

<논 문>

여러 개의 스프링으로 탄성 지지된 수평 곡선보의 자유진동  
Free Vibrations of Horizontally Curved Beams  
with Multiple Elastic Springs

이 병 구\* · 진 태 기\*\* · 최 규 문\*\* · 이 태 은\*\*

Byoung Koo Lee, Tae Ki Jin, Kou Moon Choi and Tae Eun Lee

(2001년 4월 23일 접수 : 2001년 7월 6일 심사완료)

**Key Words:** Elastic Spring(탄성 스프링), Free Vibration(자유진동), Horizontally Curved Beam(수평 곡선보), Natural Frequency(고유진동수), Winkler Foundation(Winkler 지반)

ABSTRACT

This paper deals with the free vibrations of horizontally curved beams with multiple elastic springs. Taking into account the effects of rotatory inertia and shear deformation, differential equations governing the free vibrations of such beams are derived, in which each elastic spring is modeled as a discrete Winkler foundation with very short longitudinal length. Differential equations are solved numerically to calculate natural frequencies and mode shapes. In numerical examples, the circular, parabolic, sinusoidal and elliptic curved beams are considered. The parametric studies are conducted and the lowest four frequency parameters are reported in tables and figures as the non-dimensional forms. Also the typical mode shapes are presented.

1. 서 론

수평 곡선보는 보, 기둥, 평판 등과 더불어 각종 구조에서 단위구조로 광범위하게 사용된다. 스프링으로 탄성 지지된 구조물의 거동특성 규명은 구조공학 및 진동제어분야에서 중요한 연구대상으로 취급되어 이와 관련된 많은 연구가 수행되고 있다. 침목으로 지지된 철도궤도는 스프링으로 지지된 곡선보로 모형화할 수 있는 전형적인 예이다.

최근까지 여러 가지 조건을 갖는 곡선보의 정·동적 거동에 관한 연구<sup>(1-9)</sup>가 활발히 이루어지고 있으나, 이들 연구의 대부분은 곡선보의 축이 지지되어

있지 않거나 또는 곡선보의 축을 따라서 탄성지반으로 지지되어 있는 곡선보의 연구가 대부분이다. 스프링으로 탄성 지지되어 있는 곡선보에 대한 동적 연구는 찾을 수 없었다. 스프링으로 지지된 곡선보는 다양한 공학분야에서 응용이 되고 있으므로 이러한 곡선보의 거동특성을 이해할 수 있는 자료가 제시되어야 한다. 이러한 관점에서 스프링으로 지지된 곡선보의 자유진동에 관한 연구는 구조 동역학 분야에서 기초적인 연구라 생각된다.

이와 같은 연구배경으로 본 연구에서는 여러 개의 스프링으로 탄성 지지된 수평 곡선보의 자유진동에 대한 수학적 모형을 구축하여 정확한 고유진동수 및 진동형을 산출할 수 있는 알고리즘을 개발하는 데 연구목적이 있다. 본 연구와 타문헌과의 결과를 비교하여 본 연구방법의 타당성을 검증하고, 실제적인 공학문제에서 필요한 다양한 선형 및 경계조건에 따른 진동특성을 고찰한다.

\* 정회원, 원광대학교 토목환경공학과  
E-mail : bkleest@wonkwang.ac.kr  
Tel : (063) 850-6718, Fax : (063) 857-7204  
\*\* 정회원, 원광대학교 토목환경공학과

## 2. 수학적 모형

Fig. 1은 여러 개의 스프링으로 탄성 지지된 지간 길이  $l$ , 수평높이  $h$ ,  $y=y(x)$ 의 임의선형을 갖는 곡선부재의 기하학적 형상을 나타낸다. 부재의 양단부는 회전 또는 고정지점으로 지지되어 있다.  $K_j$ ,  $L_j$ 는  $j$ 번째 스프링의 스프링 상수, 스프링 위치이며 첨자  $n$ 은 스프링의 총 개수를 나타낸다. 이 곡선보가 자유진동하면 점선으로 표시된 진동형을 갖는 동적 변위를 갖게 된다.  $(x, y)$ 는 부재의 좌단을 원점으로 하는 직교좌표계이다.  $\rho$  및  $\theta$ 는 곡선보의 곡률반경 및  $x$ 축과 곡률중심방향인 이루는 각도이다.  $v$ ,  $\Psi$ ,  $\beta$  및  $\phi$ 는 수직방향 변위, 휨과 전단에 의한 단면 회전각 및 비틀림각이다. 이 논문에서는 휨과 전단에 의한 회전각  $\Psi$ 와  $\beta$ 를 수학적 모형에 고려함으로써 지배미분방정식에 회전관성과 전단변형 효과를 포함한다.

