

복합정현파형 지형에서의 파랑 반사 Wave Reflection over Doubly-Sinusoidally Varying Topographies

김영택* · 조용식** · 이정규***

Kim, Young-Taek*, Cho, Yong-Sik**, and Lee, Jong-Kyu***

요 旨 : 본 연구에서는 경계요소법을 이용한 파랑의 통과와 반사에 대하여 다루었다. 특히 파랑이 복합정현파형 지형을 통과하는 경우 그 때의 반사율과 일종의 공명현상인 Bragg 반사에 대하여 고찰하였다. 해석결과의 검증 을 위하여 고유함수전개법에 의한 트렌치 지형에서의 통과율과 반사율 값과 비교하였으며, 복합정현파형 지형에 적용하여 기존의 수리실험, 고유함수전개법 및 확장형완경사방정식에 의한 결과와 비교하였다. 그 결과 기존의 연구결과와 비교적 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있었다.

핵심용어 : 파랑, 경계요소법, 복합정현파형 지형, Bragg 반사, 고유함수전개법

Abstract □ The present study describes the Bragg reflection of monochromatic water waves propagating over a train of doubly-sinusoidally varying topographies. A numerical model based on the boundary element method is firstly verified by calculating reflection and transmission coefficients of waves over a trench. Calculated solutions are compared with those of the eigenfunction expansion method. The model is then used to simulate reflection of monochromatic water waves propagating over doubly-sinusoidally varying bottom topographies. Obtained reflection coefficients are compared with those of available laboratory measurements, those of the eigenfunction expansion method and the extended mild-slope equation. A reasonable agreement is shown

Keywords : waves, boundary element method, doubly-sinusoidally varying topography, Bragg reflection, eigenfunction expansion method

1. 서 론

심해에서 발달된 파랑은 천해로 전파하면서 회절, 굴절, 천 수 및 반사 등과 같은 전파변형을 변형을 겪는다. 이중 본 연구에서는 바다 지형의 변화에 따른 파랑의 반사와 통과에 관한 문제를 해석하였다. 특히 본 연구에서 언급할 Bragg 반사는 해저지형이 정현파 형상으로 변할 때, 통과 하는 파랑의 파장이 바닥지형 파장의 2배가 될 경우 공 명현상에 의하여 입사파의 반사율이 매우 커지는 물리현 상을 말한다. 자연상태의 해저지형에서 Bragg 반사가 발 생할 경우 외해로부터 입사한 파랑이 보유한 에너지의 상

당량을 다시 외해로 반사시킬 수 있으므로 이를 이용하 면 해안구조물의 설계 및 항만 시설물 보호 등에 효과적 으로 이용할 수 있다. 즉, 해안구조물 및 해수욕장과 같 은 편의시설의 설계에 있어 에너지의 반사 및 해안 침식 과 퇴적의 방지 등과 같은 경제적인 구조물 설계에 효과 적으로 이용하기 위해서는 Bragg 반사를 연구할 필요가 있다.

많은 학자들이 Bragg 반사 및 파랑의 통과율과 반사율 에 대한 연구를 수행하였다. Kirby and Dalrymple(1983) 은 고유함수전개법(EFEM, eigenfunction expansion method) 을 이용하여 트렌치(trench)지형에서 통과율과 반사율을 계

*한국건설기술연구원 수자원환경연구부(Water Resources and Environmental Research Division, Korea Institute of Construction Technology, 2311 Taehwa-dong, Ilsan-gu, Goyang, Kyonggi 411-712, Korea)

**교신저자, 한양대학교 도시건설환경공학과군(Department of Civil Engineering, Hanyang University, 17 Haengdang-dong, Seongdong-gu, Seoul 133-791, Korea)

***한양대학교 도시건설환경공학과군(Department of Civil Engineering, Hanyang University, 17 Haengdang-dong, Seongdong-gu, Seoul 133-791, Korea)

산하였으며, Davies and Heathershaw(1984)는 수리모형 실험을 이용하여 정현파형 지형을 통과하는 파랑의 반사를 및 Bragg 반사를 연구하였다. Guazzelli *et al.*(1992)은 복합정현파형 지형을 통과하는 파랑의 Bragg 반사를 수리모형 실험을 이용하여 분석하였다. Suh *et al.*(1997)은 환경사방정식 및 확장형 환경사방정식(EMSE, extended mild-slope equation)을, 조 등(1999a, 1999b)은 고유함수 전개법을 이용하여 임의로 변하는 수심을 지나는 파랑의 반사를 및 통과율을 계산하였으며, Zhang *et al.*(1999)은 hybrid 모형을 이용하여 파랑의 반사율을 연구하였다.

