시하였다. 압력은 주로 코사인 함수임을 알 수 있으며 실수부는 회전수에 의하여 영향을 받으나 허

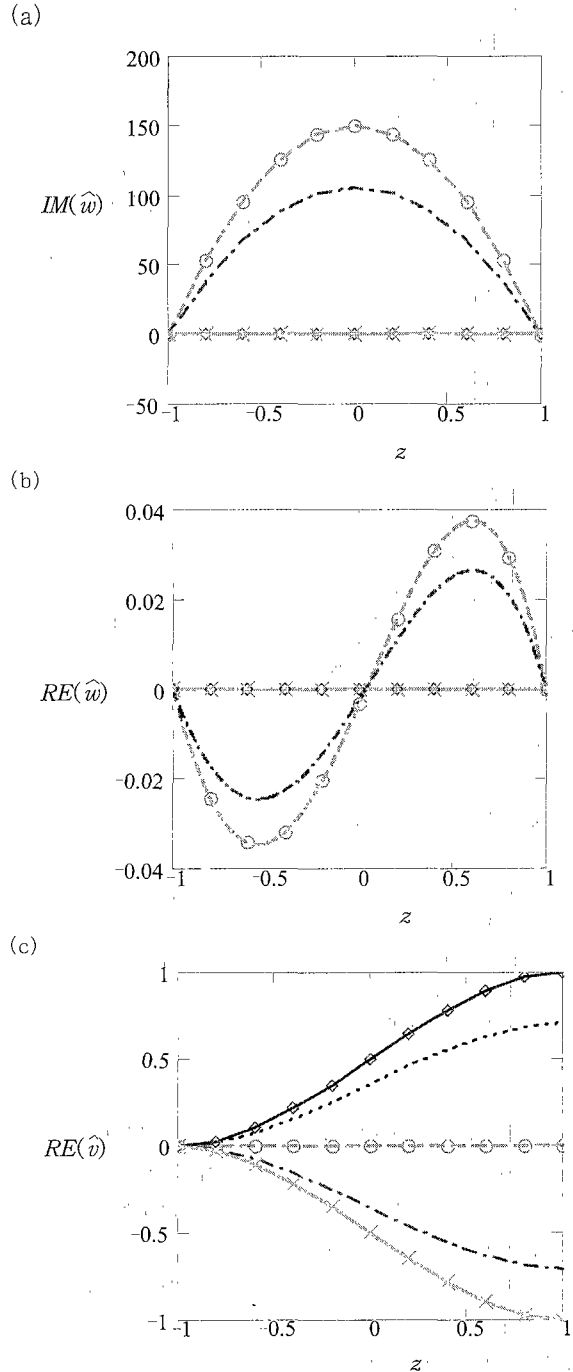
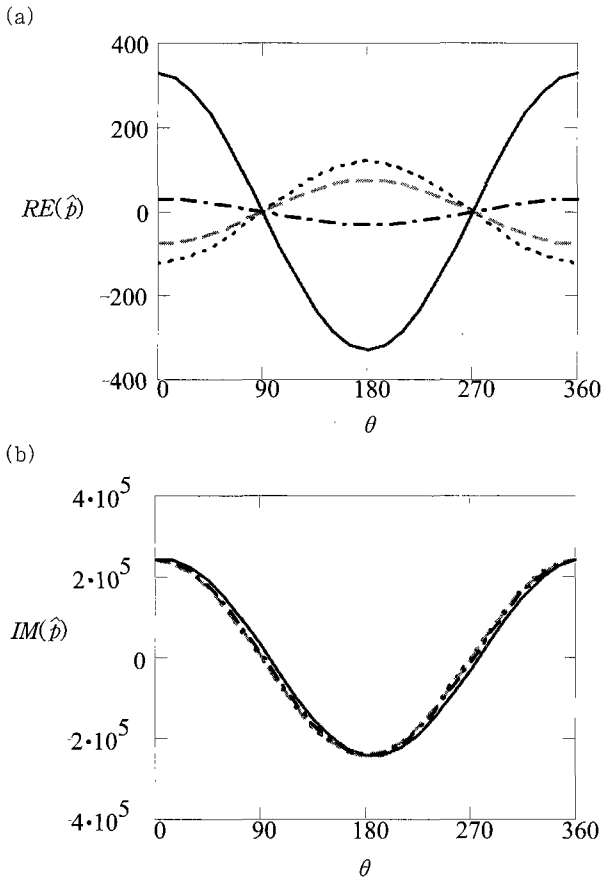