이 논문에서는 Fig. 2와 같이 스프링 상수가  $K_j$ 인 스프링을 지반계수가  $S_j$ 이고 길이가  $H$ 인 Winkler 지반<sup>(10)</sup>으로 모형화한다. 자유진동을 지배하는 상미분 방정식을 유도하기 위하여 탄성지반 위에 놓인 곡선보의 동적 평형방정식을 이용한다.

Fig. 3은 탄성지반 위에 놓인 곡선보가 자유진동할 때에 부재 미소요소에 작용하는 힘들을 나타낸 것이다.  $M$ ,  $T$  및  $Q$ 는 휨모멘트, 비틀림모멘트와 전단력이고,  $F_v$ ,  $C_\Psi$  및  $C_\phi$ 는 단위길이당 수직방향 관성력, 회전관성우력 및 비틀림관성우력이고,  $S_j v$ 는 단위길이당 지반반력이다.

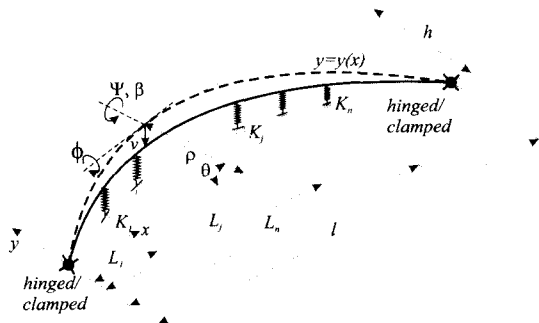


Fig. 1 Curved beam with multiple elastic spring and its variables

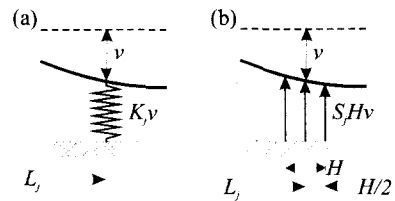


Fig. 2 Curved beam supported by (a) elastic spring and (b) elastic foundation

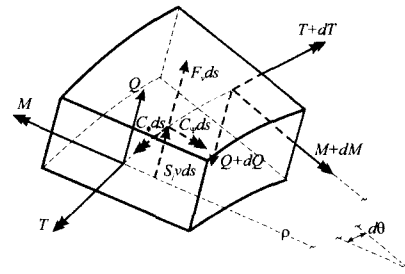


Fig. 3 Stress resultants, inertia forces and restoring forces on a curved beam

미소요소에 작용하는 이들 합응력과 관성력 및 지반반력 사이의 동적 평형방정식을 세우면 식 (1)~(3)과 같다.

$$Q' - \rho F_v - \rho S_j v = 0 \quad (1)$$

$$M' - \rho Q + T + \rho C_\Psi = 0 \quad (2)$$

$$M - T' + \rho C_\phi = 0 \quad (3)$$

여기서 (')은  $d/d\theta$ 의 미분연산자이다.

부재단면에 발생하는 합응력  $M$ ,  $T$  및  $Q$ 는 식 (4)~(6)과 같이 쓸 수 있다.<sup>(6)</sup>

$$M = EI\rho^{-1}(\phi - \Psi') \quad (4)$$

$$T = GJ\rho^{-1}(\Psi + \phi') \quad (5)$$

$$Q = \alpha AG\beta = \alpha AG(\rho^{-1}v' - \Psi) \quad (6)$$

여기서  $A$ 는 단면적,  $I$ ,  $J$ 는 부재단면의 단면 2차모멘트 및 비틀림상수,  $E$ ,  $G$ 는 재료의 탄성계수 및 전단탄성계수,  $\alpha$ 는 단면형상계수이다.