본 연구에서는 트랜지지형을 통과하는 파랑의 반사율과 통과율을 Kirby and Dalrymple(1983)의 고유함수전개법에 의한 결과와 비교하여 본 모형을 검증하였으며, 복합정현파형 지형에서는 Guazzelli *et al.*(1992)의 수리실험결과, 조 등(1999a)의 고유함수전개법에 의한 결과 및 Suh *et al.*(1997)의 확장형 환경사방정식에 의한 결과와 비교 검토하였다.

다음 장에서는 경계요소법에 대하여 간략하게 서술하며, 제3장에서는 지배방정식과 경계조건을 기술한다. 아울러, 제4장에서는 경계요소법 모형의 검증과 복합정현파형 지형에의 적용을 서술하며, 끝으로 제5장에서는 결론을 기술한다.

2. 경계요소법

경계요소법은 Laplace 방정식을 지배방정식으로 하는 지하수 흐름이나 해안공학 문제의 해석에 있어 매우 정확한 해를 제공하는 수치기법으로 알려져 있다. 특히 경계요소법은 유한차분법이나 유한요소법과는 달리 계산시간이나 기억용량의 절감 등에서 매우 효율적이며, 임의의 형태를 갖는 지형에도 큰 문제없이 쉽게 적용할 수 있는 장점이 있다. 또한 요소의 크기를 쉽게 조절할 수 있고, 모든 수치오차는 경계에 국한 할 수 있어 매우 정확한 수치해를 제공하는 것으로 알려져 있다(Liggett and Liu, 1983).

이차원 Laplace 방정식에 경계요소법을 적용하여 해석할 경우 식 (1)의 Green's second identity와 식 (3)의 free space green 함수를 이용하여 적분방정식, 식 (4)를 유도한다(Liggett and Liu, 1983).

$$\int_D [U \nabla^2 V - V \nabla^2 U] dV = \int_{\partial D} \left[U \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} - V \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \right] dA \quad (1)$$

식 (1)에서 U 와 V 는 영역 D 에서 두 번 미분이 가능한 임

의 스칼라(scalar)함수이며, \mathbf{n} 은 밖으로 향하는 단위수직벡터(outward unit normal vector)이고, dV 는 미소체적, ∂D 와 dA 는 각각 적분경계 및 미소단면적이다. 여기서 U 와 V 는 Laplace방정식의 해이므로 왼쪽항은 0이 된다. 따라서 식 (1)은 아래의 식 (2)와 같이 정리된다.

$$\int_{\partial D} \left[U \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} - V \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \right] dA = 0 \quad (2)$$

2차원 Laplace방정식을 만족하는 free space green 함수는 아래의 식 (3)과 같다.

$$V = \ln r \quad (3)$$

식 (2)에 (3)과 $U = \Phi$ 를 대입한 후 선적분의 정의에 의하여 적분을 수행하면 아래의 식 (4)와 같은 2차원 적분방정식을 얻을 수 있다.

$$\alpha \Phi(p) = \int_{\partial D} \left[\Phi(q) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\ln r) - \ln r \frac{\partial \Phi(q)}{\partial \mathbf{n}} \right] ds \quad (4)$$

여기서 α 는 Fig. 1에서와 같이 특이점 p 가 인접한 양쪽의 요소에 의하여 이루는 각을 의미하며, q 는 경계상의 임의의 점이다. 이때 r 은 p 와 q 사이의 거리이며, Γ 는 식 (4)의 적분경계, 화살표는 적분방향이다.

식 (4)의 우변을 적분하는 방법에는 Gaussian quadrature를 이용한 근사적분을 사용하여 계산을 할 수 있으나, 수치해의 정확도 향상을 위하여 해석적인 적분을 수행한다. 해석적인 수치적분 방법은 Fig. 2와 같이 경계를 미소의 선형요소로 이산화하여 수치적분함으로써 계산된다. 즉, Φ 과 $\partial \Phi / \partial \mathbf{n}$ 를 식 (5)와 (6)과 같이 표현하여 식 (4)에 대입한 후 계산한다.