Fig. 2 The distribution of the nondimensional amplitude of the unsteady flow velocity for  $(b-a)/a=0.1$ ,  $Re_w=300$  and  $Re_s=50$ ; the (a) real and (b) imaginary components of the circumferential velocity and (c) the real component of the radial one:  
 —◇—:  $\theta=0^\circ$ , .....:  $\theta=45^\circ$ ,  
 - - -○- - -:  $\theta=90^\circ$  - - -▪- - -:  $\theta=135^\circ$ ,  
 - - -x- - -:  $\theta=180^\circ$



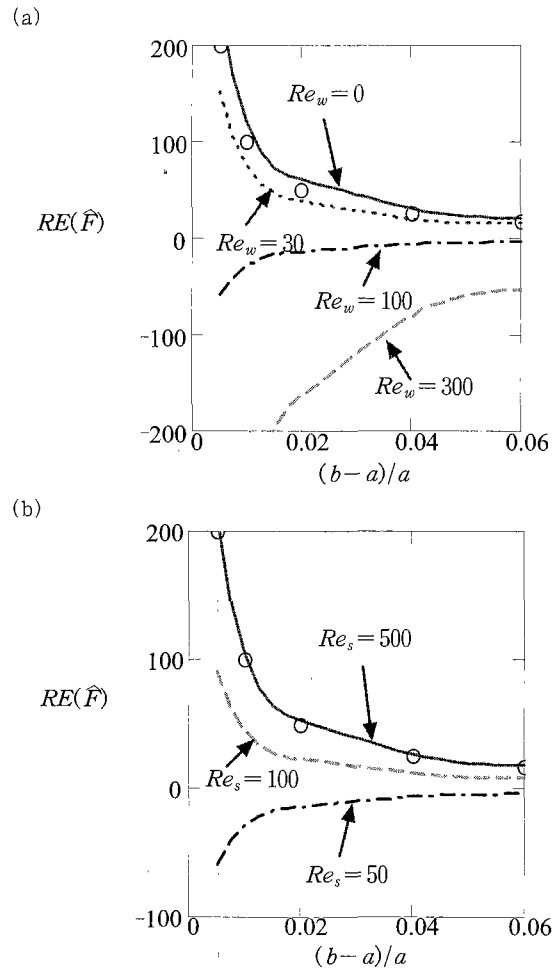
**Fig. 3** Influence of Reynolds number on the (a) real and (b) imaginary components of the non-dimensional pressure,  $\hat{p}$ , for  $(b-a)/a=0.1$ ,  $Re_s=50$   
 ————— :  $Re_w=300$ ,    - · - · - · :  $Re_w=100$ ,  
 - - - - - :  $Re_w=50$ ,    · · · · · :  $Re_w=0$

수부는 회전수에 의하여 거의 영향을 받지 않고 있다. 압력의 허수부가 회전수의 변화에 의하여 영향을 받지 않음은 유체에 의한 감쇠력이 레이놀즈 수에 의하여 영향을 받지 않음을 나타낸다. 회전하지 않을 때와 회전수가 상대적으로 클 때의 압력의 실수부를 비교하면 서로 부호가 반대임을 알 수 있다. 회전하지 않을 때의 실수부는 오직 부가질량으로 설명되고 부가질량과 탄성항은 서로 180°의 상차이가 있다. 따라서 회전에 의하여 압력의 실수부에 미치는 영향은 탄성항으로 도출됨을 짐작할 수 있다.