부재가 조화진동을 한다고 가정하면 단위길이당 수직방향관성력  $F_v$ , 회전관성우력  $C_\Psi$  및 비틀림 관성우력  $C_\phi$ 는 각각 다음과 같다.

$$F_v = -m A \omega^2 v \quad (7)$$

$$C_\Psi = -m I \omega^2 \Psi \quad (8)$$

$$C_\phi = -m I_p \omega^2 \phi \quad (9)$$

여기서  $m$ 은 부재재료의 밀도,  $\omega$ 는 고유각진동수 (rad/sec)이다. 이상의 합응력 및 관성력 식들에서 식 (6)이 전단변형 효과이고 식 (8)이 회전관성 효과이다.

Fig. 2에서  $j$ 번째 스프링 반력은  $K_j v$ 이고  $j$ 번째 지반반력  $S_j H v$ 이므로 이들 두 힘을 등가시키면<sup>(11)</sup> 다음과 같다.

$$S_j H v = K_j v \quad (10)$$

윗 식에서  $S_j$ 를  $K_j$ 와  $H$ 로 나타내면 다음과 같다.

$$S_j = K_j / H = K_j \lambda / l \quad (11)$$

식 (11)에서  $\lambda$ 는 다음과 같이 정의되며  $\lambda$ 값이 클수록 더 정확한 수치해를 얻는다.

$$\lambda = l / H \quad (12)$$

식 (11)을 식 (1)에 대입하면 스프링상수가  $K_j$ 이고 스프링위치가  $L_j$ 인 동적 평형방정식을 다음과 같이 얻는다.

$$Q' - \rho F v - \rho K_j (\lambda / l) v = 0, \quad K_j = 0 \text{ not for } L_j - l / (2\lambda) \leq x \leq L_j + l / (2\lambda) \quad (13)$$

식 (13), (2)~(9)의 기본 관계식들을 이용하면 스프링으로 탄성 지지된 곡선부재의 면의 자유진동을 지배하는 기본 미분방정식을 얻을 수 있다. 지배 미분방정식을 무차원 형태로 나타내기 위하여 다음의 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x / l, \quad \delta = y / l, \quad f = h / l \quad (14, 15, 16)$$

$$\zeta = \rho / l, \quad \eta = v / l, \quad m_j = L_j / l \quad (17, 18, 19)$$

$$s = l / \sqrt{I / A}, \quad s_p = l / \sqrt{I_p / A} \quad (20, 21)$$

$$\epsilon = GJ / (EI), \quad \mu = \alpha G / E \quad (22, 23)$$

$$k_j = K_j l^4 / (\pi^4 EI) \quad (24)$$

$$c_i = \omega_i l^2 \sqrt{m A / (EI)}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (25)$$

여기서,  $(\xi, \delta)$ 는 무차원 직교좌표계,  $f, \zeta, \eta, m_j$ 는  $h, \rho, v, L_j$ 를 지간길이  $l$ 로 정규화한 것으로  $f$ 는 수평높이대 지간길이 비,  $m_j$ 는 스프링 위치변수이다.  $s$ 와  $s_p$ 는 세장비 관련 변수,  $\epsilon$ 과  $\mu$ 는 강성변수와 전단변수,  $k$ 는 스프링 변수(spring parameter)이다.  $c_i$ 는 무차원 고유진동수(non-dimensional frequency parameter)이고  $i$ 는 모드 번호(mode number)이다.

합응력식 (4)~(6)에서 이들의 1계미분  $M', T', Q'$ 을 구하고 이들 식과 합응력식 (4)~(6), 관성력식 (7)~(9)을 동적 평형방정식 (13), (2), (3)에 대입하고 무차원 변수들인 식 (14)~(25)를 이용하면 스프링으로 탄성 지지된 곡선보의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\eta'' = a_1 \eta' + (\pi^4 k_j \lambda - c_i^2) a_2 \eta + a_3 \Psi', \quad k_j = 0 \text{ not for } m_j - 1 / (2\lambda) \leq \xi \leq m_j + 1 / (2\lambda) \quad (27)$$

$$\Psi'' = a_4 \Psi' + (a_5 - a_6 c_i^2) \Psi + a_7 \phi' + a_8 \eta' \quad (28)$$

$$\phi'' = a_9 \phi' + (a_{10} - a_{11} c_i^2) \phi + a_{12} \Psi' + a_{13} \Psi \quad (29)$$