Fig. 2에서 ζ 와 η 는 한 개의 특이점에 대한 한 개의 요소를 이산화할 때 형성된 새로운 좌표축이다. Fig. 2에서 경계상의 절점(P_j 와 P_{j+1})과 특이점(P_i)에서의 Φ 와 $\partial \Phi / \partial \mathbf{n}$ 를 1차 선형관계로 가정하여 새로운 축 ζ 와 η 에 의하여

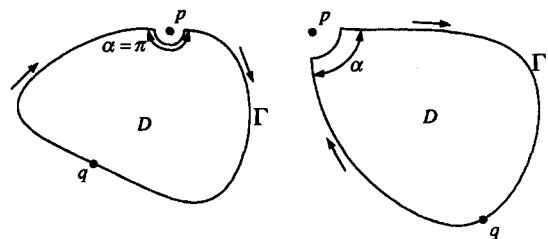


Fig. 1. Domain of calculation (D) and angles of α .

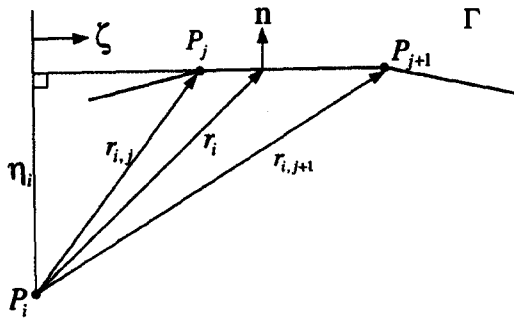


Fig. 2. ζ - η coordinate system.

식 (5)와 (6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi = [(\Phi_{j+1} - \Phi_j)\zeta + (\zeta_{j+1}\Phi_j - \zeta_j\Phi_{j+1})] / (\zeta_{j+1} - \zeta_j) \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \left\{ \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{j+1} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_j \right] \zeta + \left[\zeta_{j+1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_j - \zeta_j \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{j+1} \right] \right\} / (\zeta_{j+1} - \zeta_j) \quad (6)$$

3. 지배방정식과 경계조건

본 연구에서 유체의 흐름은 2차원 Laplace 방정식에 의해 지배된다.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad -h(x) \leq z \leq \zeta(x, t) \quad (7)$$

식 (7)에서 h 는 바다수심, z 는 수심, ζ 는 자유수면 변위이다.

자유수면에서는 운동학적 경계조건과 동역학적 경계조건을 선형화하여 다음과 같은 자유수면에서의 경계조건을 적용한다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \Phi = 0, \quad z=0 \quad (8)$$

식 (8)에서 ω 는 각속도이며, g 는 중력가속도이다.

해저면 및 구조물에서는 불투과조건을 고려하면, 다음 식과 같은 연직속도가 0이 되는 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (9)$$

미소진폭파 이론에 의하여 일정 수심(h)의 지형을 통과하는 파랑의 입사파의 속도포텐셜(Φ_I)은 식 (10)과 같이 표현된다.

$$\Phi_I = \frac{igA \cosh k_0(z+h)}{\omega \cosh k_0 h} e^{ik_0 x} \quad (10)$$

식 (10)에서 n 는 복소수의 허수부, A 는 입사파의 파고, k 는 수심에서의 파수이다.

그러나 불규칙적인 바닥지형의 영향으로 입사파는 그대로 진행하지 못하고 반사 및 산란을 하게 되므로 이를 해결하기 위해 Sommerfeld 경계조건을 이용한다.

$$\lim_{k_0 x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mp ik_0^{\pm} \right) (\Phi - \Phi_I) = 0 \quad (11)$$

여기서 위첨자 +와 -는 각각 통과파와 반사파 성분을 나타내며, 이때 계산영역내 가상경계에서의 속도포텐셜은 plane wave approximation에 의하여 다음 식과 같이 표현된다.