회전하는 실린더에 작용하는 진동에 의한 진동방향의 유체동하중  $RE(\hat{F})$ 을 환의 간격비에 따라 Fig. 4에 도시하였으며 진동에 근거한 진동 레이놀즈 수와 회전수에 근거한 레이놀즈 수의 영향을 분석하였다. 특히 회전하지 않는 경우 ( $Re_w=0$ )에 포텐셜 이론에 근거한 기존의 이론 결과와 비교하여 본 해석방법을 검증하였다. 두 결과가 비교적

잘 일치함을 보이고 있으며 본 이론의 결과가 약간 큰 것은 점성에 의한 영향이다. 간격비가 비교적 크면 유체에 의한 부가질량은 무시할 수 있다. 회전수가 증가하면 유체동하중의 실수부가 감소하고 진동수가 증가하면 증가함을 보이고 있다. 특히 레이놀즈 수가 진동 레이놀즈 수에 비하여 비교적 클 때에 Fig. 3에서 예측하였듯이 탄성항이 작용함을 알 수 있다. 유체동하중의 실수부에 미치는 회전수에 근거한 레이놀즈 수의 영향은 진동주기에 근거한 진동 레이놀즈 수가 상대적으로 클 때에 미미함을 보이고 있다. 이 경우에는 포텐셜 이론으로 부가질량을 어렵게 계산할 수 있다. 진동 방향에 수직인 방향의 유체동하중의 실수부는 매우 미미하여 예시하지 않았다.

환내에서 회전하면서 진동하는 진동체에 작용하는 진동 방향과 진동에 수직인 방향의 점성감쇠계수를 Fig. 5와 6에 예시하였다. Fig. 5에서는 감쇠계수에 미치는 실린더의



**Fig. 4** Real components of the hydrodynamic forces, showing (a) the influence of Reynolds number for the fixed  $Re_s (=50)$  and (b) the influence of oscillatory Reynolds number for the fixed  $Re_w (=100)$ :  $\circ$ , obtained by the potential theory for  $Re_w=0$ - see Eq.(29).

회전수에 의한 영향을 분석하기 위하여 진동 레이놀즈 수는 고정하였다( $Re_s=50$ ). 진동방향의 감쇠계수는 회전수에 의하여 영향을 받지 않고 있으나 진동에 수직한 방향의 감쇠계수는 회전수가 증가함에 따라 증가하고 있다. 또한 환의 간격비가 증가하면 감쇠계수는 감소하고 있다. 진동 방향의 감쇠계수는 윤활이론에 근거한 기존의 결과와 비교하여 잘 일치하고 있다. 진동수에 의한 영향을 분석하기 위하여 고정된 레이놀즈 수( $Re_s=10$ )의 경우에 진동수를 변화시키면서 감쇠계수를 구하여 Fig. 6에 예시하였다. 감쇠계수는 환의 간격이 비교적 크고 진동수가 아주 큰 경우를 제외하고는 진동수에 의하여 영향을 받지 않음을 알 수 있다. 또한 진동방향의 감쇠계수에 비하여 수직한 방향의 감쇠계수는 상당히 작음을 알 수 있다(1% 이내). 따라서 진동방향의 감쇠계수는 기존의 윤활 이론에 근거한 간단한

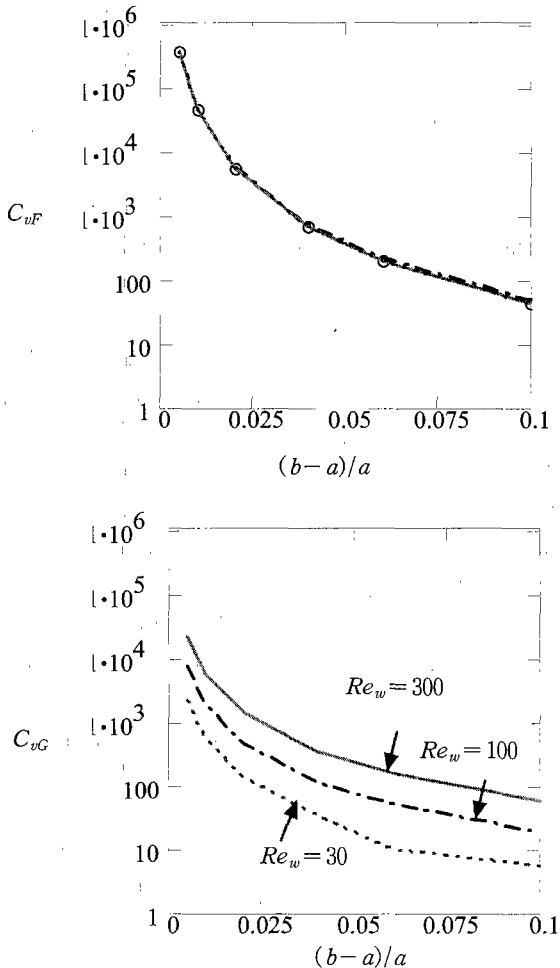


Fig. 5 The viscous damping coefficients showing the influence of Reynolds numbers for the fixed  $Re_s (=50)$ :  $\circ$ , obtained by the fluid film lubrication theory - see Eq.(30).