여기서,

$$a_1 = \zeta' / \zeta \quad (30a)$$

$$a_2 = \zeta^2 / (\mu s^2) \quad (30b)$$

$$a_3 = \zeta \quad (30c)$$

$$a_4 = \zeta^2 \mu s^2 + \epsilon \quad (30d)$$

$$a_5 = \zeta^2 / s^2 \quad (30e)$$

$$a_6 = 1 + \epsilon \quad (30f)$$

$$a_7 = -\zeta \mu s^2 \quad (30g)$$

$$a_8 = 1 / \epsilon \quad (30h)$$

$$a_9 = \zeta^2 / (s_p^2 \epsilon) \quad (30i)$$

$$a_{10} = -(1 + 1 / \epsilon) \quad (30j)$$

본 연구에서 곡선보의 단부조건으로 회전-회전, 회전-고정, 고정-고정의 단부조건을 고려하며, 각 단부조건에 대한 경계조건은 다음과 같다. 회전단에서는 수직방향변위, 비틀림각 및 식 (4)의 휨모멘트가 "0", 고정단에서는 수직방향변위, 비틀림각 및 단면회전각이 "0"이므로 무차원 변수를 이용하여 회전단, 및 고정단의 경계조건식을 나타내면 각각 식 (31)~(33) 및 (34)~(36)과 같다.

$$\eta = 0, \quad \phi = 0, \quad \Psi' = 0 \quad (31, 32, 33)$$

$$\eta = 0, \quad \phi = 0, \quad \Psi = 0 \quad (34, 35, 36)$$

### 3. 형상 함수

위에서 유도한 상미분방정식을 수치해석하기 위해서는 상미분방정식의 계수  $a_1 \sim a_{10}$ 에 포함되어 있는 형상함수  $\zeta, \zeta'$ 가 정의되어야만 한다. 이 형상함수

는 주어진 곡선부재의 선형에 대하여 다음과 같이 대수적으로 산출한다. Fig. 2에서  $y=y(x)$ 의 선형식은 식 (14)와 (15)에 의하여 식 (37)의 무차원 선형식  $\delta$ 로 나타낼 수 있고, 무차원 곡률반경  $\xi$ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\delta = \delta(\xi) \quad (37)$$

$$\xi = \left( \frac{d^2\delta}{d\xi^2} \right)^{-1} \left[ 1 + \left( \frac{d\delta}{d\xi} \right)^2 \right]^{3/2} \quad (38)$$

곡선보축상 임의점에서  $x$  축과 곡률중심방향인 이 루는 각도  $\theta$ 는 다음 식과 같다.

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left( \frac{d\delta}{d\xi} \right) \quad (39)$$

나머지 곡률변화계수  $\zeta'$ 는 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$\zeta' = \frac{d\zeta}{d\xi} \frac{d\xi}{d\theta} \quad (40)$$

이상의 식 (37)~(40)을 이용하면 주어진 곡선보의 선형에 대한 변화곡률항인  $\zeta, \zeta'$ 를 계산할 수 있다. 본 연구에서는 곡선보의 선형으로 원호형, 포물선형, 정원형, 타원형의 곡선부재를 채택하였다.

#### 4. 수치해석 결과 및 토의

이상에서 상미분방정식, 경계조건 및 형상 함수식이 유도되었으므로 주어진 곡선보의 선형, 단부조건 및  $f, s, s_p, \epsilon, n, k_j, m_j$ 가 정의되면 무차원 고유진동수  $c_i$ 와 진동형  $\eta = \eta_i(\xi)$ 를 수치해석 방법에 의하여 산출할 수 있다.  $c_i$  값이 계산되면 실 구조물의 고유각진동수  $\omega_i$ 는 식 (25)에 의하여 산출할 수 있다. 또한 진동형  $\eta = \eta_i(\xi)$ 는 최대진폭을 1로 하는 상대적 크기의 진폭이다. 이 연구에서 상미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta 법을 이용하였고, 상미분방정식의 고유치인  $c_i$ 를 산출하기 위하여 행렬값 탐사 법과 Regula-Falsi 법을 이용하였다. 이와 같은 고유치의 수치해석 방법은 이미 다수의 문헌들<sup>(11,12)</sup>에 의하여 그 타당성이 입증된 바 있다.