$$\Phi^{\pm} = A_0^{\pm} e^{\pm ik_0^{\pm} x} \frac{\cosh k_0^{\pm} (z+h^{\pm})}{\cosh k_0^{\pm} h^{\pm}} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_I \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \pm \frac{\partial \Phi^{\pm}}{\partial x} \quad x > x^+ \text{ or } x < x^- \quad (12)$$

A_0^+ 과 A_0^- 는 각각 진행파의 통과파와 반사파의 진폭이다. 이때 반사율(R)과 통과율(T)은 아래의 식 (13)에 의하여 계산된다.

$$R = \frac{|A_0^-| \omega}{A g}, \quad T = \frac{|A_0^+| \omega}{A g} \quad (13)$$

4. 모형의 적용과 고찰

트렌치 지형을 통과하는 파랑의 반사율(R)과 통과율(T)을 Kirby and Dalrymple(1983)의 고유함수전개법에 의한 결과와 비교하여 본 모형을 검증한다. 모형의 검증에 사

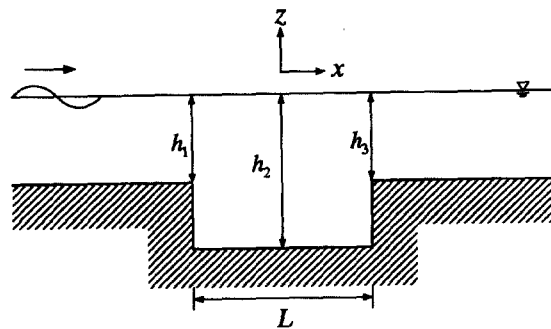


Fig. 3. Definition sketch of trench.

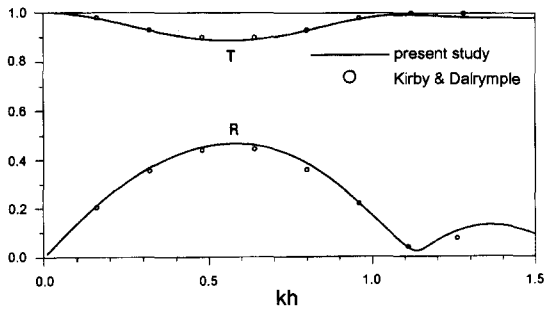


Fig. 4. Comparison of transmission and reflection coefficients.

용된 지형은 Fig. 3과 같으며 그때의 해석결과는 Fig. 4이다.

경계요소법을 이용한 본 연구의 결과와 Kirby and Dalrymple(1983)의 고유함수 전개법에 의한 반사율과 통과율이 비교적 잘 일치하고 있음을 볼 수 있다.

다음은 복합정현파형 지형에 본 모형을 적용하여, Guazzelli et al.(1992)의 수치실험 결과와 조 등(1999a)의 고유함수 전개법 및 Suh et al.(1997)의 확장형완경사방정식에 의한 결과와 본 모형의 결과를 비교하였다. 복합정현파형 지형의 형태는 Fig. 5와 같으며 이때 수심은 식 (14)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
 h(x) &= h_1 \quad (x < x_1) \\
 h(x) &= h_1 - b[\sin(l_1x) + \sin(l_2x)] \quad (x_1 < x < x_2) \\
 h(x) &= h_1 \quad (x < x_2)
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

식 (14)에서 h_1 은 입사파의 통과수심으로 통과파의 수심, h_2 와 같다고 가정한다($h_1=h_2$). 또한 b 는 복합 정현파형 지형의 진폭이며, l_1 과 l_2 는 각각 바닥지형의 파장이 λ_1 과 λ_2 인 복합 정현파형 지형의 파수를 나타낸다. 단, 여기서 $l_1 < l_2$ 이고, 복합 정현파형 지형의 길이는 $x_2 - x_1 = L$ 이다.

아래의 Table 1에는 복합정현파형 지형에서의 실험조건과 각 Case별 node의 수가 표시되어 있다. 여기서 node

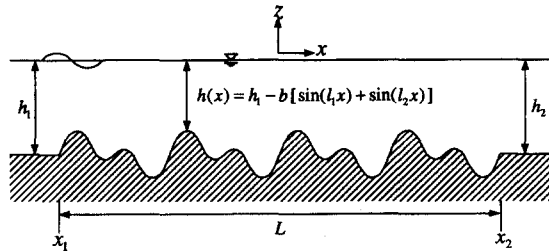


Fig. 5. Definition sketch of a doubly-sinusoidally varying topography.