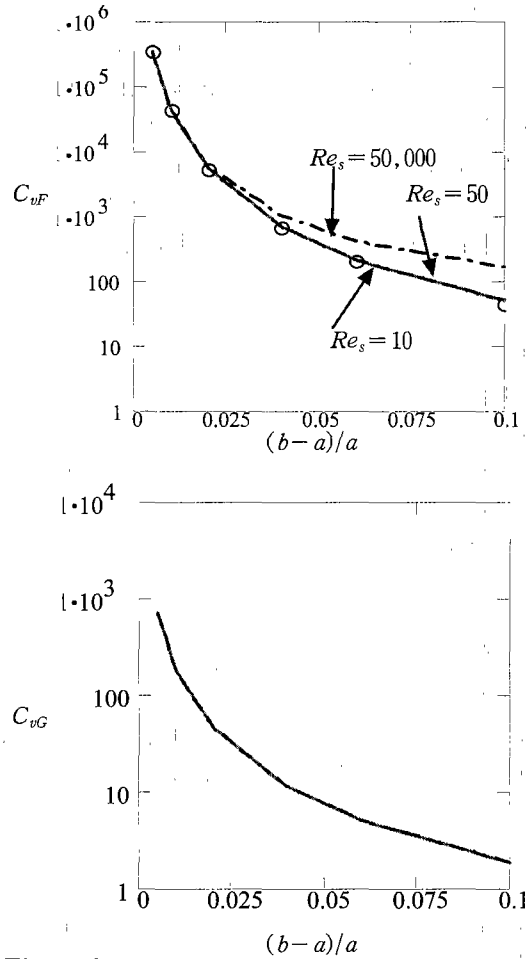


Fig. 6 The viscous damping coefficients showing the influence of oscillatory Reynolds number for the fixed  $Re_w (=10)$ :  $\circ$ , obtained by the fluid film lubrication theory - see Eq.(30).

식 (30)을 사용하여 예측할 수 있으나 회전수가 큰 경우에는 진동에 수직한 방향의 감쇠계수는 본 수치해석 방법 등을 사용하여 별도의 계산을 할 필요가 있다.

## 6. 결론

고정된 실린더 내에서 회전하는 내부 실린더가 주기적인 병진 운동을 동반할 때에 내부 실린더의 진동에 의하여 내부 실린더에 작용하는 유체동하중을 분석하였다. 내부 실린더에 작용하는 유체동하중은 진동에 의한 비정상 유동에 의하여 생성된다. 유체동하중은 부가질량, 탄성항 및 감쇠항으로 분류되며 유동유기진동을 분석할 때에 유체동하중을 평가하는 것은 상당히 의미가 있다. 본 논문에서 환상 유동의 지배방정식은 정상 비정상항을 포함하는 Navier-Stokes 방정식으로 표현된다. 회전유동에 의하여 생성되는



정상유동의 유체변수들은 해석적으로 결정되어지며 진동에 의해 생성되는 비정상유동의 변수들은 스펙트럼 배치방법에 근거한 수치해석 방법에 의하여 평가되었다. 내부 실린더에 작용하는 유체동하중은 압력과 표면마찰을 원주방향으로 적분하여 구할 수 있으며 두 실린더의 간격비와 두 종류의 레이놀즈 수에 따라 평가하였다. 수치해석 방법을 검증하기 위하여 현존하는 이론과 수치해석 방법을 동시에 적용할 수 있는 간단한 경우에 응용하여 결과를 비교하였다. 두 결과가 잘 일치함을 보이고 있다. 회전수에 근거한 레이놀즈 수가 진동주기에 근거한 진동 레이놀즈 수에 비하여 상대적으로 작을 때에는 부가질량은 회전에 의한 영향을 무시하고 기존의 포텐셜 이론을 사용하여 어렵게 계산할 수 있다. 회전수가 비교적 큰 경우에는 유체동하중의 실수부가 회전수가 작은 경우에 비하여 음으로 작용하며 이는 계통에 탄성항이 생성됨을 예측할 수 있다. 진동 방향의 감쇠계수는 기존의 율환 이론을 사용하여 간단하게 예측할 수 있으나 회전수가 큰 경우에는 진동에 수직인 방향의 감쇠계수는 본 수치해석 방법 등을 사용하여 별도의 계산을 할 필요가 있다. 유체동하중의 실수부 및 유동장 해석 결과를 좀 더 분석하고 실험을 병행하여 부가질량항과 탄성항을 정량적으로 분리할 필요가 있다.