이 연구의 수치해석 예에서 단면의 성질 및 재료의 성질로부터 결정되는  $s_p=0.45s, \epsilon=1.06, \mu=0.32$ 로 결정하여 수치해석하였고 나머지 무차원 변수

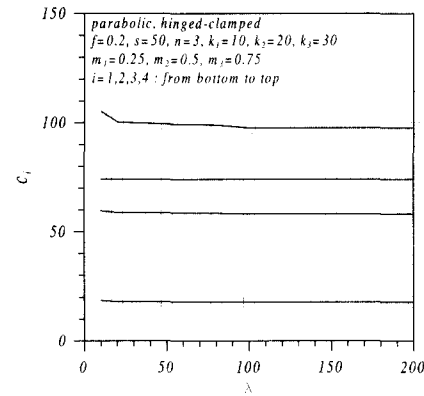


Fig. 4 Convergency analysis

$f, s, k_j, m_j$ 는 곡선보의 변수연구(parametric study)에 이용하였다.

수치해석을 실시하기 전에 먼저 식 (12)에서 정의된  $\lambda$ 값을 결정하기 위하여 수렴해석을 실시하였다. Fig. 4에 보인 바와 같이  $\lambda=20$ 이면 수치해는  $\lambda=200$ 의 수치해와 비교하여 충분한 정도로 수렴하고 있다. 이는 스프링을 지반길이가 전지간 길이의 1/20인 탄성지반으로 모형화하면 충분한 정도의 수치해를 얻는다는 뜻이다. 그러나 실제의 수치해석에서는 수치해의 정도를 강화하기 위하여  $\lambda=100$ 으로 수치해석하였다.

Table 1 Comparisons\* of  $c_i$  between this study and SAP 2000

End constraint	Data source	Frequency parameter, $c_i$			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
Hinged - hinged	This study	16.63	54.15	72.81	80.06
	SAP90	16.50	55.84	71.32	80.13
Hinged - clamped	This study	16.73	54.35	72.96	96.55
	SAP90	17.02	53.94	69.54	98.57
Clamped - clamped	This study	25.16	64.96	73.06	103.20
	SAP90	25.87	65.32	72.72	101.45

\* circular,  $f=0.2, s=50, n=3, k_1=10, k_2=20, k_3=30, m_1=0.25, m_2=0.5, m_3=0.75$

**Table 2** Comparisons\* of  $c_i$  by end constraint and type of curve

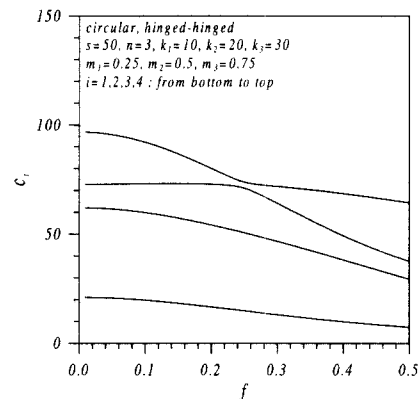
End constraint	Type of curve	Frequency parameter, $c_i$			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
Hinged-hinged	Circular	16.63	54.15	72.81	80.06
	Parabolic	16.97	54.38	73.90	81.96
	Sinusoidal	16.97	54.40	74.17	82.66
	Elliptic	16.88	54.31	73.49	81.07
Hinged-clamped	Circular	16.73	54.35	72.96	96.55
	Parabolic	17.06	54.57	73.92	97.57
	Sinusoidal	17.06	54.56	74.24	97.87
	Elliptic	16.97	54.50	73.49	97.13
Clamped-clamped	Circular	25.16	64.96	73.06	103.20
	Parabolic	25.20	65.15	74.01	104.61
	Sinusoidal	25.17	65.12	74.33	105.06
	Elliptic	25.20	65.17	73.58	103.99