Table 1. Variables which consists the doubly-sinusoidally varying topography

Case	$h_1=h_2$	node 수	b	λ_1	λ_2	L
Case 1	4.0	320	1.0	12.0	6.0	48
Case 2	2.5	340	1.0	12.0	6.0	48
Case 3	4.0	378	1.0	6.0	4.0	48
Case 4	2.5	380	1.0	6.0	4.0	48

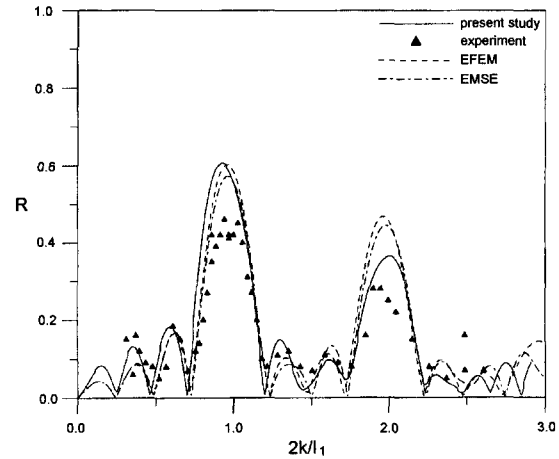


Fig. 6. Reflection coefficients for Case 1.

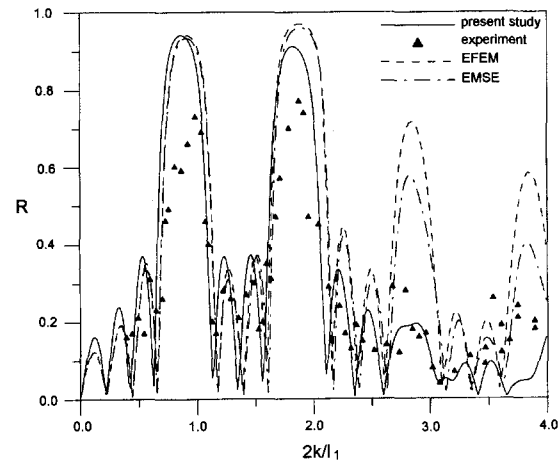


Fig. 7. Reflection coefficients for Case 2.

수는 Fig. 5와 같은 지형을 이루는 격자점의 수를 말한다.

Fig. 6~8 및 9는 Table 1에 해당하는 경우에 대한 각각의 계산 결과이다. Fig. 6 및 8과 Fig. 7 및 9를 비교해 볼 때 수심에 비하여 상대적으로 바닥지형 변화가 덜 급한 Fig. 6과 7이 기존의 조 등(1999a)과 Suh et al.(1997)의 결과와 비교적 잘 일치하고 있는 것을 볼 수 있다. 오히

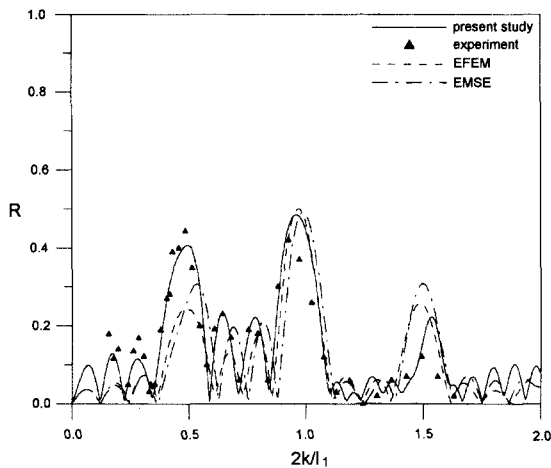


Fig. 8. Reflection coefficients for Case 3.

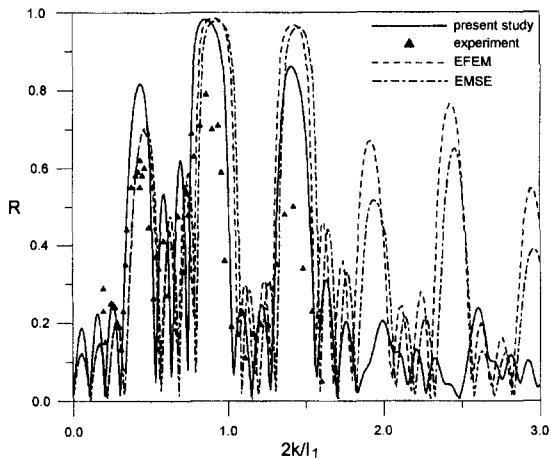


Fig. 9. Reflection coefficients for Case 4.