### 후 기

이 논문은 2000학년도 한남대학교 학술연구조성비의 지원에 의하여 연구되었으며 지원에 감사를 드립니다.

### 참고문헌

(1) 심우건, 1997, "편심환내의 회전 유동", 한국공작기 계기술학회지, 제 6 권 제 3 호, pp. 9~16.  
 (2) Sommerfeld, A., 1904, "Zur Hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung", Z. Angew Math. Phys., Vol. 50, pp. 97~155.  
 (3) Lund, J.W., 1987, "Review of the Concept of Dynamic Coefficients for Fluid Film Journal Bearings", ASME Journal of Tribology, Vol. 109, pp. 37~41.  
 (4) Hamrock, B. J., 1994, "Fundamentals of Fluid Film Lubrication", McGraw Hill Inc., 1st ed., Singapore.  
 (5) Park, J.S., Kim, J.I., Seo, J.H., Lee, C.W. and Wang Letian, 1998, "Development of a Rotordynamic Analysis Model for Rotar Shaft of SMART",

Proceeding of the Korean Nuclear Society Autumn Meeting, Seoul.

(6) Fritz, R., 1970, "The Effects of An Annular Fluid on The Vibrations of a Long Rotor, Part 1-Theory", ASME Journal of Basic Engineering, Vol. 97, pp. 923~929.  
 (7) Mateescu, D., Paidoussis, M.P. and Sim, W.G., 1994, "Spectral Solutions for Unsteady Annular Flows between Eccentric Cylinders Induced by Transverse Oscillations", Journal of Sound and Vibration, Vol. 177(5), pp. 635~649.  
 (8) Chen, S.S., Wambsgann, M.W. and Jendrzejczyk, A.Z., 1976, "Added Mass and Damping of a Vibrating Rod in Confined Viscous Fluid", Journal of Applied Mechanics, Vol. 43, pp. 325~329.  
 (9) Paidoussis, M. P., Mateescu, D. and W.-G., Sim, 1990, "Dynamics and Stability of a Flexible Cylinder in a Narrow Coaxial Cylindrical Duct Subjected to Annular Flow", Journal of Applied Mechanics, Vol. 57, pp. 232~240.  
 (10) Myers, C., 1984, "Bifurcation Theory Applied to Oil Whirl in Plain Cylindrical Journal Bearings", Journal of Applied Mechanics, Vol. 51, pp. 245~250.  
 (11) Antunes, J., Axisa, F. and Grunenwald, T., 1996, "Dynamics of Rotors Immersed in Eccentric Fluid Annulus. Part 1: Theory", Journal of Fluids and Structures, Vol. 10, pp. 893~918.  
 (12) Antunes, J., Axisa, F. and Grunenwald, T., 1996, "Dynamics of Rotors Immersed in Eccentric Fluid Annulus. Part 2: Experiments", Journal of Fluids and Structures, Vol. 10, pp. 919~944.  
 (13) 심우건, 1997, "동심원 환내의 정상·비정상 회전 유동", 한국소음진동공학회지, 제 7 권 제 4 호, pp. 613~620.  
 (14) 심우건 조용철, 1993, "스펙트럼 배치방법에 의한 정상 및 비정상류의 해석", 대한기계학회논문집, 제 17 권 제 4 호, pp. 948~958.  
 (15) 심우건, 2000, "편심환내의 비선형 회전 유동", 대한기계학회논문집, 제 24 권 제 1 호, pp. 16~28.  
 (16) Fritz, R., 1972, "The Effects of Liquids on the Dynamic Motions of Immersed Solids", ASME Journal of Engineering for Industry, Vol. 94, pp. 167~173.