\*  $f=0.2, s=50, n=3, k_1=10, k_2=20, k_3=30, m_1=0.25, m_2=0.5, m_3=0.75$

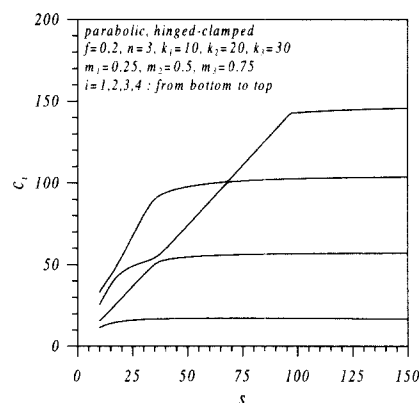
이 연구결과와 타당성을 검증하기 위하여 본 연구와 SAP 2000의 결과를 Table 1에서 비교하였다. 이 표의 하단에 수치해석에 사용한 곡선보의 제원들을 표기하였다. 이 표에 보인 바와 같이 두 결과들은 서로 매우 근접한 값들을 보여주고 있어서 본 연구의 이론적, 수치적 방법이 모두 타당함을 알 수 있다.

Table 2는 곡선보의 단부조건별, 선형별로  $c_i$  값을 비교한 것이다. 이 표에 보인 바와 같이  $c_i$  값은 고정-고정, 회전-고정, 회전-회전의 단부조건 순서로 큰 것을 알 수 있다. 선형별  $c_i$  값은 거의 같은 값을 보이고 있어 선형이  $c_i$  값에 미치는 영향은 크지 않으나 원호형이 다른 선형에 비하여 비교적 작은 값을 보이고 있다.

Fig. 5~9는 곡선보의 변수연구를 시행하고 이를 그림에 나타낸 것이다. 이 그림들에서 수치해석에 사용한 선형, 단부조건 및 변수 값들을 그림 상단에 표시하였다. Fig. 5는  $c_i$ 와  $f$ 의 관계를 나타낸 것으로  $f$  값이 증가함에 따라  $c_i$  값은 감소함을 알 수 있다. 이는  $f$  값이 증가하면 곡선부재의 길이가 증가하여 진동에 대한 강성이 감소하여  $f$  값도 감소되는 것으로 사료된다.  $f$  값이 0이면 직선 보이므로  $f=0.05$ 의 □



**Fig. 5**  $c_i$  versus  $f$  curves



**Fig. 6**  $c_i$  versus  $s$  curves

로 표시된  $c_i$  값들은 거의 직선 보의  $c_i$  값들로 수렴되었음을 알 수 있다.

Fig. 6은  $c_i$ 와  $s$ 의 관계를 나타낸 것이며  $s$  값이 증가함에 따라서  $c_i$  값도 증가함을 알 수 있다.  $s$  값이 증가함에 따라  $c_i$  값은 수평선에 수렴하여 고유진동수를 증가시키기 위하여  $s$  값을 필요이상으로 크게 증가시킬 필요는 없다. 제 1, 2모드의 경우에는  $s$  값이 30이상에서, 제 3모드는 70이상에서, 제 4모드는 100이상에서  $c_i$  값에 미치는 영향이 매우 작은 것을 알 수 있다.

Fig. 7은  $c_i$ 와  $k(=k_1=k_2=k_3; n=3)$ 사이의 관계를 그린 것이다. 이 그림에서 보인 바와 같이  $k$  값이 증가함에 따라  $c_i$  값은 증가하지만 제 1, 3모드는 제 2, 4모드와 비교하여 그 영향력은 비교적 작은 것을 알 수 있다. 특히 제 3모드의 경우에는  $c_i$  값은 거의 증가하지 않는다. 이는 제 3모드는 비틀림 모드