려 실험치와 더욱 잘 일치하고 있는 것을 볼 수 있다. 그러나 Fig. 7과 Fig. 9는 상대적으로 심해로 갈수록 기존의 결과와 다소 상이한 결과가 나타나고 있는 것을 볼 수 있다. 이는 소멸파를 고려하거나 좀더 지형격자를 작게할 경우 오차는 줄어들 것으로 판단된다. 그러나 전체적으로 실험치가 존재하는 범위 내에서는 기존의 경우와 비교적 잘 일치하고 있는 것을 볼 수 있다.

그리고 Fig. 6-9에서 보듯이 Bragg 반사의 발생으로 인하여 반사율이 특정 에서 갑자기 커지는 것을 확인 할 수 있다. Guazzelli et al.(1992)에 의하면 식 (14)와 같이 주어지는 지형을 통과하는 파랑의 반사율은 $2kl_1=1.0$ 과 $2kl_2=1.0$ 에서 1차 Bragg 반사가 발생하며, $2kl_1=2.0$,

$2kl_2=2.0$, $2k=l_1+l_2$ 및 $2k=l_1-l_2$ 에서 2차 Bragg 반사가 발생한다고 하였다. 특히, Fig. 6과 7은 Guazzelli et al.(1992) 과도 잘 일치한다.

5. 결 론

복합 정현파형 지형의 수가 4개와 8개인 경우에 대하여 수심이 변할 때, 복합정현파형 지형의 수와 수심의 변화에 의한 반사율의 변화를 고찰하여 보았다. 결과에서 볼 수 있듯이 전체적으로 수심이 얕을수록, 즉 바닥지형의 상대진폭이 클수록 반사율이 크게 나타남을 알 수 있다.

또한, 복합정현파형 지형에서 사선의 수가 증가되어도 반사율크기의 증가는 별로 없이, 단지 반사율의 변화가 매우 급함을 알 수 있다. 즉, 복합정현파형 지형에 있어서 반사율의 크기는 바닥지형 파장의 길이와 수심에 대한 상대진폭에 영향을 받지만, 사선의 수에 의해서는 반사율의 크기보다는 반사율의 변화에 많은 영향을 주고 있음을 알 수 있다.

감사의 글

본 연구는 2001년도 과학기술부의 국가지정연구실 지원사업(한양대학교 해안공학연구실)에 의해 수행되었기에 이에 감사드립니다.

참고문헌

조용식, 김창완, 이종인, 1999a, "정현파형 지형을 통과하는 파랑의 Bragg 반사." 대한토목학회논문집, Vol. 19, No. II-6, pp. 705-710.
 조용식, 이종인, 김영택, 이정규, 1999b, "선반지형의 크기에 따른 반사율의 변화." 한국수자원학회논문집, Vol. 32, No. 6, pp. 675-683.
 Davies, A.G. and Heathershaw, A.D., 1984, Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 144, pp. 419-443.
 Guazzelli, E., Rey, V. and Belzons, M., 1992, Higher-order Bragg reflection of gravity surface waves by periodic beds. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 245, pp. 301-317.
 Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A., 1983, Propagation of obliquely incident water waves over a trench. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 133, pp. 47-63.
 Liggett, J.A. and Liu, P.L.-F., 1983, *Boundary Integral Equation Method for Porous Media Flow*, George Allen and

- Unwin, U.K.
Suh, K.D., Lee, C. and Park, W.S., 1997, Time-dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography. *Coastal Engineering*, Vol. 32, pp. 91-117.
Zhang, L., Kim, M.H., Zhang, J. and Edge, B. L., 1999, Hybrid model for Bragg scattering of water waves by steep mul-

tily-sinusoidal bars. *Journal of Coastal Research*, Vol. 15, pp. 486-495.

Received March 5, 2001

Accepted April 20, 2001