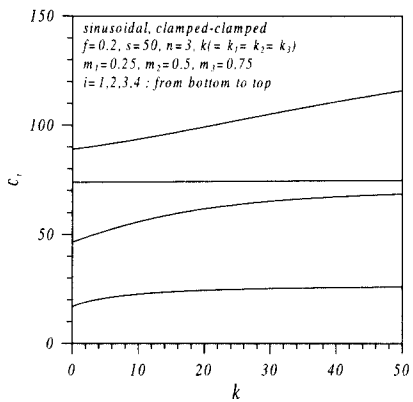


Fig. 7  $c_i$  versus  $k$  curves

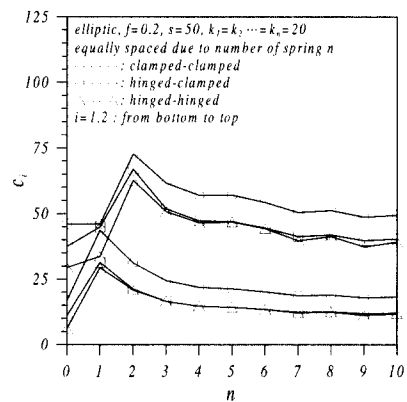


Fig. 8  $c_i$  versus  $n$  curves

(torsional mode)이어서 비틀림에 대하여 저항을 하지 못하는 스프링의  $k$  값이 증가하여도  $c_i$  값의 증가에는 영향을 거의 미치지 못하기 때문으로 사료된다.

Fig. 8은  $c_i$ 와  $n$  사이의 관계를 그린 것이다. 이 그림에서 보인 바와 같이 제 1모드는  $n=1$ 일 때, 제 2모드의 경우에는  $n=2$ 값일 때 가장 큰  $c_i$  값을 보이고 있다. 이는 스프링이 없는 경우의 최대진폭위치에 스프링을 설치하는 것이 고유진동 수를 증가시킬 수 있는 방안을 알 수 있다. 그러나  $n$ 이 3 이상에서는 오히려  $c_i$  값이 감소하며 각각 수평선에 접근하고 있다. 즉  $n$  값이 증가함에 따라서 Winkler지반 위에 놓인 곡선부재의  $c_i$  값으로 수렴되는 것을 알 수 있다.

Fig. 9는  $c_i$ 와  $m_1(n=1)$  사이의 관계를 그린 것으로  $m_1$  값이 증가함에 따라  $c_i$  값은 증가, 감소를 반복하고 있다. 스프링이 없는 경우의 모드의 최대진폭위치에 스프링을 설치하면 매우 큰  $c_i$  값을 얻을 수 있

는 것을 이 그림으로부터 알 수 있다. 예로서 제 1모드의 경우에는 지간의 중앙에 스프링을 설치하므로서, 제 2모드의 경우에는  $\xi=0.33, 0.67$  위치에 스프링을 설치하므로서 매우 큰 값을 실현할 수 있다. 한편 제 3모드는 비틀림모드이기 때문에 스프링의 위치에 상관없이 거의 같은  $c_i$  값을 보여주고 있다. 또한 이 그림의 곡선들은  $m_1=0.5$ 에 대하여 좌우대칭인 것을 알 수 있다.

Fig. 10은 자유진동하는 곡선부재의 제 1, 2 모드의 진동형을 보여주고 있다. 이 그림을 통하여 각 모드별로 상대진폭의 크기, 최대진폭의 위치 및 무변위 위치(nodal point) 등을 알 수 있다.

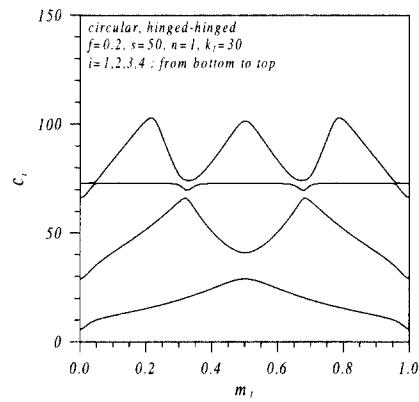


Fig. 9  $c_i$  versus  $m_1$  curves

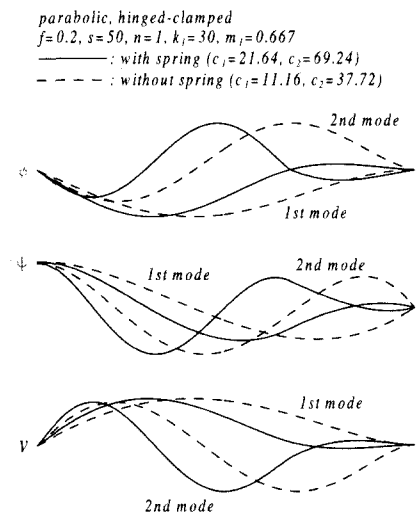


Fig. 10 Example of mode shapes

## 5. 결론

이 논문은 스프링으로 탄성 지지된 곡선보의 자유진동에 관한 연구이다. 스프링을 길이가 매우 짧은 탄성지반으로 모형화하여 곡선보의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식을 유도하였다. 이 상미분방정식에는 회전관성과 진단변형효과를 고려하였다. 곡선보의 선형으로는 원호형, 포물선형, 정현형, 타원형의 4가지 선형을 채택하였으며, 단부조건으로는 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정의 3가지 단부조건을 채택하였다. 이 상미분방정식을 수치해석하여 무차원 고유진동수와 진동형을 산출하였다. 본 연구와 SAP 2000의 고유진동수를 서로 비교하여 본 연구 결과의 타당성을 입증하였다. 실제의 수치해석 예에서는 최저차 4개( $i=1,2,3,4$ )의 무차원 고유진동수를 산출하고, 곡선부재의 변수와 무차원 고유진동수 사이의 관계 및 진동형을 그림에 나타내었다. 이 연구의 결과들은 동하중이 작용하는 건설공학, 기계공학을 비롯한 구조공학분야에서 그 유용성이 기대된다.

## 후 기

이 연구는 1998년도 한국학술진흥재단의 자유공모 과제(2년 연속 과제: 과제번호: KRF-98-001-E01895) 연구비에 의하여 연구된 결과들 중의 일부이며, 동 재단의 연구비 지원에 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

(1) Voltera, E., 1953, "Deflection of Circular Beams resting on an Elastic Foundation obtained by the Method Harmonic Analysis," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 20, pp. 227~237.  
 (2) Wang, T.M. and Stephens, J.E., 1977, "Natural Frequencies of Timoshenko Beams on Pasternak Foundation," *Journal of Sound and*

*Vibration*, Vol. 51, pp. 149~155.

(3) Panayotounakos, D.E. and Teocaris, P. S., 1980, "The Dynamically Loaded Circular Beam on an Elastic Foundation," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, pp. 139~144.

(4) Issa, M.S., 1988, "Natural Frequencies of Continuous Curved Beams on Winkler-Type Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 127, pp. 291~301.

(5) Kukla, S., 1991, "Free Vibration of a Beam Support on a Stepped Elastic Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 149, pp. 259~265.

(6) Franciosi, C. and Masi, A., 1993, "Free Vibrations of Beams on Two-Parameter Elastic Foundation," *Computer & Structure*, Vol. 47, pp. 419~426.

(7) 이병구, 1994, "전단층을 갖는 탄성지반 위에 놓인 보의 자유진동 해석," *한국강구조학회 논문집*, 제 6 권 제 3 호, pp. 107~115.

(8) De Rosa, M.A., 1995, "Free Vibrations of Stepped Beams with Intermediate Elastic Foundation," *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 19, pp. 1~4.

(9) 이병구, 오상진, 이재만, 1998, "탄성지반 위에 놓인 곡선형 Timoshenko 보의 자유진동," *한국전산구조공학회 논문집*, 제 11 권 제 2 호, pp. 273~280.

(10) Winkler, E., 1867, *Die Lehre von der Elastizitat und Festigkeit*, Dononocus.

(11) Lee, B.K., Li, G.F., Oh S.J., and Lee, T.K., 2000, "Free Vibration and Buckling Loads of Columns with Multiple Elastic Springs," *KSNVE*, Vol. 10, No. 6, pp. 1067~1074.

(12) Oh, S. Jin., Lee, B. K., and Lee, I. W., 2000, "Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-Uniform Cross-Section," *International Journal of Solids & Structures*, Vol. 37 No. 6, pp. 4871~4891.